IOAN BRAŞOVAN

GHEORGHE GHERMAN

MĂSURAREA MĂRIMILOR ELECTRICE ŞI MAGNETICE

PROBLEME

EDITURA FACLA

IOAN BRAŞOVAN GHEORGHE GHERMAN

MĂSURAREA MĂRIMILOR ELECTRICE ŞI MAGNETICE

PROBLEME



EDITURA FACLA — 1978

PREFAȚĂ

Măsurarea mărimilor electrice și magnetice constituie o specialitate de sine stătătoare utilizată de oameni de știință, ingineri, tehnicieni din diverse domenii de activitate, în special electrotehnice. Diferitele aspecte teoretice și practice ale măsurării mărimilor electrice și magnetice sînt cuprinse într-o vastă literatură alcătuită din manuale, cursuri, tratate, monografii și articole. Puține lucrări dedicate măsurării mărimilor electrice și magnetice prezintă însă pe larg îmbinarea teoriei cu practica. Această constatare a stat la baza elaborării lucrării de față, alcătuită din probleme originale și reprezentative referitoare la măsurarea mărimilor electrice și magnetice.

Lucrarea se adresează acelora care urmăresc să consolideze și să aprofundeze cunoștințele legate de măsurarea mărimilor electrice și magnetice. Ea constituie în același timp un îndrumar de lucru pentru cei ce-și desfășoară activitatea în domeniul proiectării, construirii sau utilizării mijloacelor de măsurare a mărimilor electrice și magnetice. Atît pentru unii cît și pentru ceilalți, înțelegerea și aplicarea corectă a teoriei sînt înlesnite prin problemele prezentate în această lucrare elaborată pe baza activității științifice, didactice și în producție a autorilor.

Cunoștințele teoretice necesare înțelegerii conținutului acestei lucrări se regăsesc în literatura prezentată în bibliografiile ce încheie capitolele. Referiri bibliografice se fac în special la lucrările : E. Pop, M. Chivu : Măsuri electrice și magnetice *vol. I și vol. II, Institutul politehnic, Timișoara, 1969 ; P. Manolescu :* Măsurări electrice industriale *vol. I, Editura tehnică, București, 1966 ; Ul. Wiener :* Măsurări electrice industriale *vol. II, Editura tehnică, București, 1969, precum și la standardele de stat. De asemenea, în vederea sistematizării unor cunoștințe utile abordării problemelor, capitolele și paragrafele încep cu introduceri avînd caracter teoretic.*

Conținutul problemelor se grefează de fapt pe două idei fundamentale. Prima, al cărei nucleu se găsește în capitolul I al lucrării, se referă la obținerea și prezentarea corectă a rezultatelor măsurării mărimilor electrice și magnetice și a erorilor de măsurare aferente. Cea de-a doua se referă la calculul unor elemente componente ale aparatelor și instalațiilor de măsură destinate măsurării mărimilor electrice și magnetice.

La sfîrșitul fiecărei probleme se redă soluția ei completă. La problemele considerate mai dificile soluțiile se prezintă amănunțit, însoțite de comentarii, ce eviden-

ţiază anumite aspecte demne de luat în seamă în practica măsurării mărimilor electrice şi magnetice.

Terminologia şi notaţiile folosite în lucrare sînt cele standardizate sau uzuale. Prin specificaţii se înţeleg prevederi referitoare la mijloacele de măsurare ale mărimilor electrice şi magnetice cuprinse în documentaţii tehnice, instrucţiuni sau standarde de stat. Mărimile alternative (curenţi, tensiuni etc.) se consideră a fi sinusoidale, cu excepţia cazurilor în care se fac alte precizări.

Unităţile de măsură utilizate sînt cele corespunzătoare sistemului internaţional SI. Cu mici excepţii — unele recomandate chiar de standardele de stat — s-au folosit unităţi de măsură tolerate (de ex., grad sexagezimal, grad Celsius, oră). Pentru a preveni apariţia unor confuzii, alături de anumite relaţii de calcul s-au trecut între paranteze drepte unităţile de măsură folosite (de ex., $L_{AB} = -0{,}006 \cos \alpha$, *[H ; rad]).*

Elaborarea acestei lucrări a avut loc sub îndrumarea şi cu încurajarea acordate autorilor de către prof. dr. ing. Eugen Pop, şeful colectivului disciplinei de Măsuri electrice de la Facultatea de electrotehnică a Institutului politehnic „Traian Vuia" din Timişoara, ajutor pentru care autorii îi sînt deosebit de recunoscători ; de asemenea, şi altor membri ai colectivului disciplinei de Măsuri electrice, în mod special ş.l. ing. Sever Crişan şi ş.l. ing. Mircea Chivu, pentru discuţiile fructuoase purtate cu ocazia elaborării unora dintre probleme. Prin sfaturile folositoare date înaintea şi cu ocazia recenzării acestei lucrări, dr. ing. Ulrich Wiener, şef de laborator la Institutul naţional de metrologie din Bucureşti, a contribuit la îmbunătăţirea ei, motiv pentru care autorii îi exprimă şi pe această cale gratitudinea lor. Pentru condiţiile creeate apariţiei acestei lucrări autorii adresează Editurii „Facla" din Timişoara mulţumirile lor.

Autorii îşi exprimă cu anticipaţie recunoştinţa pentru aprecierile şi sugestiile care li se vor adresa.

CAPITOLUL 1

CALCULUL ERORILOR DE MĂSURARE

Rezultatele tuturor măsurărilor sînt afectate de erori.

Eroarea absolută E este diferența dintre rezultatul x al măsurării și valoarea adevărată X a mărimii măsurate

$$E=x-X. \quad (1.1)$$

Eroarea relativă procentuală E_r este raportul — exprimat în procente — dintre eroarea absolută E și valoarea adevărată X a mărimii măsurate

$$E_r=\frac{100\,E}{X}. \quad (1.2)$$

Dacă eroarea absolută este mică, atunci are loc relația

$$E_r\approx\frac{100\,E}{x}. \quad (1.3)$$

Eroarea raportată procentuală E_R este raportul — exprimat în procente — dintre eroarea absolută E și o valoare convențională X_c, stabilită prin specificații

$$E_R=\frac{100\,E}{X_c}. \quad (1.4)$$

Eroarea sistematică este eroarea, care rămîne constantă, atunci cînd se măsoară repetat, în condiții practic identice, aceeași mărime, sau care variază pe baza unei legi definite, atunci cînd condițiile se modifică.

Eroarea aleatorie este eroarea, care variază imprevizibil, atunci cînd se măsoară repetat, în condiții practic identice, aceeași mărime.

Eroarea grosolană este eroarea, care depășește considerabil erorile cele mai probabile, specifice condițiilor date de măsurare.

1.1. CALCULUL ERORILOR REZULTATELOR MĂSURĂRILOR EFECTUATE CU APARATE DE MĂSURĂ CU CITIRE DIRECTĂ

La aparatele de măsură cu citire directă rezultatul măsurării apare nemijlocit pe un dispozitiv de afişare – analogic sau numeric – a rezultatului. Acest dispozitiv este în primul caz un indicator, care se deplasează faţă de o scară gradată, iar în al doilea, imaginea realizată pe cale mecanică, optică sau electrică a unor numere în codul – de obicei – zecimal.

În condiţii de referinţă stabilite prin specificaţii, aparatele de măsură cu citire directă prezintă o eroare de bază (eroare raportată procentuală limită $E_{R\lim}$ sau eroare relativă procentuală limită $E_{r\lim}$). Modificarea oricărei mărimi de influenţă faţă de condiţiile de referinţă atrage după sine apariţia unor erori suplimentare, care se adaugă la eroarea de bază.

În cazul măsurărilor efectuate cu aparate de măsură cu citire directă a căror eroare de bază se exprimă ca o eroare raportată procentuală limită $E_{R\lim}$, eroarea relativă procentuală limită $E_{r\lim}$ aferentă rezultatelor se determină cu relaţia

$$E_{r\lim}=E_{R\lim}\frac{X_c}{x}, \tag{1.5}$$

obţinută pe baza relaţiilor (1.3, 1.4).

În cazul măsurărilor efectuate cu aparate de măsură cu citire directă cu afişare numerică, pe lîngă eroarea de bază şi eventualele erori suplimentare, rezultatele sînt afectate şi de eroarea de cuantizare. Această eroare provine din aproximarea introdusă la conversiunea mărimilor analogice continue în mărimi numerice discontinue.

Problema 1.1.1. Pentru măsurarea tensiunii de fază de 220 V într-o reţea de c.a. trifazat sînt disponibile voltmetrele feromagnetice din tabelul 1.1.1. Presupunînd că sînt asigurate condiţiile de referinţă pentru efectuarea măsurării, să se precizeze care din aceste aparate permite măsurarea tensiunii cu eroarea relativă procentuală limită cea mai mică.

Tabelul 1.1.1.

Voltmetrul	Intervalul de măsurare [V]	Clasa de precizie
1	250	1
2	150	2,5
3	300	1,5
4	600	0,5

Soluţie. Voltmetrul 2 nu se poate utiliza la măsurarea tensiunii de 220 V, deoarece intervalul său de măsurare este doar 150 V. Erorile relative procentuale limită aferente măsurărilor cu celelalte voltmetre se stabilesc pe baza relaţiei (1.5), ţinînd seama de faptul că eroarea raportată procentuală limită $E_{R\lim}$ consi-

derată fără semn constituie clasa de precizie, iar valoarea convențională X_c este intervalul de măsurare. Rezultă

$$E_{r\lim 1}=(\pm 1)\cdot\frac{250}{220}=\pm 1{,}14\%,$$

$$E_{r\lim 3}=(\pm 1{,}5)\cdot\frac{300}{220}=\pm 2{,}05\%,$$

$$E_{r\lim 4}=(\pm 0{,}5)\cdot\frac{600}{220}=\pm 1{,}37\%.$$

Cu toate că nu are clasa de precizie cea mai bună, voltmetrul 1 asigură măsurarea tensiunii cu eroarea relativă procentuală limită cea mai mică, datorită folosirii judicioase a intervalului său de măsurare.

Problema 1.1.2. Să se reprezinte grafic erorile relative procentuale limită de măsurare a tensiunilor cuprinse între 0 și 600 V cu un voltmetru magnetoelectric multiplu cu redresor, avînd intervalele de măsurare (1,5 ; 6 ; 15 ; 30 ; 150 ; 300 ; 600) V și clasa de precizie 1,5, presupunînd că măsurările au loc în condițiile de referință.

Soluție. Conform relației (1.5) eroarea relativă procentuală limită se calculează din

$$E_{r\lim}=(\pm 1{,}5)\cdot\frac{U_c}{U},$$

în care U_c este intervalul de măsurare, iar U valoarea tensiunii măsurate de voltmetru.

Dependența erorii relative procentuale limită $E_{r\lim}$ față de valoarea tensiunii U măsurată de voltmetru s-a redat la scară semilogaritmică în diagrama din fig. 1.1.1. Se constată că la stabilirea intervalelor de măsurare ale voltmetrului magnetoelectric multplu cu redresor nu s-a avut în vedere încadrarea uniformă a rezultatelor măsurărilor între erori relative procentuale limită de valori apropiate. Acest fapt se justifică prin aceea că în practică apar mai des unele valori ale tensiunii, de ex. (6; 12; 24; 110; 127; 220; 380) V, în jurul cărora eroarea relativă procentuală limită se află între limite rezonabile: ±(1,5 – 3) %:

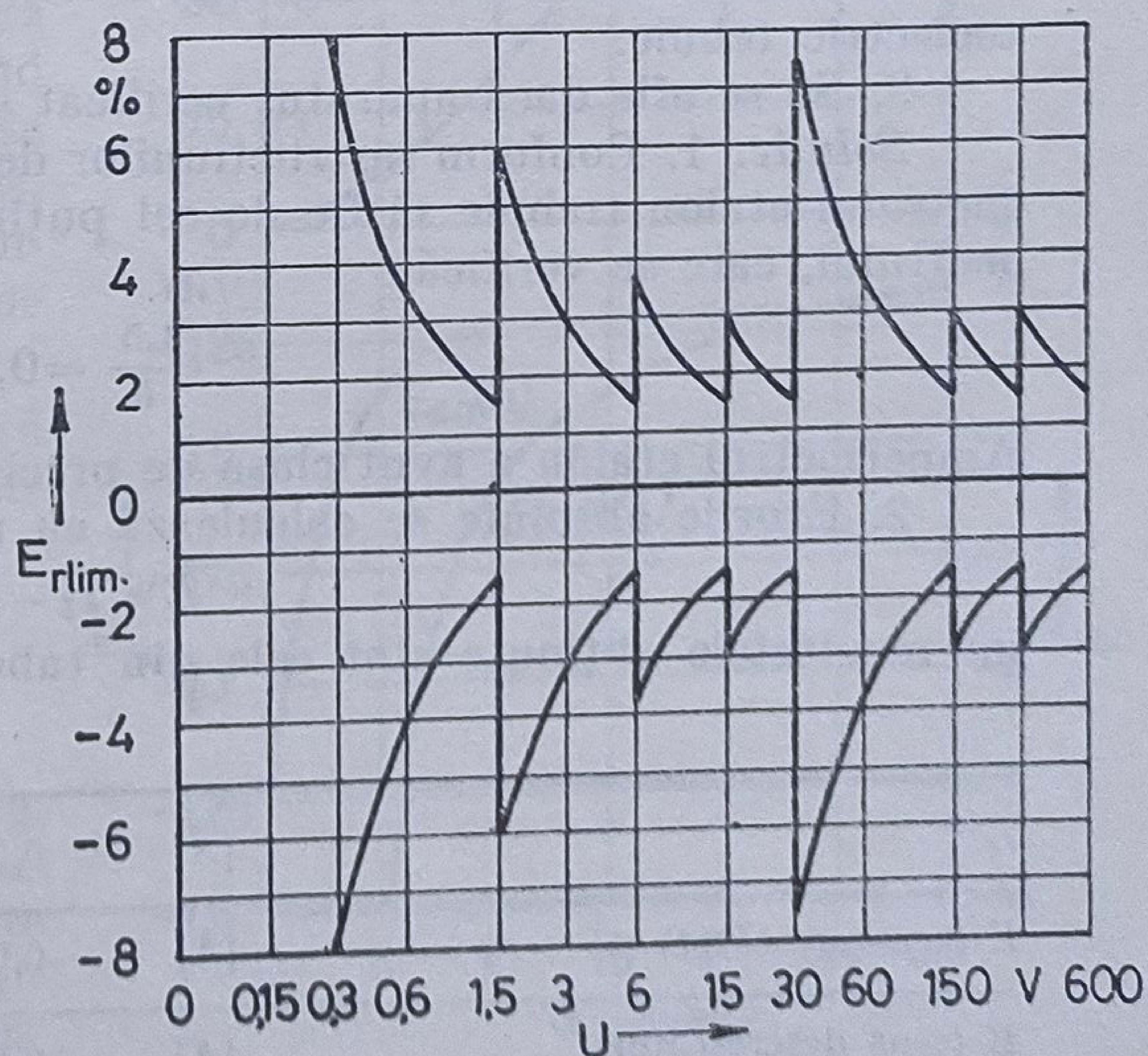


Fig. 1.1.1.

Problema 1.1.3. Un voltmetru feromagnetic de tablou cu intervalul de măsurare 250 V și clasa de precizie 1,5 destinat func-

ționării în poziție verticală s-a montat într-un pupitru înclinat cu 45° față de verticală. Știind că pupitrul se află într-o încăpere a cărei temperatură variază între 24 °C și 30 °C, să se indice eroarea suplimentară a indicațiilor aparatului față de cele care au loc în condițiile de referință. Care este în aceste condiții eroarea relativă procentuală limită de măsurare a tensiunii de 210 V?

Soluție. Condițiile de referință sînt – pe lîngă altele, care nu se specifică aici – poziția de funcționare verticală și temperatura de 20 °C. În aceste condiții eroarea de bază – eroarea raportată procentuală limită – este $E_{Rlim} = \pm 1{,}5\%$. Conform standardelor, acestei erori i se adaugă $\pm 1{,}5\%$ eroarea suplimentară datorită influenței poziției și $\pm 1{,}5\%$ cea datorită influenței temperaturii.

Tensiunea de 210 V se măsoară în aceste condiții cu eroarea relativă procentuală limită

$$E_{r\,lim} = \pm(1{,}5+1{,}5+1{,}5)\cdot\frac{250}{210} = \pm 5{,}36\%.$$

Problema 1.1.4. La verificarea unui ampermetru magnetoelectric tehnic, avînd clasa de precizie 1,5, s-au obținut indicațiile din tabelul 1.1.2.

1. Să se arate ce clasă de precizie a avut ampermetrul etalon.

Tabelul 1.1.2

Ampermetrul tehnic, I_t	[A]	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Ampermetrul etalon (sens crescător), I_e	[A]	0,21	0,43	0,64	0,82	0,99
Ampermetrul etalon (sens descrescător), I_e	[A]	0,18	0,39	0,61	0,78	0,97

2. Să se construiască diagrama erorilor absolute ale ampermetrului magnetoelectric tehnic.

3. Să se afle dacă aparatul verificat se încadrează în clasa de precizie 1,5.

Soluție. 1. Conform instrucțiunilor de verificare clasa de precizie a ampermetrului etalon trebuie să fie de cel puțin 5 ori mai mică decît cea a ampermetrului, care se verifică:

$$\frac{1{,}5}{5} = 0{,}3.$$

Ampermetrul etalon a avut clasa de precizie 0,1 sau 0,2.

2. Erorile absolute se calculează cu relația (1.1)

$$E = I_t - I_e,$$

iar rezultatele obținute sînt cele din tabelul 1.1.3.

Tabelul 1.1.3

I_t	[A]	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
E (sens crescător)	[A]	−0,01	−0,03	−0,04	−0,02	0,01
E (sens descrescător)	[A]	0,02	0,01	−0,01	0,02	0,03

Pe baza rezultatelor din tabelul 1.1.3. s-a construit diagrama erorilor absolute ale ampermetrului magnetoelectric tehnic (fig. 1.1.2).

3. Întrucît limita maximă de măsurare $I_c=1$ A constituie valoarea convenţională pe baza căreia, conform relaţiei (1.4), se poate determina valoarea erorii raportate procentuală limită, eroarea de clasă corespunzătoare ampermetrului magnetoelectric tehnic este egală cu

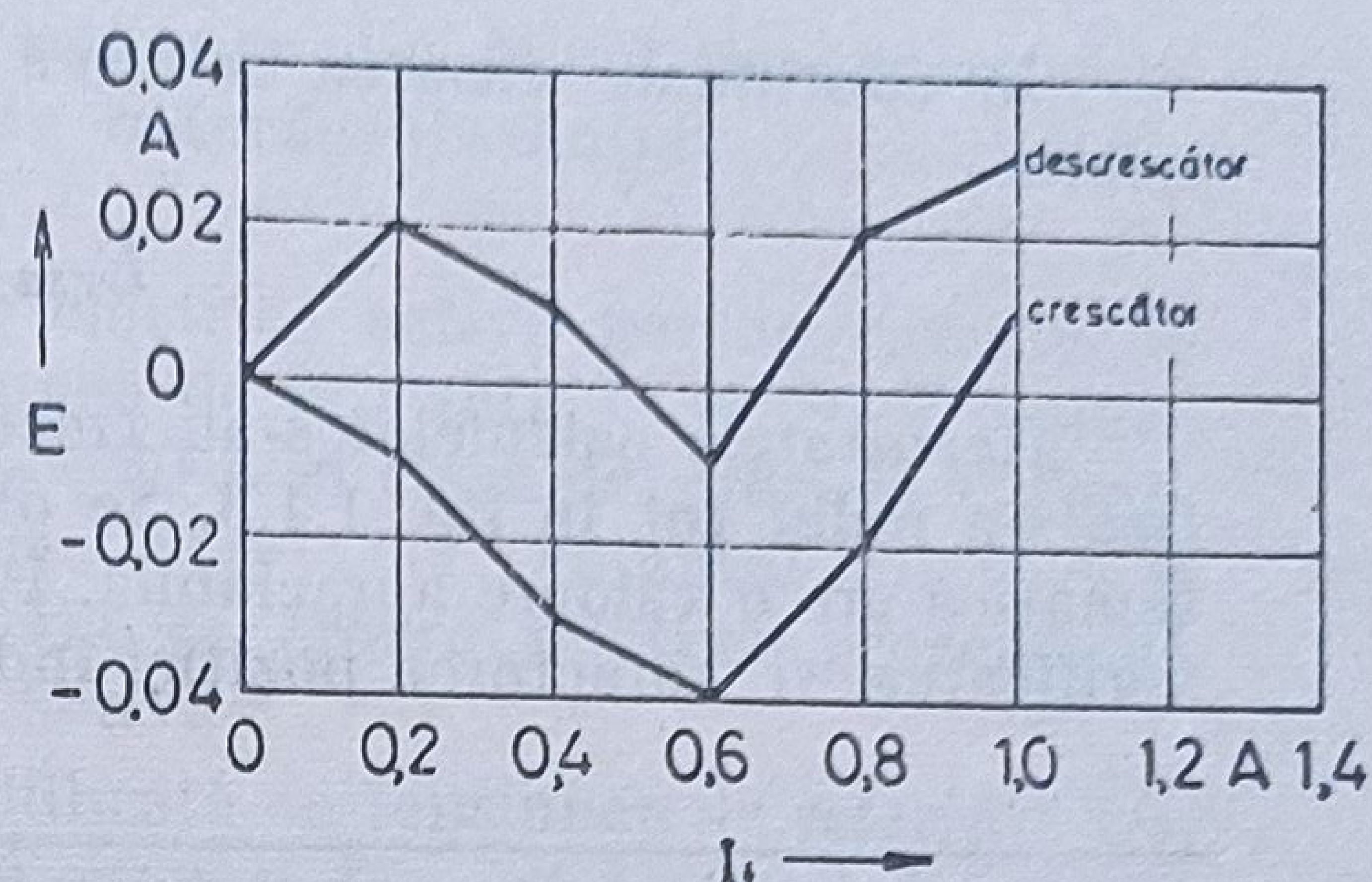


Fig. 1.1.2.

$$|E_{R\lim}|=\frac{100\,|E|_{max}}{I_c}=\frac{100\cdot 0{,}04}{1}=4\% >1{,}5\%.$$

Prin urmare aparatul nu se încadrează în clasa de precizie 1,5.

Problema 1.1.5. Un aparat de măsură magnetoelectric cu redresor are deviaţia maximă $\alpha_{max}=90°$ şi scara neliniară caracterizată în tabelul 1.1.4. Înainte de măsurare indicatorul s-a aflat cu $E_\alpha=0{,}75°$ înaintea gradaţiei zero a scării. Operatorul a omis corectarea poziţiei indicatorului, măsurările fiind afectate de o eroare sistematică. Să se reprezinte grafic eroarea absolută sistematică E_{sa} şi eroarea relativă procentuală sistematică E_{rsa} în funcţie de indicaţia a de pe scară.

Tabelul 1.1.4

Deviaţia, α [°]	0	7,5	15	30	45	60	75	82,5	90
Indicaţia, a [div]	0	5,5	8,2	13,0	17,6	21,8	25,7	27,9	30

Soluţie. Deoarece scara e neliniară eroarea absolută sistematică se determină prin intermediul relaţiei

$$E_{sa}=-\frac{da}{d\alpha}E_\alpha$$

şi a dependenţei redată grafic în fig. 1.1.3 a indicaţiei a faţă de deviaţia α. Eroarea absolută sistematică E_{sa} este afectată de semnul minus întrucît rezultatul măsurării este mai mic decît valoarea adevărată a mărimii măsurate.

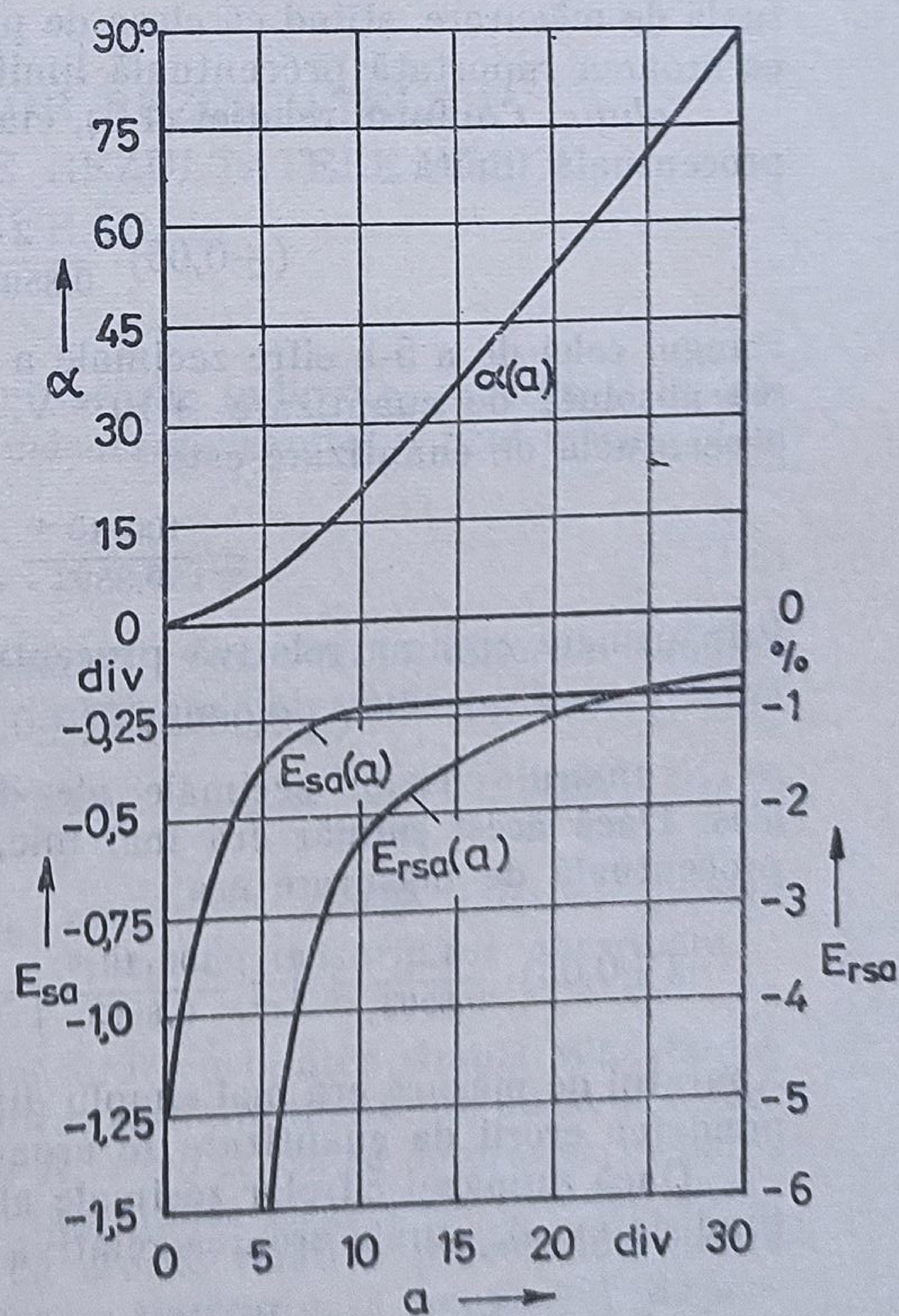


Fig. 1.1.3.

În continuare eroarea relativă procentuală sistematică se calculează cu relația

$$E_{rsa} = \frac{100\, E_{sa}}{a}.$$

Rezultatele calculelor s-au trecut în tabelul 1.1.5, iar reprezentarea grafică s-a redat tot în fig. 1.1.3. Se observă că eroarea relativă procentuală sistematică are o valoare apreciabilă. Pentru eliminarea acestei erori este necesară verificarea și corectarea poziției indicatorului înainte de efectuarea măsurării.

Tabelul 1.1.5

a	[div]	0	5	10	15	20	25	30
$\frac{da}{d\alpha}$	$\left[\frac{div}{°}\right]$	1,667	0,450	0,304	0,293	0,277	0,277	0,277
E_{sa}	[div]	−1,250	−0,338	−0,228	−0,220	−0,208	−0,208	−0,208
E_{rsa}	[%]	−∞	−6,760	−2,280	−1,467	−1,040	−0,832	−0,693

Problema 1.1.6. Cu un voltmetru numeric avînd intervalul de măsurare $U_c = 1{,}2$ V, clasa de precizie 0,05 și dispozitivul de afișare cu 5 cifre zecimale se măsoară tensiunea $U = 0{,}8593$ V. Să se stabilească eroarea relativă procentuală de măsurare, știind că clasa de precizie a voltmetrului numeric s-a definit ca eroarea raportată procentuală limită bazată pe valoarea convențională U_c.

Soluție. Conform relației (1.5), clasa de precizie determină eroarea relativă procentuală limită

$$(\pm 0{,}05) \cdot \frac{1{,}2}{0{,}8593} = \pm 0{,}0698\%.$$

Rangul celei de a 5-a cifre zecimale a dispozitivului de afișare determină eroarea absolută de cuantizare $\pm 10^{-4}$ V. Conform relației (1.3), eroarea relativă procentuală de cuantizare este:

$$\pm \frac{100 \cdot 10^{-4}}{0{,}8593} = \pm 0{,}0116\%.$$

Prin urmare eroarea relativă procentuală de măsurare este:

$$(\pm 0{,}0698) + (\pm 0{,}0116) = \pm 0{,}0814\%.$$

Numărul cifrelor zecimale ale dispozitivului de afișare a fost rațional ales. Dacă acest număr era mai mic, fiind de ex. 4, atunci eroarea relativă procentuală de măsurare era:

$$(\pm 0{,}05) \cdot \frac{1{,}2}{0{,}8593} + \left(\pm \frac{100 \cdot 10^{-3}}{0{,}8593}\right) = (\pm 0{,}0698) + (\pm 0{,}116) = \pm 0{,}1858\%.$$

Aparatul de măsură era mai simplu din punct de vedere constructiv, în schimb ponderea erorii de cuantizare în eroarea de măsurare era exagerat de mare.

Dacă numărul cifrelor zecimale ale dispozitivului de afișare era mai mare, fiind de ex. 6, atunci eroarea relativă procentuală de măsurare era:

$$(\pm 0{,}5) \cdot \frac{1{,}2}{0{,}8593} + \left(\pm \frac{100 \cdot 10^{-5}}{0{,}8593}\right) = (\pm 0{,}0698) + (\pm 0{,}00116) = \pm 0{,}07096\%.$$

În acest caz aparatul de măsură era mai complex din punct de vedere constructiv, fără ca eroarea de măsurare să se reducă substanțial.

Problema 1.1.7. Un contor de energie electrică activă pentru circuite de c.a. trifazat cu 4 conductoare, avînd tensiunea de referință $U_r=380$ V, curentul de bază $I_b=20$ A, curentul maxim $I_{max}=80$ A și clasa de precizie 1, funcționează la sarcină echilibrată cu tensiunea $U=418$ V, curentul $I=24$ A și factorul de putere $\cos\varphi=0{,}5$ (inductiv). Cu ce eroare relativă procentuală limită măsoară contorul energia electrică activă?

Soluție. La funcționarea la sarcină echilibrată cu tensiunea de referință U_r, curentul cuprins între cel de bază I_b și cel maxim I_{max} și factorul de putere $\cos\varphi=0{,}5$ (inductiv), eroarea relativă procentuală limită a unui contor de energie electrică activă pentru rețele de c.a. trifazat, cu clasa de precizie 1 este $\pm1\%$. Conform standardelor, acestei erori i se adaugă $\pm1\%$ eroarea suplimentară datorită variației cu $+10\%$ a tensiunii față de cea de referință. Prin urmare contorul măsoară energia electrică activă cu eroarea relativă procentuală limită

$$(\pm1)+(\pm1)=\pm2\%.$$

1.2. CALCULUL ERORILOR REZULTATELOR MĂSURĂRILOR BAZATE PE REZULTATELE ALTOR MĂSURĂRI

La măsurările prin comparație, la măsurările indirecte, precum și la cele efectuate prin intermediul lanțurilor de măsurare, rezultatul y al măsurării se obține prin intermediul unei relații

$$y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1.6}$$

din rezultatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale altor măsurări, ce au avut loc anterior. Eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,lim\,y}$ a rezultatului se determină pe baza relației

$$E_{r\,lim\,y}=\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\cdot\frac{E_{r\,lim\,x1}}{y}+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|\cdot\frac{E_{r\,lim\,x2}}{y}+\ldots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|\cdot\frac{E_{r\,lim\,xn}}{y}, \tag{1.7}$$

în care $E_{r\,lim\,x1}, E_{r\,lim\,x2}, \ldots, E_{r\,lim\,xn}$ reprezintă erorile relative procentuale limită aferente rezultatelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale măsurărilor anterioare.

Problema 1.2.1. Rezistența R_x s-a măsurat cu puntea simplă Wheatstone din fig. 1.2.1. Cînd puntea a fost în echilibru, celelalte rezistențe au avut următoarele valori: $R_2=137{,}2\ \Omega$, $R_3=150\ \Omega$ și $R_4=150\ \Omega$. Să se determine valoarea rezistenței R_x și eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,lim\,x}$ aferentă ei, știind că rezistențele R_2, R_3 și R_4 se cunosc cu erorile relative procentuale limită $E_{r\,lim\,2}=E_{r\,lim\,3}=E_{r\,lim\,4}=\pm0{,}1\%$, iar eroarea determinată de pragul de sensibilitate al punții este neglijabilă.

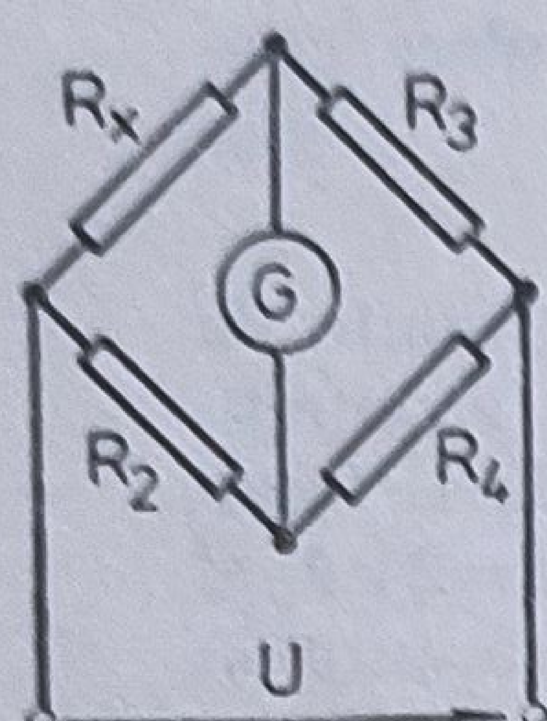


Fig. 1.2.1.

Soluție. Cu puntea simplă rezistența R_x s-a măsurat prin comparație, relația (1.6) avînd forma

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4}.$$

Prin urmare, rezultatul măsurării este:

$$R_x = \frac{137{,}2 \cdot 150}{150} = 137{,}2\ \Omega.$$

Pe baza relației (1.7), eroarea relativă procentuală limită aferentă rezultatului măsurării este:

$$E_{r\,\lim x} = E_{r\,\lim 2} + E_{r\,\lim 3} + E_{r\,\lim 4} = (\pm 0{,}1) + (\pm 0{,}1) + (\pm 0{,}1) = \pm 0{,}3\%.$$

Problema 1.2.2. Un consumator de energie electrică cu rezistența $R=160\ \Omega$ este alimentat la tensiunea continuă $U=120$ V. Dintre aparatele din tabelele 1.2.1 și 1.2.2 să se aleagă voltmetrul și ampermetrul, care asigură măsurarea puterii consumatorului cu eroarea relativă procentuală limită minimă, știind că erorile sistematice de metodă sînt neglijabile.

Tabelul 1.2.1

Voltmetrul	Intervalul de măsurare, U_n [V]	Clasa de precizie
1	250	1
2	100	1,5
3	150	1,5

Tabelul 1.2.2

Ampermetrul	Intervalul de măsurare, I_n [A]	Clasa de precizie
1	0,5	1,5
2	1	1
3	1,5	1

Soluție. Puterea consumatorului se măsoară indirect, relația (1.6) avînd forma:

$$P = UI,$$

în care tensiunea U se măsoară cu voltmetrul, iar curentul I, ce trece prin consumator, cu ampermetrul. Voltmetrul 2 nu se poate utiliza deoarece intervalul său de măsurare este mai mic decît tensiunea U. Dintr-un motiv similar nu se poate folosi nici ampermetrul 1, curentul ce trece prin consumator, fiind:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{120}{160} = 0{,}75\ \text{A}.$$

Pe baza relației (1.7), eroarea relativă procentuală limită aferentă măsurării indirecte a puterii este:

$$E_{r\,\lim P} = E_{r\,\lim U} + E_{r\,\lim I},$$

în care, conform relației (1.5),

$$E_{r\,\lim U_1} = (\pm 1) \cdot \frac{U_{n1}}{U} = (\pm 1) \cdot \frac{250}{120} = \pm 2{,}08\%,$$

$$E_{r\,\lim U_3} = (\pm 1{,}5) \cdot \frac{U_{n3}}{U} = (\pm 1{,}5) \cdot \frac{150}{120} = \pm 1{,}87\%,$$

$$E_{r\,\lim I_2} = (\pm 1) \cdot \frac{I_{n2}}{I} = (\pm 1) \cdot \frac{1}{0{,}75} = \pm 1{,}33\%$$

și

$$E_{r\,lim\,I_3}=(\pm1)\cdot\frac{I_{n3}}{I}=(\pm1)\cdot\frac{1,5}{0,75}=\pm2,00\%.$$

În cazul cel mai favorabil

$$E_{r\,lim\,P}=E_{r\,lim\,U_3}+E_{r\,lim\,I_2}=(\pm1,87)+(\pm1,33)=\pm3,20\%.$$

Se aleg prin urmare voltmetrul 3 și ampermetrul 2.

Problema 1.2.3. Cu ajutorul voltmetrului și ampermetrului se măsoară în curent continuu o rezistență R de aproximativ 75 Ω și puterea P consumată în ea. Aparatele feromagnetice disponibile au următoarele caracteristici:

voltmetrul: intervalul de măsurare 150 V, scara 150 diviziuni, numărul de ohmi pe volt 33,33 Ω/V și clasa de precizie 0,5;

ampermetrul: intervalul de măsurare 2,5 A, scara 100 diviziuni, rezistența interioară R_a=0,55 Ω și clasa de precizie 0,5.

Rezistențele interioare ale aparatelor se cunosc cu eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,lim\,Rv}=E_{r\,lim\,Ra}=\pm1\%$.

1. Să se aleagă schema, care asigură măsurarea rezistenței R cu eroarea sistematică de metodă minimă.

2. Să se indice rezultatul măsurării, dacă în cadrul schemei alese la punctul 1 voltmetrul a indicat 129 diviziuni, iar ampermetrul 68,8 diviziuni.

3. Să se calculeze eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,lim\,R}$ de măsurare a rezistenței R.

4. Să se repete punctele 1, 2 și 3 pentru măsurarea puterii P, considerînd că în cadrul schemei alese pentru măsurarea ei, indicațiile aparatelor au fost cele de la punctul 2.

Soluție. 1. Cele două scheme utilizabile s-au redat în fig. 1.2.2. Rezistența voltmetrului este:

$$R_v=33,33\cdot150=5\,000\ \Omega.$$

Eroarea relativă procentuală sistematică de măsurare a rezistenței R aferentă schemei din fig. 1.2.2.1 este:

$$E_{rs\,R1}=\frac{100\,R_a}{R}=\frac{100\cdot0,55}{75}=0,73\%,$$

iar cea aferentă schemei din fig. 1.2.2.2.

$$E_{rs\,R2}=-\frac{100\,R}{R+R_v}=-\frac{100\cdot75}{75+5\,000}=-1,48\%.$$

Se alege schema din fig. 1.2.2.1.

2. Cele două aparate au măsurat mărimile

$$U=\frac{150}{150}\cdot129=129\ \text{V}$$

și

$$I=\frac{2,5}{100}\cdot68,8=1,72\ \text{A}.$$

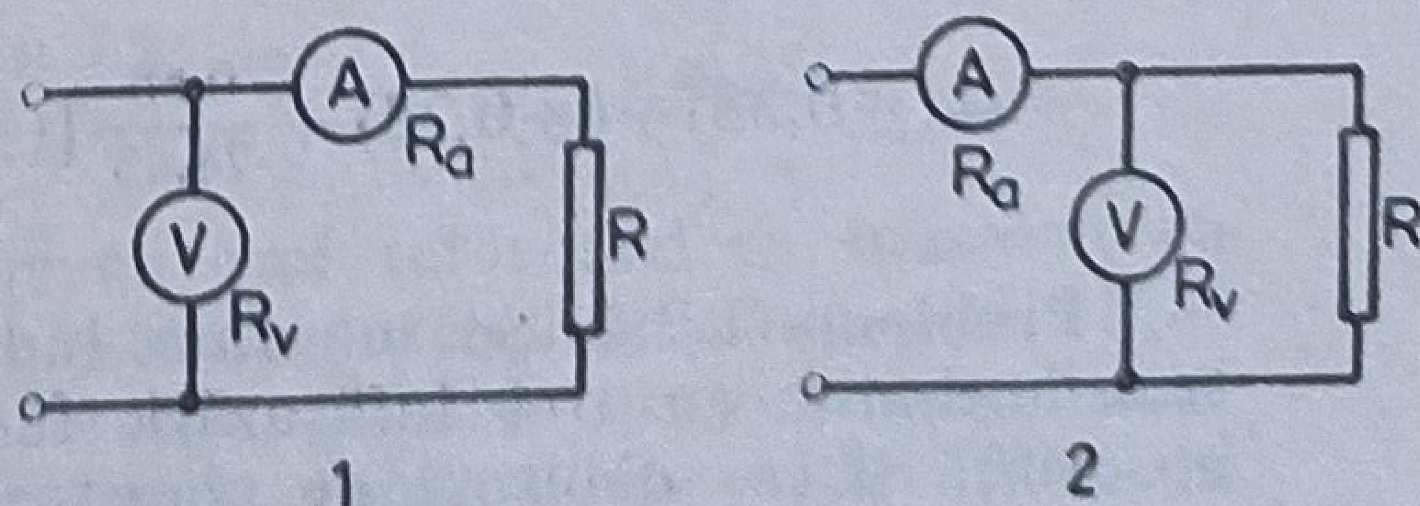


Fig. 1.2.2.

Pentru schema din fig. 1.2.2.1 rezistența R se determină cu relația

$$R=\frac{U}{I}-R_a=\frac{129}{1,72}-0,55=74,45\ \Omega.$$

3. Conform relației (1.7), eroarea relativă procentuală limită la măsurarea indirectă a rezistenței R este :

$$E_{r\lim R}=\left(1+\frac{R_a}{R}\right)(E_{r\lim U}+E_{r\lim I})+\frac{R_a}{R}E_{r\lim Ra},$$

unde $E_{r\lim U}$ și $E_{r\lim I}$ sînt erorile relative procentuale limită de măsurare a tensiunii U și a curentului I. Pe baza relației (1.5)

$$E_{r\lim U}=(\pm 0,5)\cdot\frac{150}{129}=\pm 0,58\%$$

și

$$E_{r\lim I}=(\pm 0,5)\cdot\frac{2,5}{1,72}=\pm 0,73\%.$$

Înlocuind rezultă :

$$E_{r\lim R}=\left(1+\frac{0,55}{74,45}\right)[(\pm 0,58)+(\pm 0,73)]+\frac{0,55}{74,45}(\pm 1)=\pm 1,33\%$$

4. Eroarea relativă procentuală sistematică de măsurare a puterii P este pentru schema din fig. 1.2.2.1

$$E_{rsP_1}=\frac{100\ R_a}{R}=\frac{100\cdot 0,55}{74,45}=0,74\%,$$

iar pentru schema din fig. 1.2.2.2

$$E_{rsP_2}=\frac{100\ R}{R_v}=\frac{100\cdot 74,45}{5\ 000}=1,49\%.$$

Pentru măsurarea puterii P consumată în rezistența R se alege tot schema din fig. 1.2.2.1. Puterea P se determină din

$$P=UI-I^2R_a=129\cdot 1,72-1,72^2\cdot 0,55=220,25\ \text{W}.$$

Conform relației (1.7) eroarea relativă procentuală limită de măsurare a puterii P este :

$$E_{r\lim P}=E_{r\lim U}+E_{r\lim I}+\frac{R_a}{R}(E_{r\lim U}-E_{r\lim I}+E_{r\lim Ra})=$$

$$=(\pm 0,58)+(\pm 0,73)+\frac{0,55}{74,45}[(\pm 0,58)-(\pm 0,73)+(\pm 1)]=\pm 1,33\%.$$

Problema 1.2.4. Se măsoară indirect pierderile de putere activă într-un transformator cu trei înfășurări, făcîndu-se diferența dintre puterea activă absorbită și cea debitată de transformator. Aceste puteri se măsoară cu erori relative procentuale limită cunoscute.

Să se determine eroarea relativă procentuală limită la măsurarea indirectă a pierderilor de putere activă în transformator în două ipoteze:

1. Puterea activă este absorbită de două înfășurări și debitată prin cea de a treia;

2. Puterea activă este absorbită de o înfășurare și debitată prin celelalte două.

Soluție. Fie E_{rlim1}, E_{rlim2} și E_{rlim3} erorile relative procentuale limită de măsurare ale puterilor active P_1, P_2 și P_3 corespunzătoare celor trei înfășurări ale transformatorului.

1. Pierderile de putere activă se determină cu relația:

$$p = P_1 + P_2 - P_3.$$

Pe baza relației (1.7) rezultă că eroarea relativă procentuală limită la măsurarea indirectă a pierderilor de putere activă este:

$$E_{rlimp} = \frac{P_1 E_{rlim1} + P_2 E_{rlim2} + P_3 E_{rlim3}}{p}.$$

2. Pierderile de putere activă se determină cu relația

$$p = P_1 - P_2 - P_3,$$

iar eroarea relativă procentuală limită la măsurarea indirectă a pierderilor de putere activă este din nou

$$E_{rlimp} = \frac{P_1 E_{rlim1} + P_2 E_{rlim2} + P_3 E_{rlim3}}{p}.$$

Într-un transformator pierderile de putere activă p sînt mici în comparație cu puterile absorbite și debitate, astfel încît eroarea relativă procentuală limită E_{rlimp} rezultă foarte mare. Prin urmare nu se recomandă măsurarea indirectă a pierderilor de putere activă într-un transformator.

Problema 1.2.5. Un transformator cu trei înfășurări absoarbe puterea activă $P_1 = 37{,}2$ MW și debitează puterile active $P_2 = 10{,}9$ MW și $P_3 = 25$ MW. Aceste puteri s-au măsurat cu erorile relative procentuale limită $E_{rlim1} = \pm 1{,}7\%$, $E_{rlim2} = \pm 2{,}3\%$ și $E_{rlim3} = \pm 2{,}1\%$.

1. Să se stabilească pierderile de putere activă p în transformator.

2. Să se precizeze eroarea relativă procentuală limită E_{rlimp} cu care s-au stabilit pierderile de putere activă p în transformator.

Soluție. Pe baza soluției problemei 1.2.4 rezultă

1. $$p = 37{,}2 - 10{,}9 - 25 = 1{,}3 \text{ MW}.$$

2. $$E_{rlimp} = \frac{37{,}2\,(\pm 1{,}7) + 10{,}9\,(\pm 2{,}3) + 25\,(\pm 2{,}1)}{1{,}3} = \pm 108{,}3\%.$$

Problema 1.2.6. La un transformator cu trei înfășurări se măsoară cu eroarea relativă procentuală limită $E_{rlim1} = \pm 2{,}5\%$ puterea activă $P_1 = 15{,}9$ MW absorbită de una din înfășurări și cu erorile relative procentuale limită $E_{rlim2} = \pm 2{,}8\%$ și $E_{rlim3} = \pm 3{,}1\%$ puterile active $P_2 = 12{,}3$ MW și $P_3 = 3{,}6$ MW debitate de celelalte două înfășurări. Ținîndu-se seama de erorile

de măsurare, să se precizeze limitele între care se află pierderile de putere activă p în transformator.

Soluție. Conform relației (1.2) rezultă că puterile active P_1, P_2 și P_3 s-au măsurat cu erorile absolute limită.

$$E_{lim1} = \frac{15,9 \cdot (\pm 2,5)}{100} = \pm 0,4 \text{ MW},$$

$$E_{lim2} = \frac{12,3 \cdot (\pm 2,8)}{100} = \pm 0,34 \text{ MW},$$

$$E_{lim3} = \frac{3,6 \cdot (\pm 3,1)}{100} = \pm 0,11 \text{ MW}.$$

Prin urmare, conform relației (1.1) puterile active sînt cuprinse între limitele :

$$15,5 \text{ MW} \leqslant P_1 \leqslant 16,3 \text{ MW},$$

$$11,96 \text{ MW} \leqslant P_2 \leqslant 12,64 \text{ MW},$$

$$3,49 \text{ MW} \leqslant P_3 \leqslant 3,71 \text{ MW},$$

astfel încît pierderile de putere activă din transformator sînt cuprinse între limitele

$$P_{1min} - P_{2max} - P_{3max} \leqslant p \leqslant P_{1max} - P_{2min} - P_{3min}$$

$$15,5 - 12,64 - 3,71 \leqslant p \leqslant 16,3 - 11,96 - 3,49$$

$$-0,85 \text{ MW} \leqslant p \leqslant 0,85 \text{ MW}.$$

Pierderile de putere activă fiind în mod sigur pozitive, se poate afirma că ele sînt cel mult 0,85 MW.

Problema 1.2.7. Într-o centrală electrică se măsoară cu erorile relative procentuale limită E'_{rlimk} energiile W'_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ produse într-un interval de timp de cele m generatoare și cu erorile relative procentuale limită E''_{rliml} energiile W''_l $(l=1, 2, \ldots, n)$ livrate în același timp celor n consumatori. Neglijîndu-se pierderile de energie ce au loc în instalația de distribuție, să se determine abaterea relativă procentuală limită, ce poate apare între energiile totale

$$W' = \sum_{k=1}^{m} W'_k \quad \text{și} \quad W'' = \sum_{l=1}^{n} W''_l.$$

Să se cerceteze cazul particular $E'_{rlimk} = E''_{rliml} = E_{rlim}$ $(k=1, 2, \ldots m;$ $l=1, 2, \ldots, n)$.

Soluție. Conform legii conservării energiei

$$W' = W''.$$

Energiile W' și W'' se măsoară indirect, erorile relative procentuale limită fiind :

$$E'_{rlim} = \frac{\sum_{k=1}^{m} W'_k E'_{rlimk}}{\sum_{k=1}^{m} W_k} \quad \text{și} \quad E''_{rlim} = \frac{\sum_{l=1}^{n} W''_l E''_{rliml}}{\sum_{l=1}^{m} W''_l}.$$

între rezultatul măsurării energiei produse și rezultatul măsurării energiei consumate apare abaterea relativă procentuală limită $E'_{r\,lim}+E''_{r\,lim}$. În cazul particular menționat $E'_{r\,lim}=E''_{r\,lim}=E_{r\,lim}$, astfel încît abaterea relativă procentuală limită este $2E_{r\,lim}$.

1.3. CALCULUL ERORILOR ȘIRURILOR DE REZULTATE ALE MĂSURĂRILOR REPETATE

La măsurările repetate efectuate, în condiții practic identice, asupra aceleiași mărimi se obține un șir de rezultate. Din aceste rezultate se elimină erorile sistematice și apoi se prelucrează rezultatele astfel corectate în vederea stabilirii erorilor aleatoare și a erorilor grosolane. Modul în care se stabilesc și se exprimă rezultatele măsurărilor repetate se prezintă amănunțit în problemele care urmează.

Problema 1.3.1. În condiții practic identice s-au efectuat $n=24$ măsurări asupra rezistenței electrice a unui rezistor. S-a utilizat în acest scop o punte simplă despre care se cunoaște că prezintă o eroare sistematică constantă egală cu $\varepsilon=0{,}02\ \Omega$. Rezultatele brute ale măsurărilor individuale s-au redat în tabelul 1.3.1. Se cere să se determine incertitudinea măsurării pentru nivelele de încredere $P^*=95\%$ și $P^*=99{,}73\%$ și să se exprime rezultatele corectate și creditate ale măsurării.

Tabelul 1.3.1

Numărul măsurării, i	Valoarea măsurată, x_i [Ω]	Numărul măsurării, i	Valoarea măsurată, x_i [Ω]
1	146,08	13	146,09
2	146,02	14	146,01
3	145,85	15	145,95
4	146,14	16	146,22
5	145,96	17	146,13
6	145,90	18	145,95
7	146,35	19	146,15
8	146,01	20	145,84
9	146,14	21	146,21
10	145,80	22	146,13
11	146,03	23	145,92
12	146,07	24	146,25

Soluție. Valoarea medie aritmetică a rezultatelor șirului de măsurări este

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=146{,}05\ \Omega.$$

Valoarea de mai sus constituie rezultatul brut al seriei de măsurări. Întrucît eroarea sistematică este constantă, rezultatul corectat se obține aplicînd corecția corespunzătoare valorii medii aritmetice și nu rezultatelor individuale brute. Totodată și eroarea medie patratică a unei măsurări din șirul de măsurări se calculează pe baza rezultatelor individuale brute, deplasarea sistematică a centrului de grupare nemodificînd măsurile de dispersie ale repartiției statistice. Eroarea medie patratică este deci :

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}=0,14\ \Omega.$$

Incertitudinea sau eroarea limită a mediei aritmetice este dată de relația :

$$\Delta_{\bar{x}}=\pm\frac{t}{\sqrt{n}}\,s,$$

unde t este coeficientul de amplificare, ce depinde de repartiția erorilor aleatoare, de numărul n al măsurărilor și de nivelul de încredere P^* adoptat. Conform standardelor, pentru o repartiție normală a erorilor aleatoare cu $n=24$, la $P^*=95\%$ corespunde $t=2,08$, iar la $P^*=99,73\%$ corespunde $t=3,36$. Prin urmare la $P^*=95\%$ rezultă :

$$\Delta_{\bar{x}}=\pm\frac{2,08}{\sqrt{24}}\cdot 0,14=\pm 0,06\ \Omega,$$

iar la $P^*=99,73\%$,

$$\Delta_{\bar{x}}=\pm\frac{3,36}{\sqrt{24}}\cdot 0,14=\pm 0,10\ \Omega.$$

Rezultatul corectat și creditat al măsurării este

$$\overline{X}'=\overline{X}+C+\Delta_{\bar{x}},$$

în care C este corecția, egală cu eroarea sistematică ε considerată cu semn schimbat. Pentru cele două nivele de încredere considerate se obțin următoarele rezultate corectate și creditate :

$$\overline{X}'_{95}=146,05-0,02\pm 0,06=(146,03\pm 0,06)\ \Omega,$$

$$\overline{X}'_{99,73}=146,05-0,02\pm 0,10=(146,03\pm 0,10)\ \Omega.$$

Limitele de încredere ale celor două rezultate sînt :

$$X_{max95}=146,09\ \Omega \quad \text{și} \quad X_{min95}=145,97\ \Omega,$$

$$X_{max99,73}=146,13\ \Omega \quad \text{și} \quad X_{min99,73}=145,93\ \Omega.$$

Problema 1.3.2. Cu un compensator s-au efectuat, în condiții practic identice, $n=30$ măsurări asupra unei tensiuni continue, obținîndu-se valoarea medie aritmetică $\overline{X}=6,274$ V și o eroare medie patratică $s_1=0,024$ V.

Din analiza teoretică și experimentală a erorilor compensatorului de tensiune continuă a reieșit că rezultatele brute ale măsurărilor individuale au fost afectate de eroarea sistematică determinabilă $\varepsilon'=-0,014$ V și de o eroare

sistematică nedeterminabilă, a cărei valoare s-a putut evalua ca fiind egală cu $\varepsilon''=\pm 0,006$ V. Se cere să se determine incertitudinea măsurării pentru un nivel de încredere $P^*=99,73\%$ și să se exprime rezultatul corectat și creditat al măsurării.

Soluție. În situația în care eroarea sistematică nedeterminabilă evaluată aproximativ este mică în raport cu erorile aleatorii, ea se tratează ca eroare aleatoare. În această ipoteză, eroarea medie patratică se determină ca:

$$s=\sqrt{s_1^2+\varepsilon''^2}=0,025 \text{ V}.$$

Conform standardelor, în cazul unei repartiții statistice normale a erorilor aleatoare cu $n=30$ și $P^*=99,73\%$, valoarea coeficientului de amplificare este $t=3,3$. Prin urmare incertitudinea măsurării este:

$$\Delta_{\bar{x}}=\pm\frac{t}{\sqrt{n}}s=\pm 0,015 \text{ V}.$$

Ținînd seama de faptul că corecția C este egală cu eroarea sistematică ε' considerată cu semn schimbat, rezultatul corectat și creditat al măsurării este

$$\overline{X}_{99,73}=\overline{X}+C\pm\Delta_{\bar{x}}=6,274+0,014\pm 0,015=(6,288\pm 0,015) \text{ V}.$$

1.4. BIBLIOGRAFIE PENTRU CAPITOLUL 1

— **Pentru întregul capitol:**

Manolescu, P. *Măsurări electrice industriale*, vol. I, cap. 1 și 10. Editura tehnică, București, 1966.

Pop, E., Chivu, M. *Măsuri electrice și magnetice*, vol. I, cap. 4. Institutul politehnic, Timișoara, 1969.

STAS 2872-74. *Erori de măsurare.*

Tiron, M. *Teoria erorilor de măsurare și metoda celor mai mici pătrate.* Editura tehnică, București, 1972.

— **Pentru anumite probleme:**

1.1.3. STAS 4640/1-71, STAS 4640/2,3,4-74. *Aparate de măsură electrice indicatoare și accesoriile lor.*

1.1.4. D.G.M.S.I. *Instrucțiuni 145-66 pentru verificarea ampermetrelor.* Editura de stat pentru imprimate și publicații, București, 1967.

1.1.6. STAS 10059-75. *Aparate electronice de măsurat.*

1.1.7. STAS 4198/1, 2, 3-68. *Contoare electrice de curent alternativ pentru energie activă și reactivă.*

CAPITOLUL 2

MĂSURAREA CURENTULUI, TENSIUNII ŞI SARCINII ELECTRICE

2.1. AMPERMETRE ŞI VOLTMETRE

Ampermetrele sînt aparate de măsură cu citire directă destinate măsurării curentului electric, iar voltmetrele cele destinate măsurării tensiunii electrice. După modul de prezentare a rezultatelor măsurării se disting ampermetre şi voltmetre analogice şi ampermetre şi voltmetre numerice.

Ampermetrele analogice se compun din dispozitive de măsură (magnetoelectrice, feromagnetice, electrodinamice), cărora li se ataşează – după caz – dispozitive sau aparate pentru lărgirea intervalului de măsurare (şunturi, transformatoare de curent, amplificatoare de măsură) şi dispozitive sau aparate pentru convertirea curentului alternativ în curent continuu (redresoare necomandate, redresoare comandate, convertoare termoelectrice).

Voltmetrele analogice se compun din dispozitive de măsură (magnetoelectrice, feromagnetice, electrodinamice, electrostatice), cărora li se ataşează – după împrejurări – dispozitive sau aparate pentru lărgirea intervalului de măsurare (rezistoare adiţionale, divizoare de tensiune rezistive, divizoare de tensiune capacitive, transformatoare de tensiune, amplificatoare de măsură) şi dispozitive sau aparate pentru convertirea tensiunii alternative în tensiune continuă (redresoare necomandate, redresoare comandate, convertoare termoelectrice).

Ampermetrele şi voltmetrele numerice se compun din numărătoare în codul – de obicei – zecimal şi dispozitive pentru convertirea analog-numerică, cărora li se ataşează – după împrejurări – dispozitive sau aparate pentru lărgirea intervalului de măsurare (şunturi, divizoare de tensiune, transformatoare de măsură, amplificatoare de măsură) şi dispozitive sau aparate pentru convertirea mărimii alternative în mărime continuă (redresoare necomandate, redresoare comandate, convertoare termoelectrice).

Din punctul de vedere al preciziei lor, ampermetrele şi voltmetrele se caracterizează prin clasa de precizie. Acesteia îi corespunde în condiţii de referinţă stabilite prin specificaţii eroarea de bază, care este o eroare rapor-

tată procentuală limită. La modificarea oricărei mărimi de influenţă (de ex., a temperaturii mediului în care are loc măsurarea), apar erori suplimentare, ce se adaugă la eroarea de bază. În cazul măsurărilor efectuate cu ampermetre şi voltmetre numerice, pe lîngă eroarea de bază şi eventualele erori suplimentare, rezultatele sînt afectate şi de eroarea de cuantificare.

Alte erori de măsurare se datoresc consumului, construirii necorespunzătoare sau utilizării incorecte ale ampermetrelor şi voltmetrelor etc.

Problema 2.1.1. Un ampermetru magnetoelectric are intervalul de măsurare $I_a=1$ mA şi rezistenţa interioară $R_a=300\ \Omega$.

1. Să se calculeze şuntul pentru lărgirea intervalului de măsurare la $I=$ $=150$ A.

2. Să se afle consumul ampermetrului fără şunt şi cu şunt.

3. Ştiind că înfăşurarea ampermetrului este din cupru, iar şuntul din manganină, să se determine eroarea relativă procentuală $E_{r\tau}$, care apare la creşterea temperaturii cu 1 °C faţă de condiţia de referinţă.

Soluţie. 1. Raportul de şuntare fiind

$$n=\frac{I}{I_a}=\frac{150}{0,001}=1,5\cdot 10^5,$$

rezistenţa şuntului este

$$R_s=\frac{R_a}{n-1}=\frac{300}{1,5\cdot 10^5-1}\approx 2\cdot 10^{-3}\ \Omega.$$

2. Consumul ampermetrului fără şunt este :

$$P_a=I_a^2R_a=0,001^2\cdot 300=3\cdot 10^{-4}\ \text{W},$$

iar cu şunt

$$P=I^2\frac{R_aR_s}{R_a+R_s}=150^2\cdot\frac{300\cdot 2\cdot 10^{-3}}{300+2\cdot 10^{-3}}=45\ \text{W}.$$

Prin şuntare consumul ampermetrului creşte apreciabil.

3. Coeficientul de variaţie cu temperatura a rezistivităţii cuprului este $\beta_{Cu}=4,28\cdot 10^{-3}$ 1/°C, pe cînd cel al rezistivităţii manganinei este neglijabil. La creşterea temperaturii cu 1 °C rezistenţa R_a a înfăşurării ampermetrului creşte cu $\beta_{Cu}R_a$, în timp ce rezistenţa R_s a şuntului rămîne practic neschimbată. Prin urmare raportul de şuntare se modifică, provocînd o eroare de măsurare a cărei valoare relativă procentuală este :

$$E_{r\tau}=-\frac{100\,\beta_{Cu}R_a}{R_a+\beta_{Cu}R_a+R_s}=-\frac{100\cdot 4,28\cdot 10^{-3}\cdot 300}{300+4,28\cdot 10^{-3}\cdot 300+2\cdot 10^{-3}}=-0,426\%.$$

Problema 2.1.2. Un ampermetru magnetoelectric cu clasa de precizie 1,5 are intervalul de măsurare $I_a=5$ mA şi rezistenţa interioară (din cupru) $R_a=100\ \Omega$. Să se calculeze rezistorul R şi şuntul R_s (ambele din manganină (fig. 2.1.1) pentru lărgirea intervalului de măsurare la $I=10$ A în aşa fel încît eroarea suplimentară datorită modificării temperaturii să nu depăşească limitele admise de standarde.

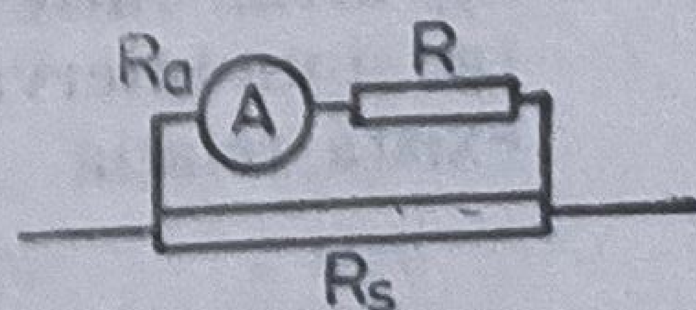


Fig. 2.1.1.

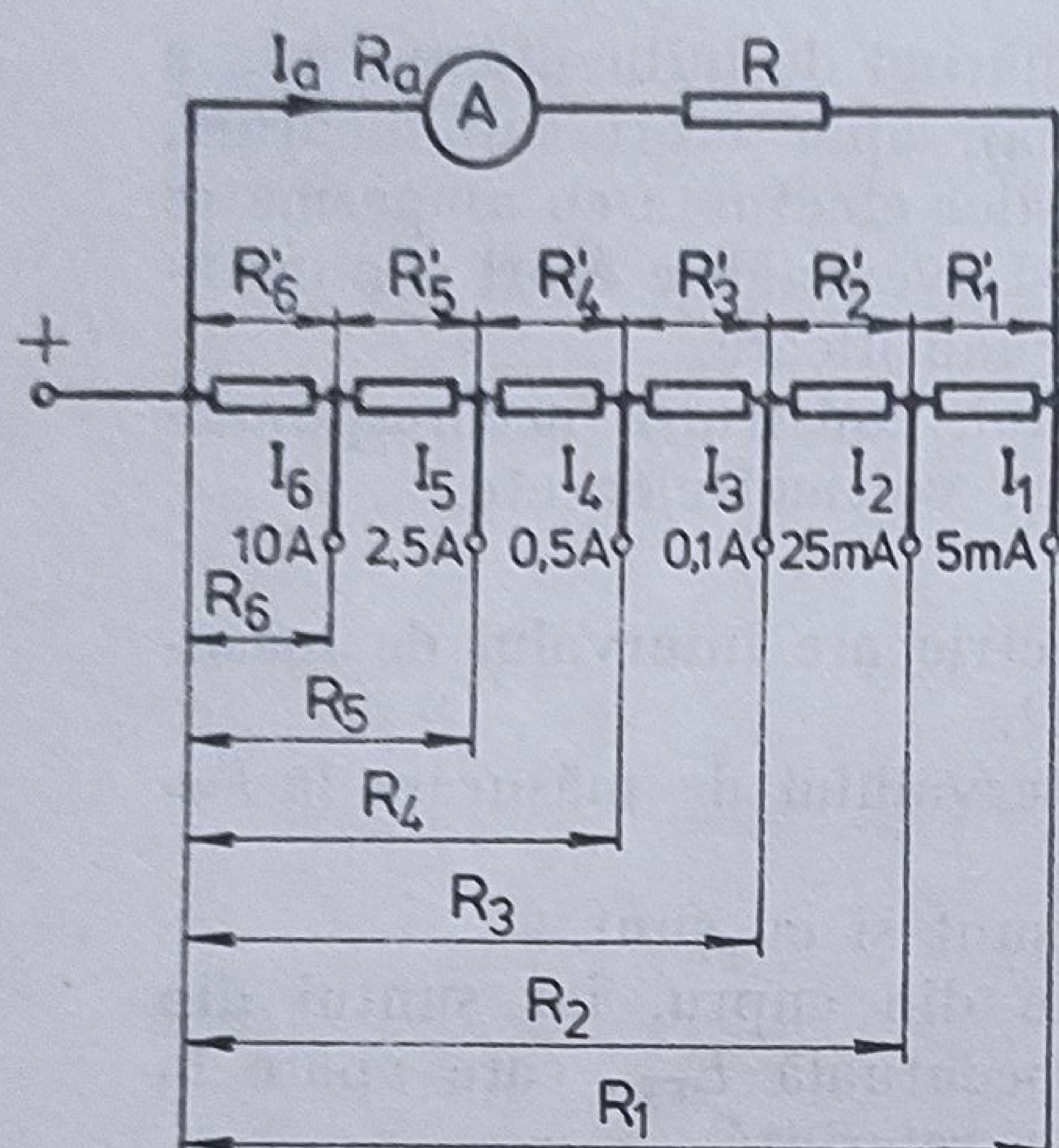


Fig. 2.1.2.

Soluţie. Raportul de şuntare este

$$n = \frac{I}{I_a} = \frac{R_a + R + R_s}{R_s}.$$

Prin înlocuire se obţine

$$\frac{100 + R + R_s}{R_s} = \frac{10}{0{,}005} = 2\,000.$$

La modificarea temperaturii cu $\pm 10\ ^\circ C$ rezistenţa interioară a ampermetrului se schimbă cu $\pm 10\,\beta_{Cu} R_a$, în care $\beta_{Cu} = 4{,}28 \cdot 10^{-3}\ 1/^\circ C$ reprezintă coeficientul de variaţie cu temperatura a rezistivităţii cuprului; rezistoarele R şi R_s, fiind din manganină, nu depind practic de temperatură. Aceasta are ca urmare schimbarea raportului de şuntare şi apariţia unei erori suplimentare datorită modificării temperaturii. Conform standardelor, la ampermetre cu clasa de precizie 1,5 valoarea relativă procentuală a acestei erori nu trebuie să depăşească $\pm 1{,}5\%$, adică:

$$|E_{r\tau}| = \left| - \frac{100 \cdot (\pm 10)\,\beta_{Cu} R_a}{R_a + (\pm 10)\,\beta_{Cu} R_a + R + R_s} \right| \leqslant 1{,}5.$$

Prin înlocuire rezultă:

$$\left| - \frac{100 \cdot (\pm 10) \cdot 4{,}28 \cdot 10^{-3} \cdot 100}{100 + (\pm 10) \cdot 4{,}28 \cdot 10^{-3} \cdot 100 + R + R_s} \right| \leqslant 1{,}5.$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii se ajunge la $R_s \geqslant 0{,}145\ \Omega$ şi $R = 1\,999\ R_a - 100 \geqslant 185{,}19\ \Omega$.

Problema 2.1.3. Un aparat magnetoelectric are rezistenţa înfăşurării din cupru $R_a = 45\ \Omega$, iar curentul corespunzător deviaţiei maxime $I_a = 0{,}5$ mA. Pentru micşorarea erorilor suplimentare datorită modificării temperaturii în serie cu dispozitivul de măsură se leagă un rezistor de manganină, avînd rezistenţa $R = 405\ \Omega$.

1. Să se calculeze pentru aparatul magnetoelectric şuntul multiplu care lărgeşte intervalul de măsurare la următoarele valori: (0,005; 0,025; 0,1; 0,5; 2,5; 10) A.

2. Să se compare consumul aparatului şuntat cu şuntul multiplu cu consumul aceluiaşi aparat şuntat cu şunturi simple ce realizează, pe rînd, intervalele de măsurare impuse.

Soluţie. 1. Schema şuntului multiplu, care se calculează, este dată în fig. 2.1.2. Între curentul I_a corespunzător deviaţiei maxime a aparatului neşuntat şi un interval de măsurare oarecare I_k al aparatului şuntat cu şunt multiplu, există relaţia

$$I_k = I_a \frac{R_a + R + R_1}{R_k}.$$

Pentru $k=1$ se obține :

$$I_1 = I_a \frac{R_a+R+R_1}{R_1},$$

de unde

$$R_1 = \frac{R_a+R}{\frac{I_1}{I_a}-1} = \frac{45+405}{\frac{0,005}{0,5\cdot 10^{-3}}-1} = 50\ \Omega.$$

În continuare,

$$R_k = R_1 \frac{I_1}{I_k}.$$

Valorile rezistențelor șuntului multiplu corespunzătoare lui $k=1, 2, \ldots, 6$ sînt trecute în tabelul 2.1.1.

Tabelul 2.1.1

k		1	2	3	4	5	6
R_k	[Ω]	50	10	2,5	0,5	0,1	0,025
R'_k	[Ω]	40	7,5	2	0,4	0,075	0,025

În același tabel s-au redat și rezistențele porțiunilor de șunt multiplu calculate cu relația :

$$R'_k = R_k - R_{k+1}.$$

2. Consumul aparatului șuntat cu șunt multiplu este :

$$P_{mk} = I_k^2 \frac{R_k(R_a+R+R_1-R_k)}{R_a+R+R_1} = I_a(I_k-I_a)(R_a+R+R_1).$$

Consumul aceluiași aparat șuntat cu un șunt simplu este :

$$P_{sk} = I_k^2 \frac{R_{sk}(R_a+R)}{R_{sk}+R_a+R} = I_a I_k (R_a+R),$$

unde cu R_{sk} s-a notat rezistența șuntului simplu. Rezultatele sînt redate în tabelul 2.1.2. Cu toate că determină un consum mai ridicat, șuntul multiplu se preferă celui simplu în cazurile în care este necesară obținerea prin comutare a mai multor intervale de măsurare.

Tabelul 2.1.2

k		1	2	3	4	5	6
P_{mk}	[W]	0,0011	0,0061	0,0249	0,1249	0,6249	2 4999
P_{sk}	[W]	0,0011	0,0056	0,0225	0,1125	0,5625	2,2500

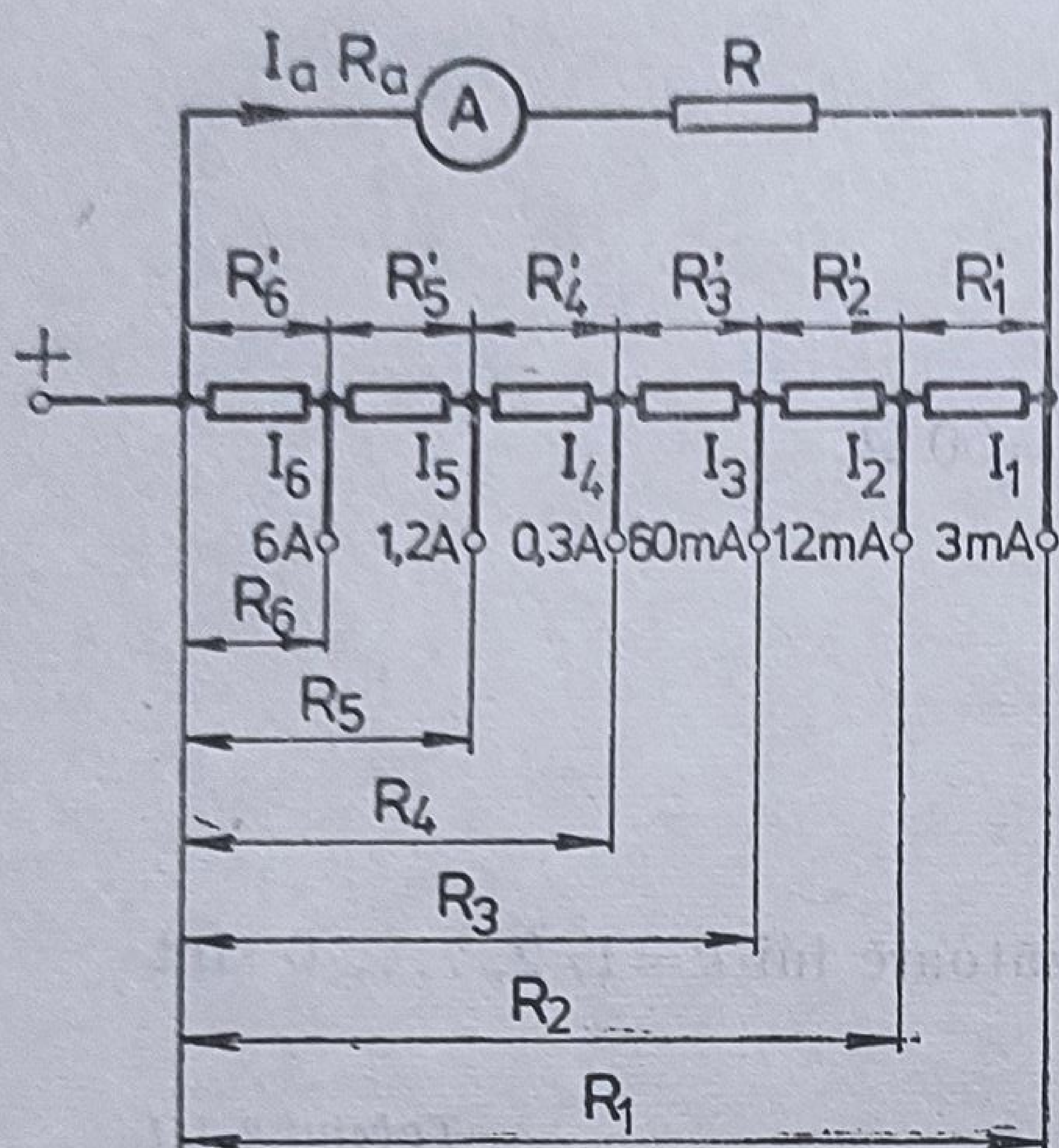


Fig. 2.1.3.

Problema 2.1.4. La ampermetrul, avînd schema și intervalele de măsurare indicate în fig. 2.1.3, s-a constatat că rezistorul R'_2 al șuntului multiplu este deteriorat. Măsurîndu-se rezistența R_3 a șuntului multiplu s-a obținut valoarea 15,75 Ω. Să se calculeze lungimea l a sîrmei de manganină cu diametrul d=0,15 mm și rezistivitatea ρ=0,42 Ω mm²/m, ce trebuie utilizată pentru înlocuirea rezistorului deteriorat.

Soluție. Între curentul I_a corespunzător deviației maxime a dispozitivului de măsură nesuntat și un interval de măsurare oarecare I_k al dispozitivului de măsură șuntat există relația :

$$I_k = I_a \frac{R_a + R + R_1}{R_k},$$

notațiile corespunzînd celor din fig. 2.1.3. Pentru $k=2$

$$I_2 = I_a \frac{R_a + R + R_1}{R_2},$$

iar pentru $k=3$,

$$I_3 = I_C \frac{R_a + R + R_1}{R_3}.$$

Din aceste relații se obține :

$$R'_2 = R_2 - R_3 = R_3 \frac{I_3 - I_2}{I_2}.$$

Înlocuind, rezultă :

$$R'_2 = 15{,}75 \frac{0{,}06 - 0{,}012}{0{,}012} = 63\ \Omega.$$

Lungimea sîrmei de manganină este deci :

$$l = \frac{R'_2 \pi \frac{d^2}{4}}{\rho} = \frac{63 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{0{,}15^2}{4}}{0{,}42} = 2{,}649\ \text{m}.$$

Problema 2.1.5. Un voltmetru magnetoelectric are intervalul de măsurare U_v=0,3 V și rezistența interioară R_v=300 Ω.

1. Să se determine rezistența rezistorului adițional pentru lărgirea intervalului de măsurare la U=300 V.

2. Să se afle consumul voltmetrului fără rezistor adițional și cu rezistor adițional.

3. Știind că înfășurarea voltmetrului este din cupru, iar rezistorul adițional din manganină, să se determine eroarea suplimentară relativă procentuală care apare la creșterea temperaturii cu 1 °C față de condiția de referință pentru voltmetrul fără rezistor adițional și cu rezistor adițional.

Soluție. 1. Raportul de lărgire a intervalului de măsurare este:

$$m=\frac{U}{U_v}=\frac{300}{0,3}=1\,000,$$

iar rezistența rezistorului adițional are valoarea

$$R_{ad}=R_v\,(m-1)=300\,(1\,000-1)=299\,700\ \Omega.$$

2. Consumul voltmetrului fără rezistor adițional este:

$$P_v=\frac{U_v^2}{R_v}=\frac{0,3^2}{300}=3\cdot10^{-4}\ \mathrm{W},$$

iar al voltmetrului cu rezistor adițional,

$$P=\frac{U^2}{R_v+R_{ad}}=\frac{300^2}{300+299\,700}=0,3\ \mathrm{W}.$$

3. La creșterea temperaturii cu 1 °C rezistența interioară a voltmetrului crește cu $\beta_{Cu}R_v$, în care $\beta_{Cu}=4,28\cdot10^{-3}$ 1/°C reprezintă coeficientul de variație cu temperatura a rezistivității cuprului. Înseamnă că la o aceeași tensiune indicația voltmetrului scade. Eroarea suplimentară relativă procentuală, care apare, are valoarea:

$$E_{rv}=-\frac{100\,\beta_{Cu}R_v}{R_v+\beta_{Cu}R_v}=-\frac{100\cdot4,28\cdot10^{-3}\cdot300}{300+4,28\cdot10^{-3}\cdot300}=-0,426\%.$$

La voltmetrul cu rezistor adițional eroarea suplimentară relativă procentuală e mai mică deoarece rezistivitatea manganinei nu depinde practic de temperatură. Prin urmare:

$$E_{rad}=-\frac{100\,\beta_{Cu}R_v}{R_v+\beta_{Cu}R_v+R_{ad}}=-\frac{100\cdot4,28\cdot10^{-3}\cdot300}{300+4,28\cdot10^{-3}\cdot300+299\,700}=-4,28\cdot10^{-4}\%.$$

Această eroare este practic neglijabilă.

Problema 2.1.6. Un ampermetru magnetoelectric cu redresor, avînd intervalul de măsurare 1,5 A și clasa de precizie 1,5 indică 1,28 A sub acțiunea unui curent alternativ nesinusoidal. Să se determine valoarea medie pe o semiperioadă a curentului alternativ nesinusoidal și eroarea sa relativă procentuală limită de măsurare, știind că redresorul redresează ambele alternanțe, iar caracteristica lui este ideală și independentă de frecvență.

Soluție. Echipajul mobil al ampermetrului magnetoelectric cu redresor deviază sub acțiunea valorii medii pe o perioadă a curentului pulsatoriu obținut prin redresarea curentului alternativ. Valoarea medie pe o semiperioadă a curentului alternativ coincide cu valoarea medie pe o perioadă a curentului pulsatoriu obținut prin redresarea ambelor alternanțe ale curentului alternativ. Pe scara ampermetrului s-au înscris valori de $k_f=1,11$ (factorul de formă al unei mărimi sinusoidale) ori mai mari decît cele medii, cu alte cuvinte gradarea s-a făcut pentru valorile efective ale curentului alternativ sinusoidal.

Valoarea medie I_{med} pe o semiperioadă a curentului alternativ nesinusoidal este sesizată corect şi ea se obţine împărţind indicaţia instrumentului la 1,11 :

$$I_{med}=\frac{1,28}{1,11}=1,15 \text{ A}.$$

Conform relaţiei (1.1) eroarea relativă procentuală limită de măsurare a acestei valori medii este :

$$E_{r\,\text{lim}}=(\pm 1,5)\cdot\frac{1,5}{1,28}=\pm 1,76\%.$$

Problema 2.1.7. Se măsoară tensiunea alternativă nesinusoidală

$$u=151 \sin \omega t+19 \sin\left(3\,\omega t-\frac{\pi}{6}\right), \quad [\text{V}\,;\ \text{rad/s},\ \text{s}]$$

cu un voltmetru magnetoelectric cu redresor pentru redresarea ambelor alternanţe şi caracteristica ideală independentă de frecvenţă, avînd intervalul de măsurare 150 V şi clasa de precizie 2,5. Să se determine eroarea relativă procentuală limită cu care voltmetrul măsoară valoarea efectivă a acestei tensiuni.

Soluţie. Echipajul mobil al voltmetrului magnetoelectric cu redresor deviază sub acţiunea valorii medii pe o perioadă a tensiunii alternative redresate. Valoarea medie pe o perioadă a tensiunii alternative nesinusoidale u redresată este însă egală cu valoarea medie pe o semiperioadă a tensiunii alternative nesinusoidale u neredresată. Tensiunea alternativă u este nulă cînd

$$t=\frac{0,047}{\omega}+\frac{kT}{2} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ), \qquad [\text{s}\,;\ \text{rad/s},\ -,\ \text{s}],$$

prin urmare valoarea medie pe o perioadă a tensiunii alternative u redresată este

$$U_{med}=\frac{2}{T}\int_{\frac{0,047}{\omega}}^{\frac{0,047}{\omega}+\frac{T}{2}} u\,\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_{\frac{0,047}{\omega}}^{\frac{0,047}{\omega}+\frac{T}{2}}\left[151 \sin \omega t+19 \sin\left(3\omega t-\frac{\pi}{6}\right)\right]\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{302}{\pi}\cos 0,047+\frac{19}{3\pi}\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin 3\cdot 0,047+\cos\frac{\pi}{6}\cos 3\cdot 0,047\right)=99,77 \text{ V}.$$

Întrucît gradarea scării voltmetrului magnetoelectric cu redresor este făcută pentru valori efective ale tensiunii alternative sinusoidale, pe scara lui se trec valori de $k_f=1,11$ (factorul de formă al unei mărimi sinusoidale) ori mai mari decît cele medii, sub acţiunea cărora deviază echipajul mobil. Tensiunii $U_{med}=99,77$ V îi corespunde indicaţia

$$U'=k_f U_{med}=1,11\cdot 99,77=110,74 \text{ V}.$$

Indicaţia U' este afectată de eroarea relativă procentuală limită

$$E'_{r\,\text{lim}}=(\pm 2,5)\cdot\frac{150}{110,74}=\pm 3,89\%.$$

Acestei erori i se mai adaugă și cea cauzată de faptul că tensiunea u este nesinusoidală. Cu alte cuvinte voltmetrul indică valoarea efectivă $U'=110{,}74$ V, în timp ce valoarea efectivă a tensiunii u este în realitate

$$U=\sqrt{\left(\frac{151}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{19}{\sqrt{2}}\right)^2}=107{,}62 \text{ V}.$$

Eroarea relativă procentuală produsă astfel este:

$$E_r=\frac{100\,(U'-U)}{U}=$$

$$=\frac{100\,(110{,}74-107{,}62)}{107{,}62}=2{,}9\%.$$

Deci valoarea efectivă a tensiunii alternative nesinusoidale u se măsoară cu eroarea relativă procentuală

$$E_{rU}=E'_{\text{lim}}+E_r=\pm 3{,}89+2{,}9$$

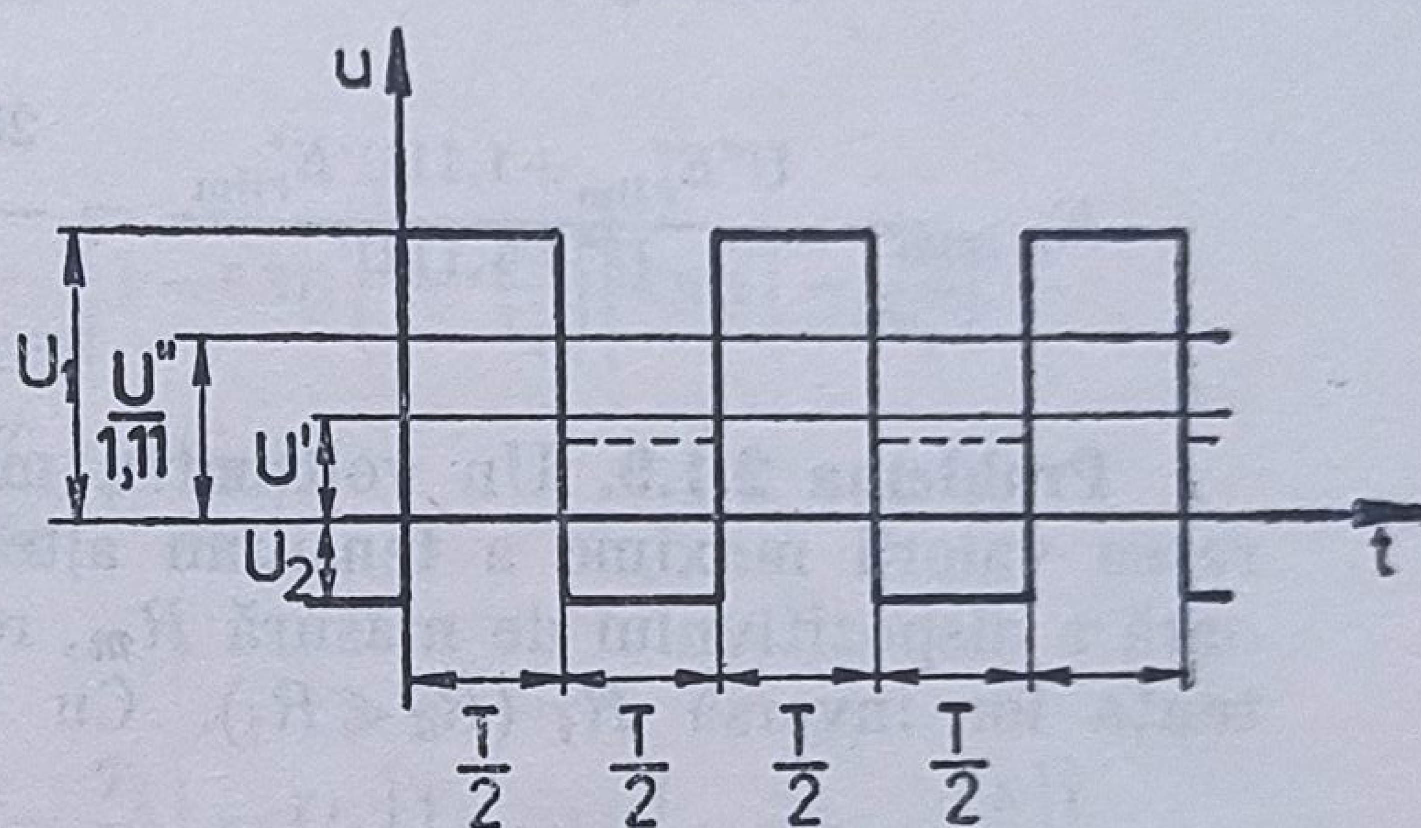


Fig. 2.1.4.

sau

$$-0{,}99\% \leqslant E_{rU} \leqslant 6{,}79\%.$$

Problema 2.1.8. O tensiune reprezentată grafic în figura 2.1.4 se măsoară cu un voltmetru magnetoelectric, obținîndu-se valoarea $U'=12{,}7$ V. Cu un voltmetru magnetoelectric cu redresor se obține $U''=25{,}2$ V. Să se determine amplitudinile U_1 și U_2 ale tensiunii și erorile relative procentuale limită $E_{r\text{lim}1}$, respectiv $E_{r\text{lim}2}$ de determinare a lor, știind că voltmetrele au intervalul de măsurare 30 V, clasele de precizie 1 și 1,5, iar redresorul realizează redresarea ambelor alternanțe după o caracteristică ideală independentă de frecvență.

Soluție. Voltmetrul magnetoelectric măsoară valoarea medie pe o perioadă a tensiunii u, și anume:

$$U'=\frac{1}{T}\int_0^{T/2}U_1\mathrm{d}t-\int_{T/2}^{T}U_2\mathrm{d}t=\frac{U_1-U_2}{2}.$$

Voltmetrul magnetoelectric cu redresor sesizează valoarea medie pe o perioadă a tensiunii redresate. Gradarea voltmetrelor magnetoelectrice cu redresor se realizează pentru valori efective ale tensiunii sinusoidale; din acest motiv indicația lor este de $k=1{,}11$ (factorul de formă al unei mărimi sinusoidale) ori mai mare decît valoarea medie, care o produce. În cazul de față,

$$U''=1{,}11\,\frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2}U_1\mathrm{d}t+\int_{T/2}^{T}U_2\mathrm{d}t\right)=1{,}11\,\frac{U_1+U_2}{2}.$$

Pe baza celor două relații rezultă

$$U_1=\frac{U''+1{,}11U'}{1{,}11}=\frac{25{,}2+1{,}11\cdot 12{,}7}{1{,}11}=35{,}4\text{V},$$

$$U_2=\frac{U''-1{,}11U'}{1{,}11}=\frac{25{,}2-1{,}11\cdot 12{,}7}{1{,}11}=10 \text{ V}.$$

Erorile relative procentuale limită ale acestor măsurări se determină pe baza relaţiilor (1.7 şi 1.5), fiind:

$$E_{r\,lim1}=\frac{U''E''_{r\,lim}+1{,}11U'E'_{r\,lim}}{U''+1{,}11U'}=\frac{25{,}2\cdot(\pm1{,}5)\cdot\frac{30}{25{,}2}+1{,}11\cdot12{,}7\,(\pm1)\cdot\frac{30}{12{,}7}}{25{,}2+1{,}11\cdot12{,}7}=$$

$$=\pm1{,}99\%$$

$$E_{r\,lim2}=\frac{U''E''_{r\,lim}+1{,}11U'E'_{r\,lim}}{U''-1{,}11U'}=\frac{25{,}2\cdot(\pm1{,}5)\,\frac{30}{25{,}2}+1{,}11\cdot12{,}7\cdot(\pm1)\cdot\frac{20}{12{,}7}}{25{,}1-1{,}11\cdot12{,}7}=$$

$$=\pm7{,}05\%.$$

Problema 2.1.9. Un voltmetru magnetoelectric cu redresor pentru măsurarea valorii maxime a tensiunii alternative (fig. 2.1.5) are rezistenţa interioară a dispozitivului de măsură R_m, rezistenţa directă a diodelor R_d, iar rezistenţa lor inversă R_i ($R_d \ll R_i$). Cu acest voltmetru se măsoară valoarea

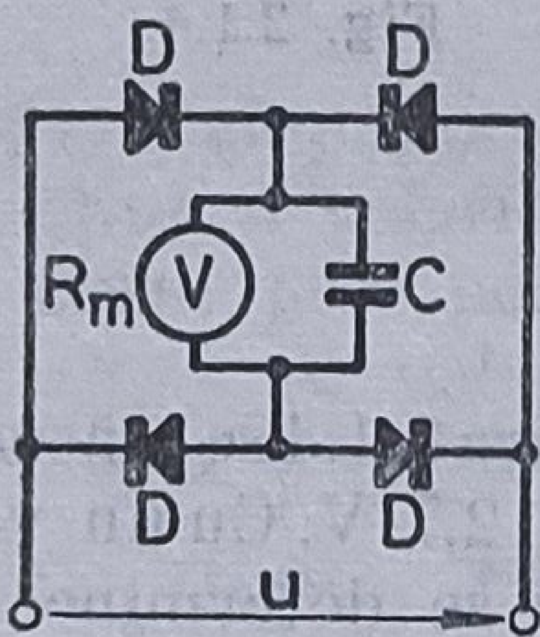


Fig. 2.1.5.

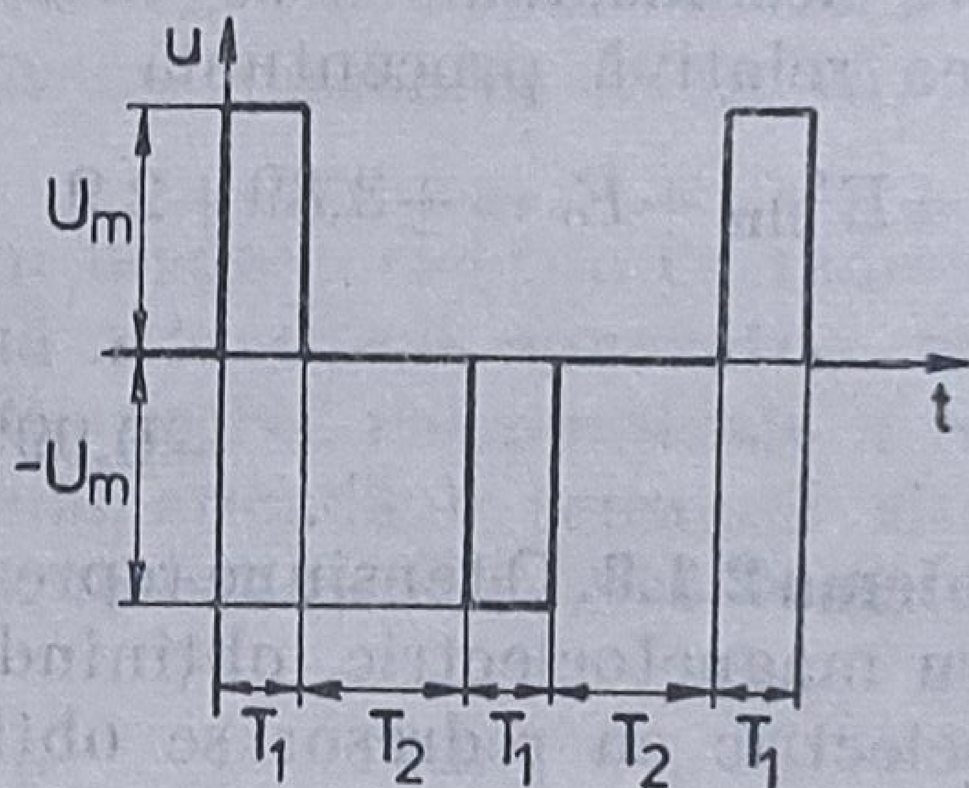


Fig. 2.1.6.

maximă a t.e.m. reprezentată grafic în fig. 2.1.6 a unei surse cu rezistenţa interioară R_s.

1. Să se precizeze condiţiile în care voltmetrul indică chiar valoarea maximă U_m a t.e.m. alternative.

2. Să se calculeze capacitatea C în aşa fel încît în regimul permanent variaţia relativă procentuală maximă a tensiunii la bornele dispozitivului de măsură să nu depăşească 1%.

Soluţie. 1. Condensatorul cu capacitatea C se încarcă în circuitul din fig. 2.1.7 de la o valoare U_0 a tensiunii la o altă valoare U_1 în intervalul de timp T_1 cu constanta de timp

$$\tau_1=\frac{(R_s+2R_d)\,R_mC}{R_s+2R_d+R_m}.$$

Rezultă:

$$U_1=\frac{R_mU_m}{R_s+2R_d+R_m}\left[1-\exp\left(-\frac{T_1}{\tau_1}\right)\right]+U_0\exp\left(-\frac{T_1}{\tau_1}\right).$$

În intervalul de timp T_2 condensatorul cu capacitatea C se descarcă peste circuitul din fig. 2.1.8 de la valoarea U_1 a tensiunii la o valoare U_2 cu constanta de timp

$$\tau=\frac{R_iR_mC}{R_i+R_m}.$$

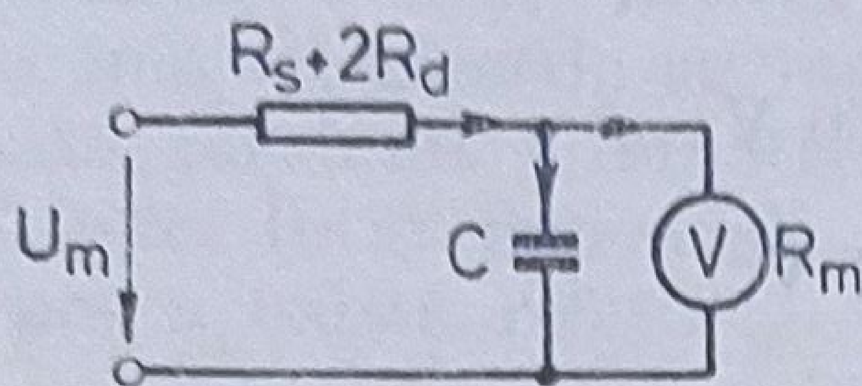


Fig. 2.1.7.

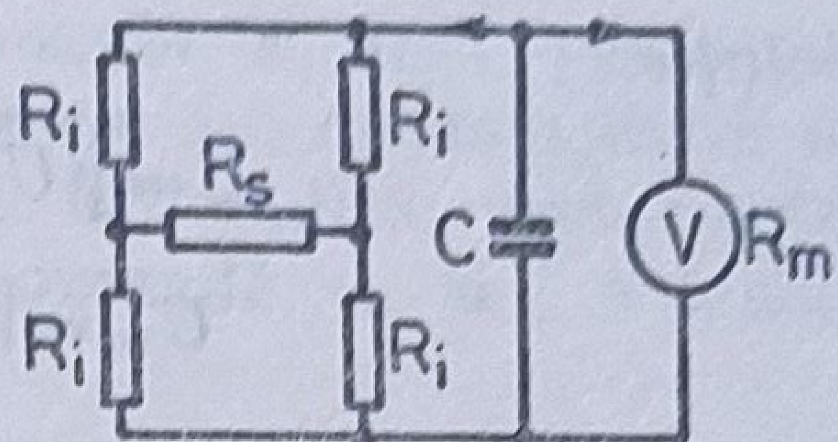


Fig. 2.1.8.

Deci :

$$U_2=U_1\exp\left(-\frac{T_2}{\tau_2}\right)=\frac{R_m U_m}{R_s+2R_d+R_m}\left[1-\exp\left(-\frac{T_1}{\tau_1}\right)\right]\exp\left(-\frac{T_2}{\tau_2}\right)+$$
$$+U_0\exp\left(-\frac{T_1}{\tau_1}-\frac{T_2}{\tau_2}\right).$$

În regimul permanent $U_0=U_2$, adică :

$$\frac{R_m U_m}{R_s+2R_d+R_m}\left[1-\exp\left(-\frac{T_1}{\tau_1}\right)\right]\exp\left(-\frac{T_2}{\tau_2}\right)=U_0\left[1-\exp\left(-\frac{T_1}{\tau_2}-\frac{T_2}{2}\right)\right]$$

și

$$U_0=U_2=\frac{R_m U_m}{R_s+2R_d+R_m}\cdot\frac{1-\exp\left(-\frac{T_1}{\tau_1}\right)}{\exp\left(\frac{T_2}{\tau_2}\right)-\exp\left(-\frac{T_1}{\tau_1}\right)}.$$

Pentru ca voltmetrul să indice chiar valoarea de vîrf U_m a t.e.m. este necesar ca $U_m=U_0=U_1=U_2$, ceea ce are loc dacă sînt respectate condițiile $R_m\gg R_s+2R_d$, $\tau_1\ll T_1$ și $\tau_2\gg T_2$.

2. Este necesar ca

$$\frac{100\,(U_1-U_2)}{U_2}\leqslant 1$$

sau

$$100\left[\exp\left(\frac{T_2}{\tau_2}\right)-1\right]\leqslant 1$$

și

$$\frac{T_2}{\tau_2}\leqslant \ln 1{,}01.$$

Deci

$$C\geqslant\frac{T_2}{\ln 1{,}01}\left(\frac{1}{R_i}+\frac{1}{R_m}\right).$$

Problema 2.1.10. Cu un vectormetru (aparat magnetoelectric cu redresor comandat) se măsoară componentele ortogonale ale unei tensiuni alternative, obținîndu-se indicațiile $U_1=12$ V și $U_2=75$ V. Să se determine valoarea efectivă U, amplitudinea U_m și fazele φ_1 și φ_2 ale tensiunii față de componentele U_1 și U_2.

Soluție.

$$U=\sqrt{U_1^2+U_2^2}=\sqrt{12^2+75^2}=76 \text{ V},$$

$$U_m=\sqrt{2}U=\sqrt{2}\cdot 76=107{,}41 \text{ V},$$

$$\varphi_1=\arccos\left(\frac{U_1}{U_2}\right)=\arccos\left(\frac{12}{76}\right)=80°55',$$

$$\varphi_2=90°-\varphi_1=90°-80°55'=9°05'.$$

Problema 2.1.11. Cu un vectormetru (aparat magnetoelectric cu redresor comandat), avînd intervalul de măsurare $U_c=60$ V și clasa de precizie 1,5, se măsoară componentele unei tensiuni alternative după trei direcții defazate între ele cu cîte $\pi/3$ rad, obținîndu-se valorile $U_1=37{,}3$ V, $U_2=-25$ V și $U_3=11{,}1$ V. Este sau nu este sinusoidală tensiunea alternativă ale cărei componente s-au măsurat în acest fel?

Soluție. Dacă tensiunea alternativă este sinusoidală cu valoarea efectivă U și vectormetrul îi măsoară fără erori valorile U_1', U_2' și U_3' ale componentelor sale după trei direcții defazate cu cîte $\pi/3$ rad, atunci suma acestor trei componente este nulă, deoarece

$$U_1'=U\cos\varphi,\quad U_2'=U\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right),\quad U_3'=U\cos\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)$$

și

$$U_1'+U_2'+U_3'=U\left[\cos\varphi+\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)\right]=0.$$

În loc de valorile U_1', U_2' și U_3' vectormetrul măsoară valorile U_1, U_2 și U_3 afectate de eroarea absolută limită

$$E_{\text{lim}}=\frac{(\pm 1{,}5)\cdot U_c}{100}=\frac{(\pm 1{,}5)\cdot 60}{100}=\pm 0{,}9 \text{ V}$$

stabilită pe baza relației (1.3), astfel încît:

$$U_1-0{,}9\leqslant U_1'\leqslant U_1+0{,}9,$$

$$U_2-0{,}9\leqslant U_2'\leqslant U_2+0{,}9,$$

$$U_3-0{,}9\leqslant U_3'\leqslant U_3+0{,}9,$$

sau

$$U_1+U_2+U_3-2{,}7\leqslant U_1'+U_2'+U_3'\leqslant U_1+U_2+U_3+2{,}7.$$

Dacă tensiunea alternativă este sinusoidală, atunci:

$$U_1+U_2+U_3-2{,}7\leqslant 0\leqslant U_1+U_2+U_3+2{,}7,$$

sau

$$-2{,}7 \text{ V}\leqslant U_1+U_2+U_3\leqslant 2{,}7 \text{ V}.$$

Dar

$$U_1+U_2+U_3=37{,}3-25+11{,}1=23{,}4 \text{ V},$$

cu alte cuvinte tensiunea alternativă nu este sinusoidală.

Problema 2.1.12. Frecvenţa tensiunii de comandă a unui vectormetru (aparat magnetoelectric cu redresor comandat) este de 1,5 ori mai mare decît frecvenţa tensiunii alternative, care se măsoară. Cît indică vectormetrul?

Soluţie. Între perioadele T_c a tensiunii de comandă u_c şi T a tensiunii măsurate u există relaţia:

$$T = 1{,}5\ T_c.$$

Redresorul comandat al vectormetrului redresează tensiunea măsurată astfel încît apare tensiunea redresată u_r cu perioada

$$T_r = 3T_c.$$

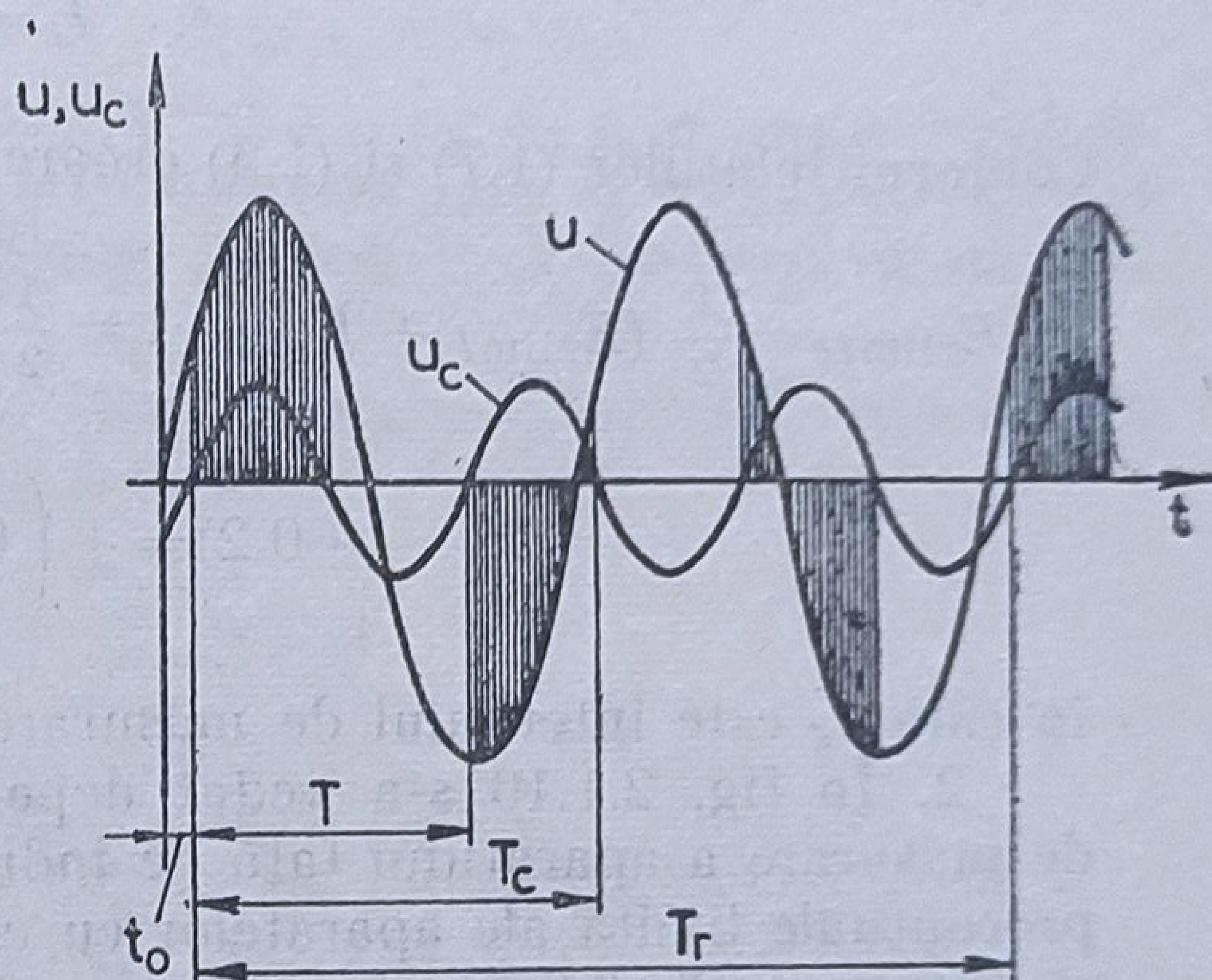


Fig. 2.1.9.

În decursul unei perioade T_r, tensiunea redresată u_r este nulă în intervalele de timp $(t_0+T_c/2,\ t_0+T_c)$, $(t_0+3T_c/2,\ t_0+2T_c)$ şi $(t_0+5T_c/2,\ t_0+3T_c)$ (fig. 2.1.9).

Valoarea medie

$$U_{rmed} = \frac{1}{T_r}\int_{t_0}^{t_0+T_r} u_r \mathrm{d}t$$

a tensiunii redresate determină indicaţia vectormetrului. Se observă că:

$$U_{rmed} = \frac{1}{T_r}\left[\int_{t_0}^{t_0+T_c/2} u\,\mathrm{d}t + \int_{t_0+T_c}^{t_0+3T_c/2} u\,\mathrm{d}t + \int_{t_0+2T_c}^{t_0+5T_c/2} u\,\mathrm{d}t\right] = 0,$$

prin urmare vectormetrul nu indică nimic.

Această proprietate a vectormetrului este favorabilă, atunci cînd se efectuează măsurări asupra unei tensiuni alternative sinusoidale în prezenţa unei alte tensiuni alternative sinusoidale perturbatoare. Frecvenţa tensiunii ce se măsoară, precum şi a celei de comandă, se alege de 1,5 ori mai mare decît cea a tensiunii perturbatoare. În rezultatul măsurării nu apare influenţa tensiunii perturbatoare.

Problema 2.1.13. Pentru măsurarea valorii efective I_e a curentului alternativ se realizează un aparat prin ataşarea la un dispozitiv de măsură magnetoelectric a unui convertor termoelectric. Curentul care trece prin dispozitivul de măsură este determinat prin relaţia:

$$I = KI_e^2,$$

K fiind o constantă, care depinde de caracteristicile constructive ale convertorului şi cele ale dispozitivului de măsură. Clasa de precizie a dispozitivului de măsură este 0,5, iar eroarea relativă procentuală limită introdusă de conversiune $E_{r\,\mathrm{lim}K} = \pm 0{,}2\%$.

1. Să se determine eroarea relativă procentuală limită de măsurare a valorii efective a curentului alternativ în funcție de indicația aparatului gradat în curent alternativ.

2. Știind că I_{ec} este intervalul de măsurare al aparatului în curent alternativ, să se indice clasa de precizie în care se poate încadra aparatul pe baza erorii relative procentuale limită corespunzătoare măsurărilor efectuate între valorile 0,2 I_{ec} și I_{ec}.

Soluție. 1. Gradarea în c.a. a aparatului are loc pe baza relației :

$$I_e=\sqrt{\frac{I}{K}}.$$

Conform relațiilor (1.7) și (1.5) eroarea relativă procentuală limită este :

$$E_{r\lim Ie}=\frac{1}{2}\ (E_{r\lim I}+E_{r\lim K})=\frac{1}{2}\left[(\pm0{,}5)\cdot\frac{I_c}{I}+(\pm0{,}2)\right]=\pm\frac{1}{2}\left(0{,}5\cdot\frac{I_{ec}^2}{I_e^2}+\right.$$

$$\left.+0{,}2\right)=\pm\left(0{,}25\frac{I_{ec}^2}{I_e^2}+0{,}1\right),$$

în care I_c este intervalul de măsurare în c.c. al dispozitivului de măsură.

2. În fig. 2.1.10 s-a redat dependența erorii relative procentuale limită de măsurare a aparatului față de indicația sa în c.a. precum și erorile relative procentuale limită ale aparatelor cu clasă de precizie 0,5 ; 1 și 1,5. Se constată că între valorile 0,2 I_{ec} și I_{ec} aparatul se încadrează în clasa de precizie 1,5.

Problema 2.1.14. Pentru măsurarea valorii efective I a curentului alternativ cu un dispozitiv de măsură magnetoelectric se utilizează convertorul termoelectric (fig. 2.1.11) compus dintr-un fir parcurs de curentul măsurat și

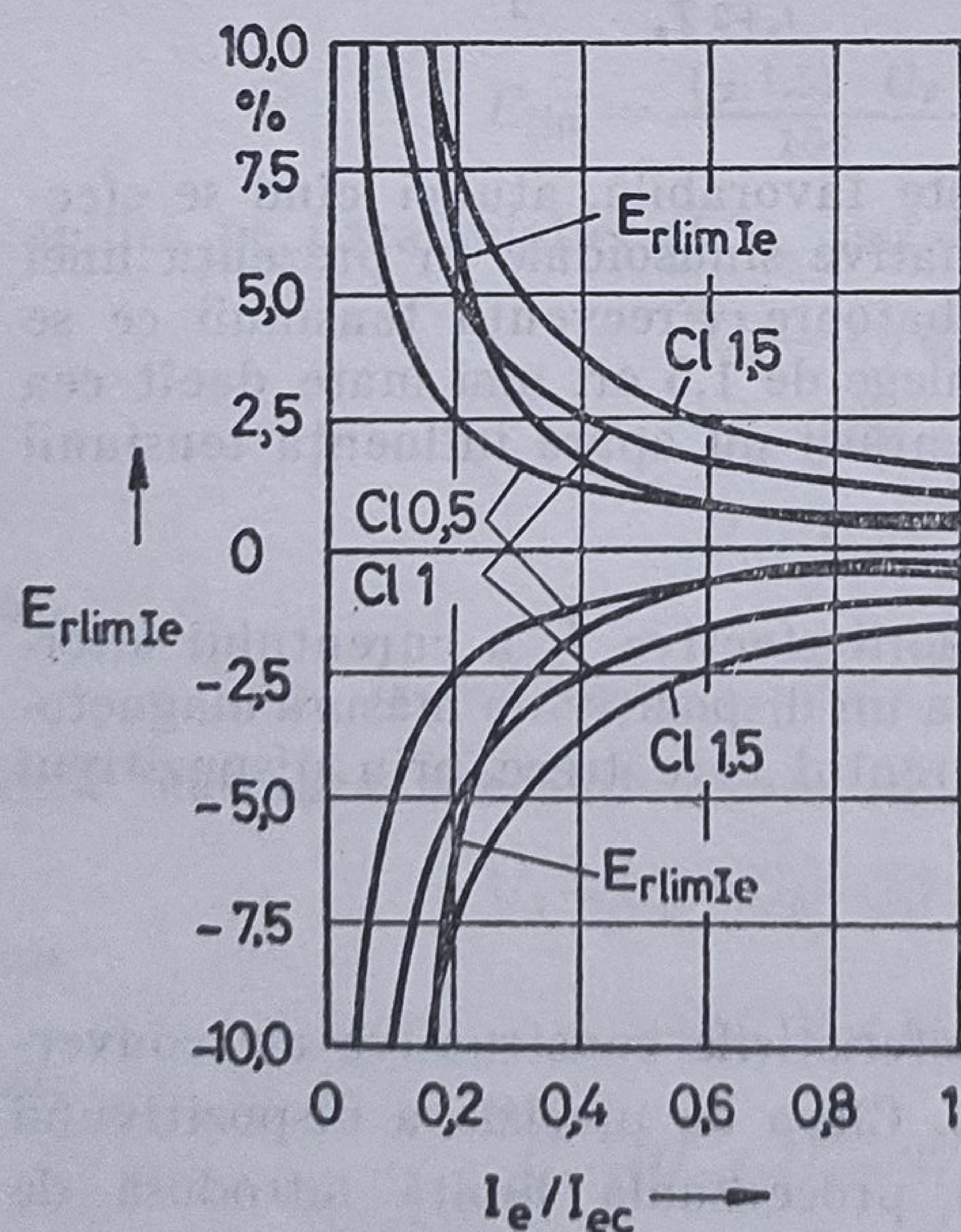


Fig. 2.1.10.

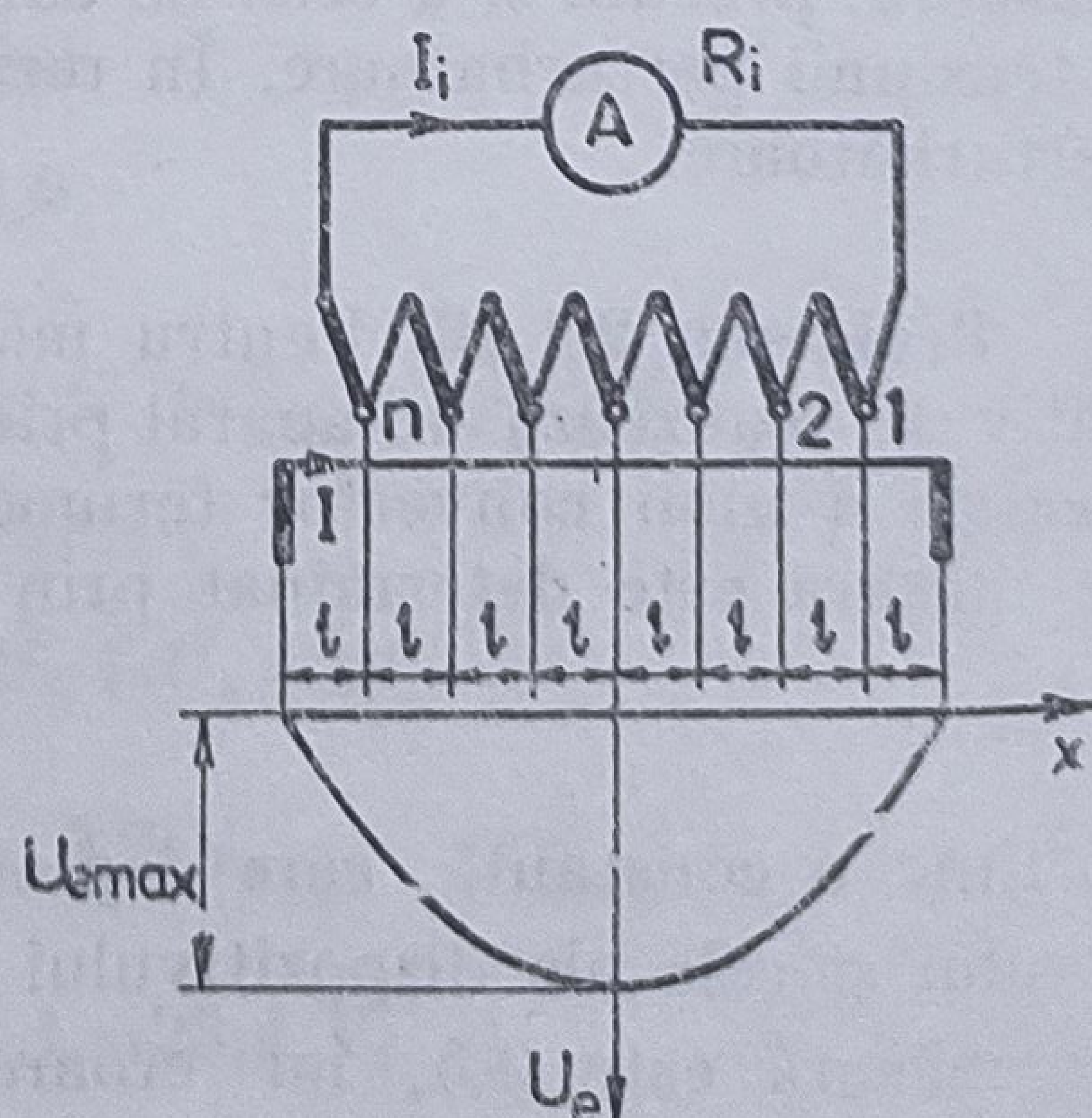


Fig. 2.1.11.

unul sau mai multe termoelemente legate în serie încălzite de fir. Se presupune că :

1. Temperatura este repartizată pătratic de-a lungul firului, avînd maximul la mijlocul acestuia și valori egale cu cea a mediului ambiant la capetele de prindere. Ca urmare, t.e.m. depinde pătratic de poziția termoelementelor față de mijlocul firului, unde are valoarea maximă $U_{emax}=25$ mV ;

2. Termoelementele sînt plasate echidistant între ele și față de capetele firului ;

3. Rezistența unui termoelement este $R_t=12\ \Omega$, iar a dispozitivului de măsură magnetoelectric $R_d=10\ \Omega$, iar în alt caz $R_d=50\ \Omega$.

Se cere să se reprezinte grafic valoarea curentului I_d prin dispozitivul de măsură, puterea P_d absorbită de dispozitivul de măsură și randamentul η al circuitului conținînd dispozitivul de măsură, în funcție de numărul n de termoelemente legate în serie.

Soluție. Dependența t.e.m. față de poziția termoelementului este redată grafic în fig. 2.1.11 și se exprimă prin relația :

$$U_e=U_{emax}\left[1-\frac{4x^2}{(n+1)^2 l^2}\right].$$

T. e. m. a celui de al k-lea termoelement este :

$$U_{ek}=U_{emax}\left[1-\frac{4\left(\frac{n+1-2k}{2}\,l\right)^2}{(n+1)^2 l^2}\right]=U_{emax}\left[\frac{4k}{n+1}-\frac{4k^2}{(n+1)^2}\right].$$

Curentul prin dispozitivul de măsură este :

$$I_d=\frac{\sum_{k=1}^{n} U_{ek}}{nR_t+R_d}=\frac{4U_{emax}}{R_t\,(n+1)\left(n+\frac{R_d}{R_t}\right)}\left[\sum_{k=1}^{n} k-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n+1}\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\,\frac{U_{max}}{R_t}\,\frac{n\,(n+2)}{(n+1)\left(n+\frac{R_d}{R_t}\right)}.$$

Acest curent are o valoare maximă în cazul $R_d \leqslant 2R_t$, pentru :

$$n=\frac{1\pm\sqrt{2\,\frac{R_t}{R_d}-1}}{\frac{R_t}{R_d}-1}.$$

Puterea absorbită de dispozitivul de măsură

$$P_d=I_d^2 R_d=\frac{4}{9}\,\frac{U_{emax}^2 R_d}{R_t^2}\,\frac{n^2\,(n+2)^2}{(n+1)^2\left(n+\frac{R_d}{R_t}\right)^2}$$

este maximă, în cazul $R_d \leq 2R_t$, pentru același

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{2\frac{R_t}{R_d} - 1}}{\frac{R_t}{R_d} - 1}.$$

Randamentul circuitului dispozitivului de măsură se determină din :

$$\eta = \frac{I_d^2 R_d}{I_d^2 (nR_t + R_d)} = \frac{\frac{R_d}{R_t}}{n + \frac{R_d}{R_t}}.$$

Reprezentările grafice cerute sînt redate în fig. 2.1.12. Se remarcă faptul că în cazul unui raport R_d/R_t mai mic o rezolvare avantajoasă se obține chiar și cu un număr mic de termoelemente.

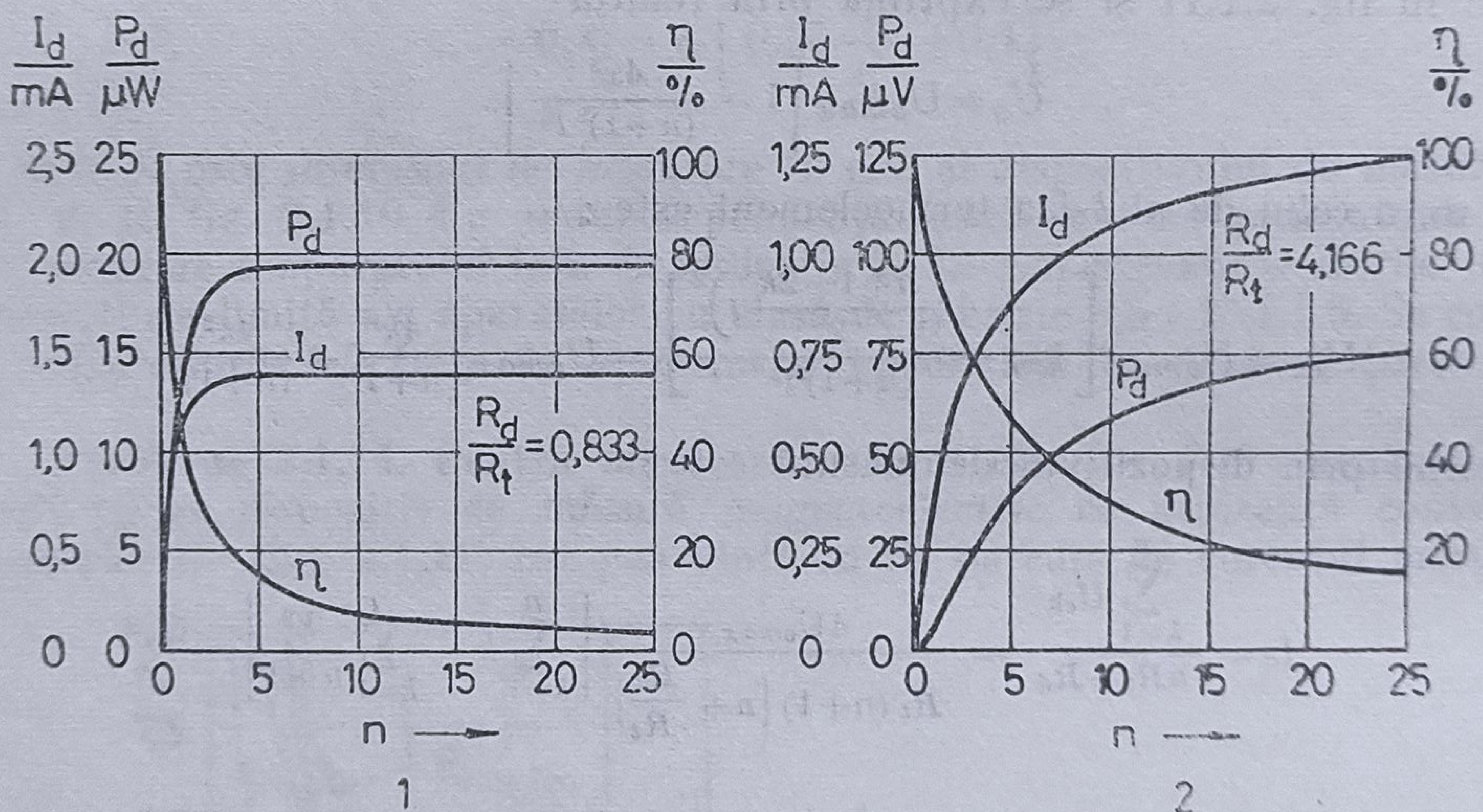


Fig. 2.1.12.

Problema 2.1.15. Un ampermetru feromagnetic, avînd intervalele de măsurare $I_1 = 1$ A, $I_2 = 5$ A și $I_3 = 20$ A este realizat după schema din fig. 2.1.13. Știind că bobina corespunzătoare celui de al doilea interval de măsurare are $N_2 = 60$ spire, să se determine numerele de spire N_1 și N_3 corespunzătoare celorlalte intervale de măsurare.

Soluție. T. m. m. corespunzătoare celor trei intervale de măsurare trebuie să fie identice :

$$I_1 \cdot N_1 = I_2 \cdot N_2 = I_3 \cdot N_3$$

sau

$$1 \cdot N_1 = 5 \cdot 60 = 20 \cdot N_3,$$

de unde rezultă

$$N_1 = 300 \text{ spire}$$

și

$$N_3 = 15 \text{ spire.}$$

Problema 2.1.16. Un aparat feromagnetic are două înfășurări identice cu cîte N spire, care se pot lega în serie sau în paralel (fig. 2.1.14), obținîndu-se în acest mod intervale de măsurare diferite.

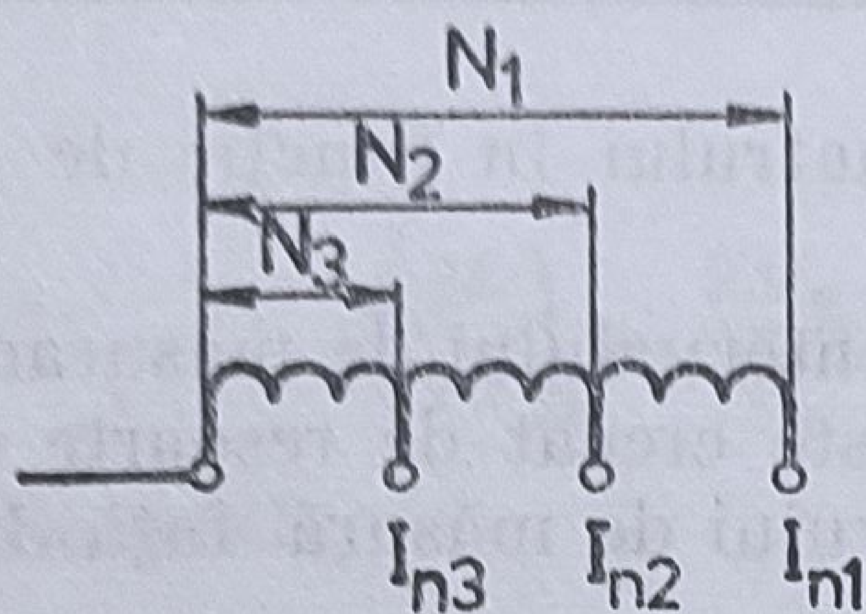


Fig. 2.1.13.

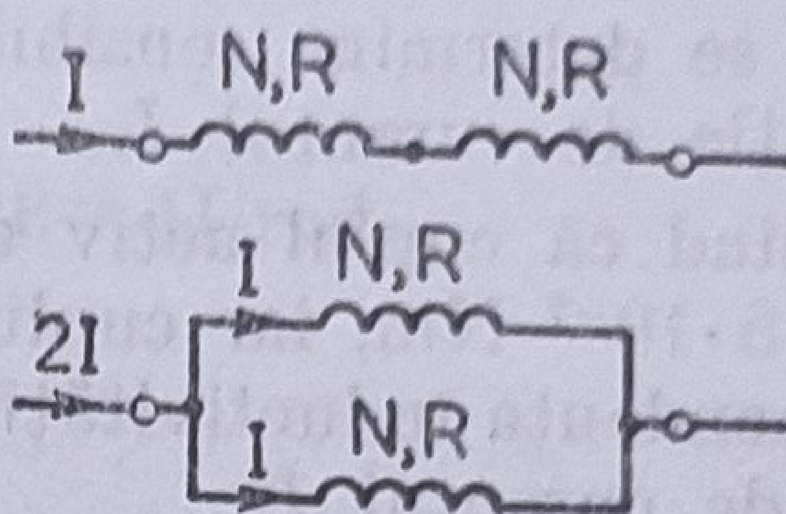


Fig. 2.1.14.

1. Să se determine în ce raport se află cele două intervale de măsurare în cazul ampermetrului feromagnetic și în cazul voltmetrului feromagnetic.

2. Să se calculeze consumul ampermetrului și cel al voltmetrului feromagnetic cu înfășurările legate în serie și în paralel.

Soluție. 1. Indicația aparatului feromagnetic depinde de t.m.m. a înfășurărilor. Notînd cu I curentul nominal și cu N numărul de spire ale unei înfășurări, t.m.m. totală va fi egală cu $2\,IN$ atît la legarea în serie cît și la legarea în paralel a înfășurărilor. Sub acțiunea t.m.m. $2\,IN$ are loc deviația maximă a aparatului. Curentul prin aparat, respectiv căderea de tensiune la bornele sale, depind de modul de legare a înfășurărilor. Pe baza schemelor din fig. 2.1.14 rezultă datele din tabelul 2.1.3.

Tabelul 2.1.3

Aparatul	Legarea înfășurărilor	T.m.m. totală	Curentul prin aparat	Tensiunea pe aparat	Raportul intervalelor de măsurare
Ampermetru	serie	$2IN$	I	$2IR$	$\frac{1}{2}$
	paralel	$2IN$	$2I$	IR	
Voltmetru	serie	$2IN$	I	$2IR$	$\frac{2}{1}$
	paralel	$2IN$	$2I$	IR	

2. Dacă R reprezintă rezistența unei înfășurări, atunci consumul aparatelor feromagnetice cu înfășurările legate în serie și în paralel este $2\,I^2R$. Această constatare este valabilă numai dacă se respectă întocmai schemele din fig. 2.1.14.

Problema 2.1.17. Dependența dintre deviația α și curentul I corespunzătoare unui ampermetru feromagnetic este redată în tabelul 2.1.4.

Tabelul 2.1.4.

α	[rad]	0	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$
I	[A]	0	0,20	0,28	0,38	0,47	0,556	0,643	0,73	0,81	0,89	1,00

1. Să se determine sensibilitatea ampermetrului în funcție de deviația α și în funcție de curentul I.

2. Știind că cuplul activ corespunzător intervalului de măsurare $I_n=1$ A este $M_n=5\cdot10^{-7}$ Nm, iar cuplul antagonist este creeat de resoarte spirale, să se afle dependența inductivității L a dispozitivului de măsură față de deviația α și față de curentul I.

Soluție. 1. Funcția α (I) s-a reprezentat grafic în fig. 2.1.15. Prin derivare grafică se obține sensibilitatea :

$$S=\frac{d\alpha}{dI}.$$

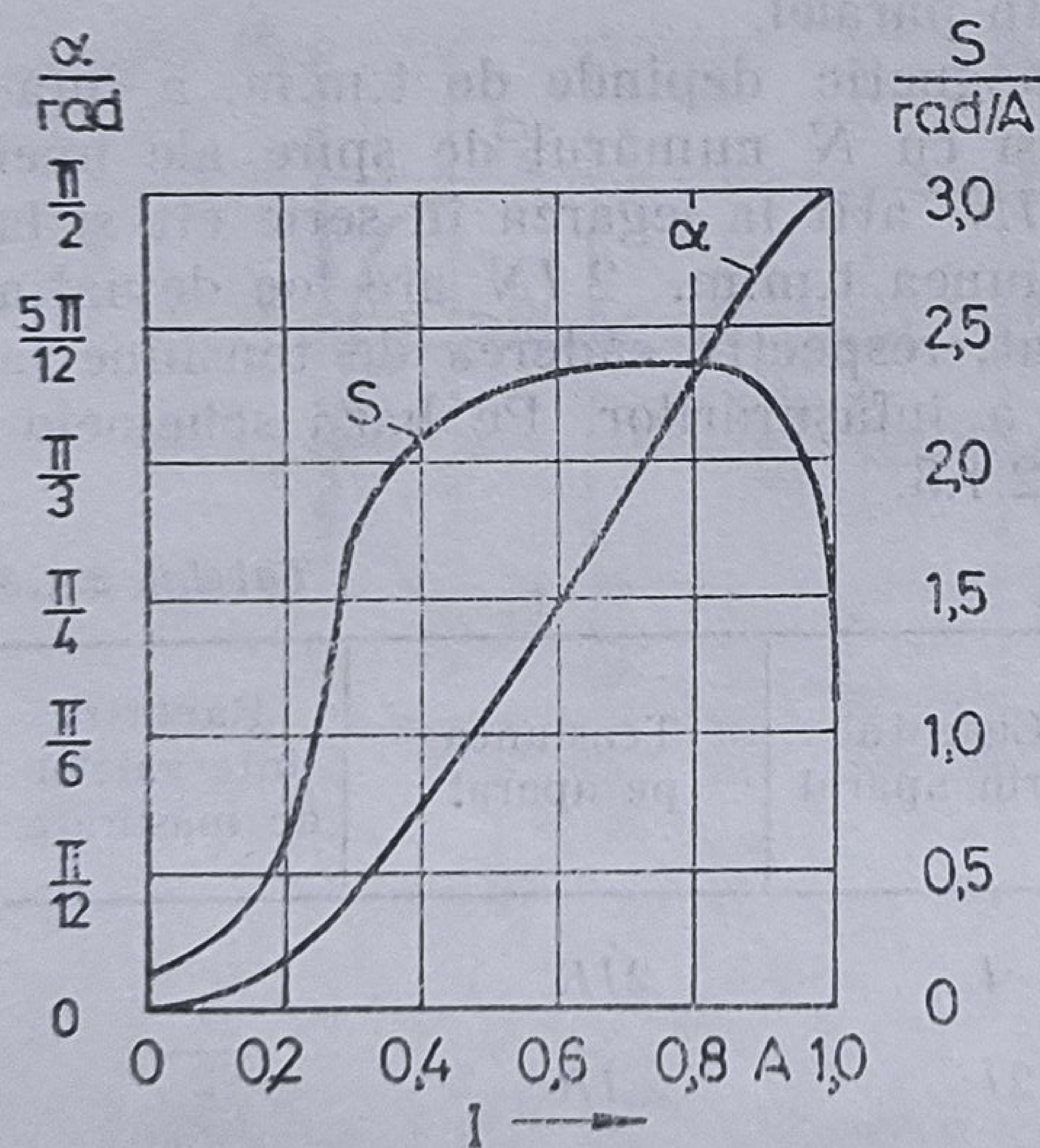


Fig. 2.1.15.

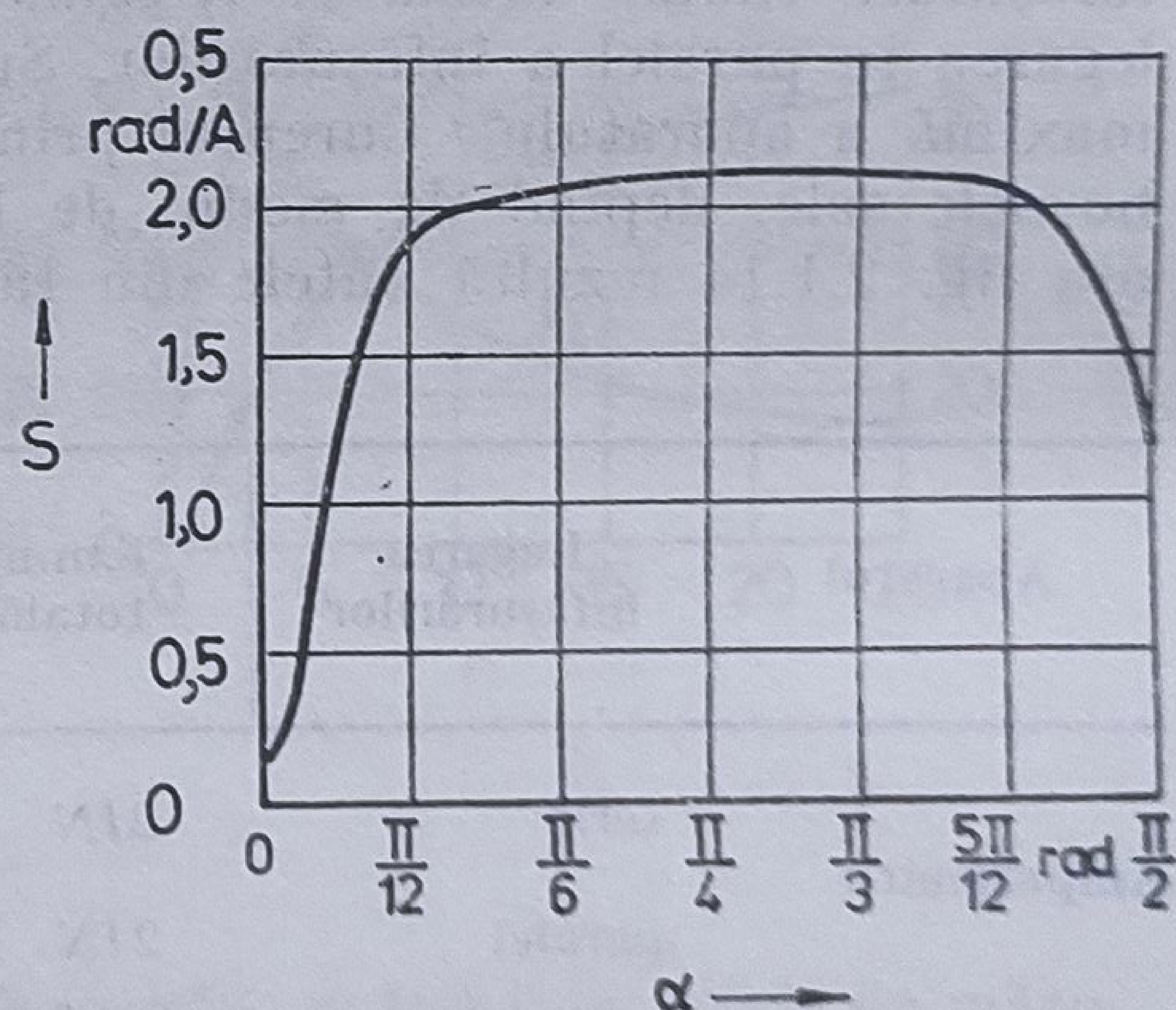


Fig. 2.1.16.

Dependența sensibilității S față de curentul I este de asemenea redată în fig. 2.1.15. Tot din fig. 2.1.15 se obține și dependența sensibilității S față de deviația α, reprezentată grafic în fig. 2.1.16.

2. Cuplul activ al ampermetrului feromagnetic se calculează din relația :

$$M=\frac{I^2}{2}\frac{\partial L}{\partial \alpha},$$

iar cuplul antagonist creeat de resoartele spirale din relația

$$M_D=D\alpha.$$

În regimul permanent

$$M = M_D.$$

Pentru deviația maximă rezultă pe de o parte

$$M_n = \frac{I_n^2}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right)_n,$$

deci :

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right)_n = \frac{2M_n}{I_n^2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{1} = 10^{-6}\ \mathrm{H/rad}$$

și pe de altă parte

$$M_n = D\alpha_n,$$

deci

$$D = \frac{M_n}{\alpha_n} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{\frac{\pi}{2}} = 2{,}19 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Nm/rad}.$$

Pentru alte deviații :

$$\frac{I^2}{2} \cdot \frac{\partial L}{\partial \alpha} = D\,\alpha,$$

de unde

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{2D\,\alpha}{I^2}.$$

Cunoscînd funcția α (I) (fig. 2.1.15) se deduce funcția $\partial L/\partial \alpha$ (α) (fig. 2.1.17). Prin integrare grafică se obține apoi funcția L (α) (fig. 2.1.17) cu aproximația unei constante de integrare L_0, care nu se poate determina prin intermediul datelor existente. Din fig. 2.1.15 și fig. 2.1.17 rezultă în sfîrșit funcția L (I) (fig. 2.1.18).

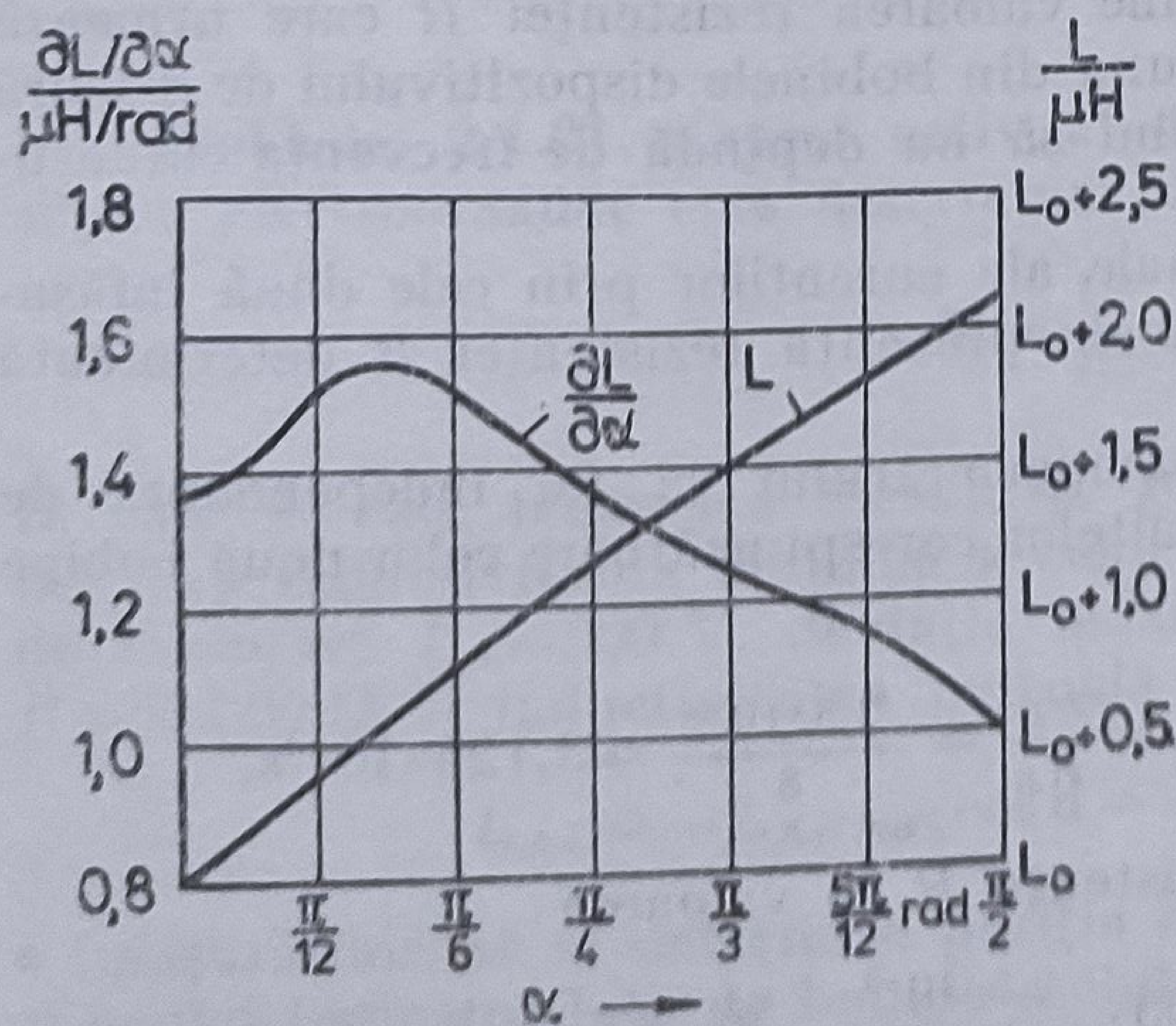


Fig. 2.1.17.

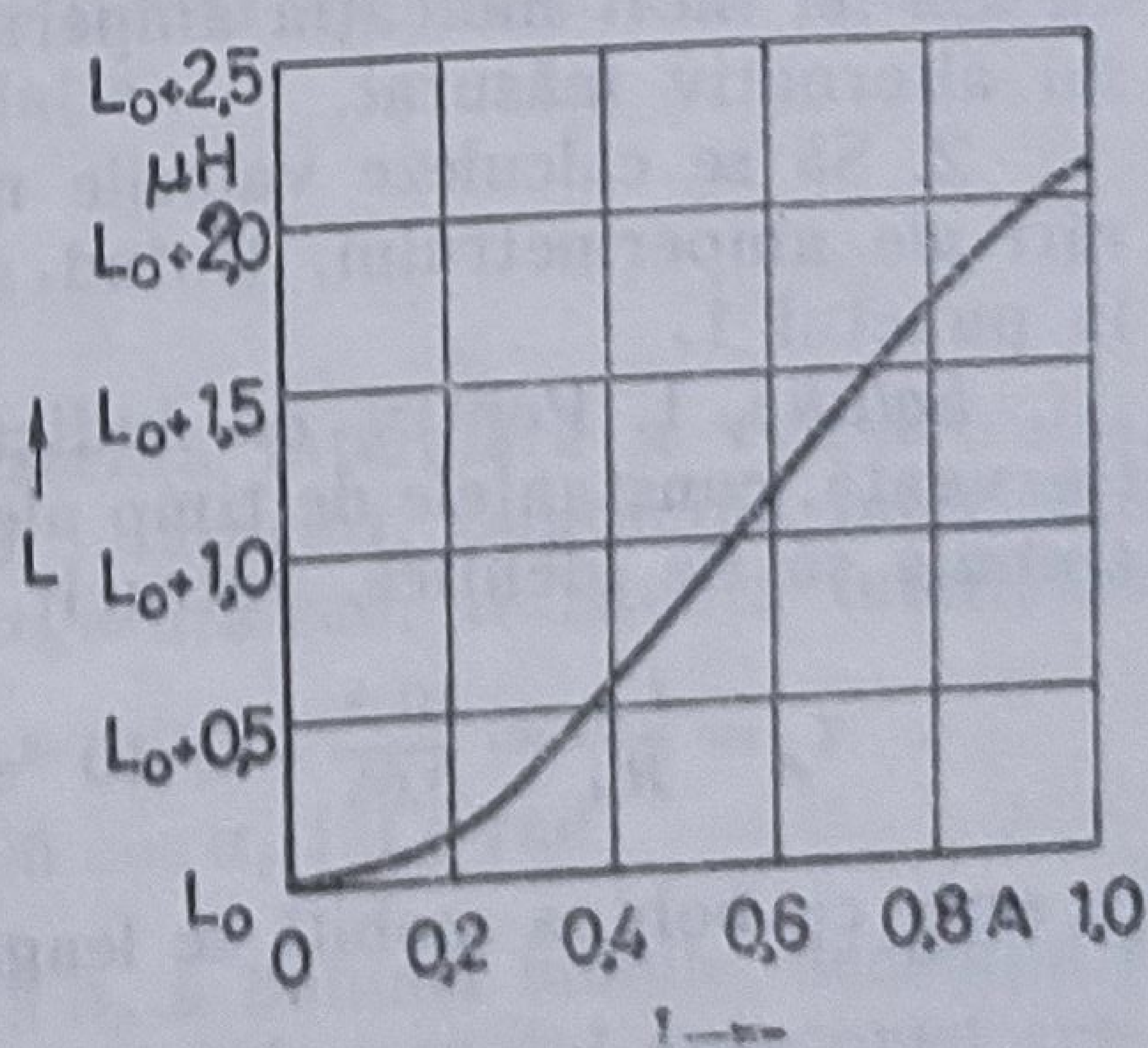


Fig. 2.1.18.

Problema 2.1.18. Expresia deviației permanente a aparatelor feromagnetice și a celor electrostatice este de forma

$$\alpha=\frac{X^2}{2D}\frac{\partial H}{\partial \alpha},$$

în care X reprezintă mărimea electrică măsurată (curentul sau tensiunea), D cuplul antagonist specific al resoartelor spirale, iar H un parametru (inductivitatea sau capacitatea) al dispozitivului de măsură. Să se determine parametrul H astfel încît scara acestor aparate să rezulte liniară.

Soluție. Scară liniară înseamnă :

$$\alpha=SX,$$

S fiind sensibilitatea constantă. Prin înlocuire se obține

$$\alpha=\frac{\alpha^2}{2DS^2}\frac{\partial H}{\partial \alpha}$$

sau

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha}=\frac{2DS^2}{\alpha}.$$

Prin integrare rezultă :

$$H=2DS^2\ln\alpha+H_0.$$

Parametrul H (inductivitatea sau capacitatea) trebuie să depindă logaritmic de deviația echipajului mobil. Această condiție se poate realiza practic la aparatele electrostatice.

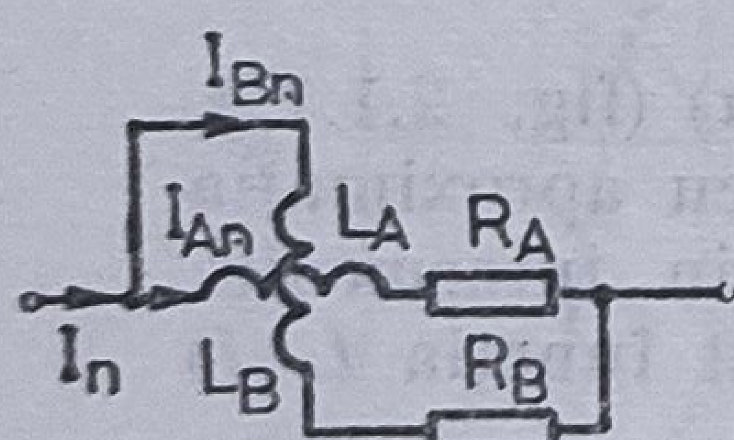


Fig. 2.1.19.

Problema 2.1.19. Un ampermetru electrodinamic cu intervalul de măsurare $I_n=5$ A este realizat după schema din fig. 2.1.19, înfășurările dispozitivului de măsură fiind din cupru. Rezistența bobinei fixe este $R_A=0{,}05\ \Omega$, iar inductivitatea sa $L_A=10^{-5}$ H. Bobina mobilă are rezistența $R_B=8\ \Omega$ și inductivitatea $L_B=2{,}5\cdot10^{-3}$ H.

1. Să se determine valoarea rezistenței R care urmează a se lega în serie cu una din bobinele dispozitivului de măsură în așa fel încît indicația ampermetrului să nu depindă de frecvența curentului alternativ măsurat.

2. Să se calculeze valorile nominale ale curenților prin cele două înfășurări ale ampermetrului, ținînd seama de prezența rezistenței R determinată la punctul 1.

Soluție. 1. Pentru ca indicația ampermetrului să fie independentă de frecvență, constantele de timp ale circuitelor corespunzătoare celor două bobine trebuie să fie identice. Întrucît

$$\tau_A=\frac{L_A}{R_A}=\frac{10^{-5}}{0{,}05}=2\cdot10^{-4}\text{s}<\tau_B=\frac{L_B}{R_B}=\frac{2{,}5\cdot10^{-3}}{8}=3{,}125\cdot10^{-4}\text{s},$$

în serie cu bobina mobilă se leagă rezistența R cu valoarea

$$R=R_A\cdot\frac{L_B}{L_A}-R_B=0{,}05\cdot\frac{2{,}5\cdot10^{-3}}{10^{-5}}-8=4{,}5\ \Omega.$$

2. În condițiile arătate la punctul 1, au loc relațiile:

$$I_{An}R_A = I_{Bn}(R_B + R),$$

$$I_{An} + I_{Bn} = I_n,$$

I_{An} și I_{Bn} fiind valorile nominale ale curenților prin cele două circuite. Înlocuind valorile cunoscute și rezolvînd sistemul de ecuații, rezultă $I_{An}=4,98008$ A și $I_{Bn}=0,01992$ A.

Problema 2.1.20. Un voltmetru electrodinamic are intervalul de măsurare $U_n=75$ V și rezistența interioară $R_v=1\,500\ \Omega$.

1. Să se precizeze numărul de ohmi pe volt al voltmetrului.
2. Să se calculeze rezistența rezistoarelor adiționale necesare lărgirii intervalului de măsurare al voltmetrului la $U_{n1}=150$ V și $U_{n2}=300$ V.
3. Să se determine consumul voltmetrului pe toate intervalele de măsurare.

Soluție. 1. $$\frac{R_v}{U_n} = \frac{1\,500}{75} = 20\ \Omega/\text{V}.$$

2. $$R_{ad1} = \frac{R_v}{U_n}U_{n1} - R_v = 20\cdot 150 - 1\,500 = 1\,500\ \Omega,$$

$$R_{ad2} = \frac{R_v}{U_n}U_{n2} - R_v = 20\cdot 300 - 1\,500 = 4\,500\ \Omega.$$

3. $$P = \frac{U_n^2}{R_v} = \frac{75^2}{1\,500} = 3,75\ \text{W},$$

$$P_1 = \frac{U_{n1}^2}{R_v + R_{ad1}} = \frac{150^2}{1\,500 + 1\,500} = 7,5\ \text{W},$$

$$P_2 = \frac{U_{n2}^2}{R_v + R_{ad2}} = \frac{300^2}{1\,500 + 1\,500} = 15\ \text{W}.$$

Problema 2.1.21. Cuplul activ al dispozitivului de măsură al unui voltmetru electrodinamic este determinat de relația:

$$M = \frac{U^2}{R^2}\cdot\frac{\partial L_{AB}}{\partial \alpha},$$

în care U este tensiunea măsurată, R rezistența interioară a voltmetrului, iar L_{AB} inductivitatea mutuală a celor două înfășurări. Cunoscînd intervalul de măsurare $U_n=300$ V, deviația maximă $\alpha_n=\pi/2$ rad, rezistența interioară $R=30\,000\ \Omega$ și inductivitatea mutuală

$$L_{AB} = -L_{ABmax}\cos\alpha = -0,006\cos\alpha,\ [\text{H}\ ;\ \text{rad}]$$

să se determine poziția inițială α_0 a bobinei mobile, decalajul ε al acului indicator față de bobina mobilă (fig. 2.1.20) și cuplul antagonist specific D al resoartelor spirale astfel încît scara voltmetrului să fie cît mai liniară,

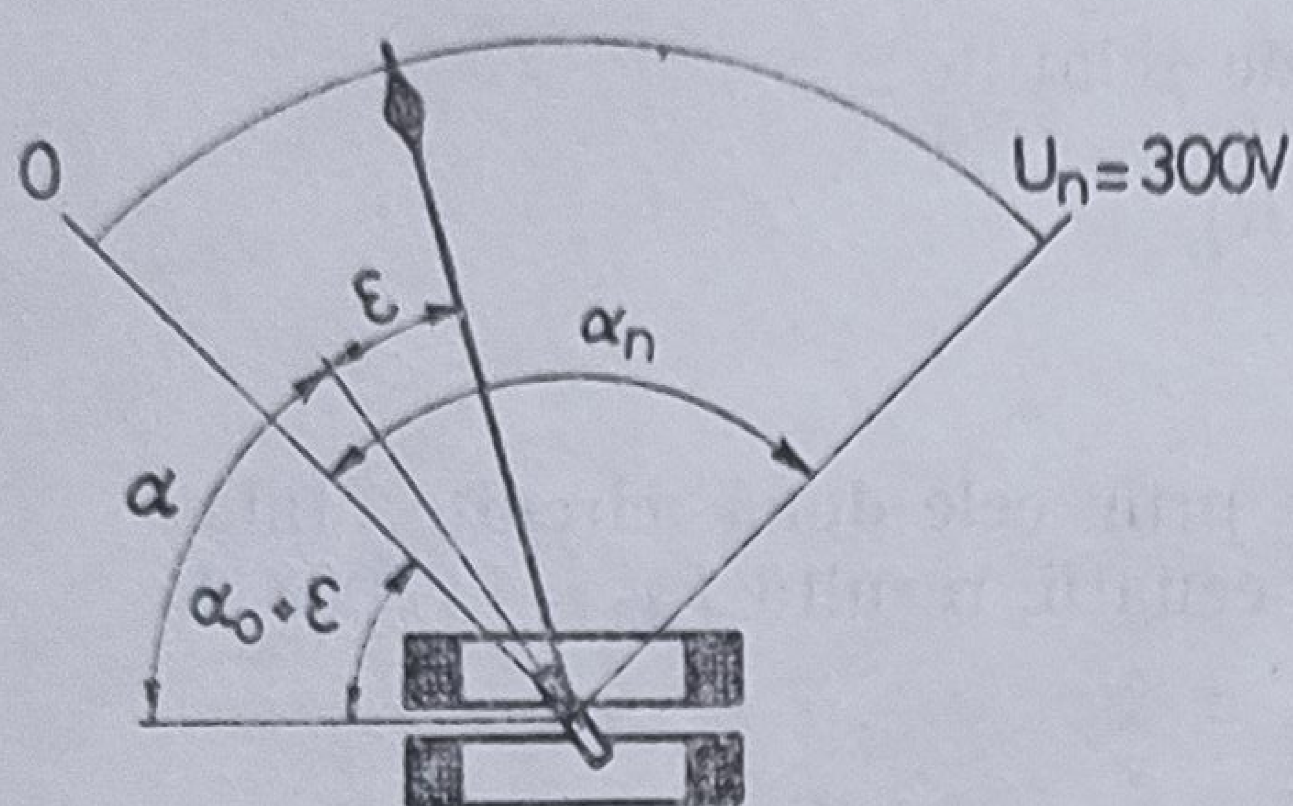


Fig. 2.1.20.

iar axa de simetrie a scării să fie paralelă cu axa bobinelor fixe.

Soluție. Deviația permanentă a voltmetrului electrodinamic este:

$$\alpha = \frac{U^2}{D^2} \frac{\partial L_{AB}}{\partial \alpha}.$$

Scara rezultă liniară dacă L_{AB} depinde logaritmic de α, condiție care nu este îndeplinită în cazul de față. Alegînd în mod corespunzător α_0, ε și D scara se liniarizează într-o oarecare măsură.

În fig. 2.1.21 s-a reprezentat grafic dependența cuplului activ M față de deviația α, cu tensiunea U ca parametru. Cuplul antagonist se reprezintă în aceeași diagramă prin dreapta:

$$M_D = D(\alpha - \alpha_0),$$

astfel aleasă încît ea să intersecteze curba $M(\alpha)$, corespunzătoare tensiunii $U = U_n$, la deviația $\alpha = \alpha_n + \alpha_0$.

Deoarece axa de simetrie a scării e paralelă cu axa bobinelor fixe,

$$\alpha_0 + \varepsilon + \frac{\alpha_n}{2} = \frac{\pi}{2}$$

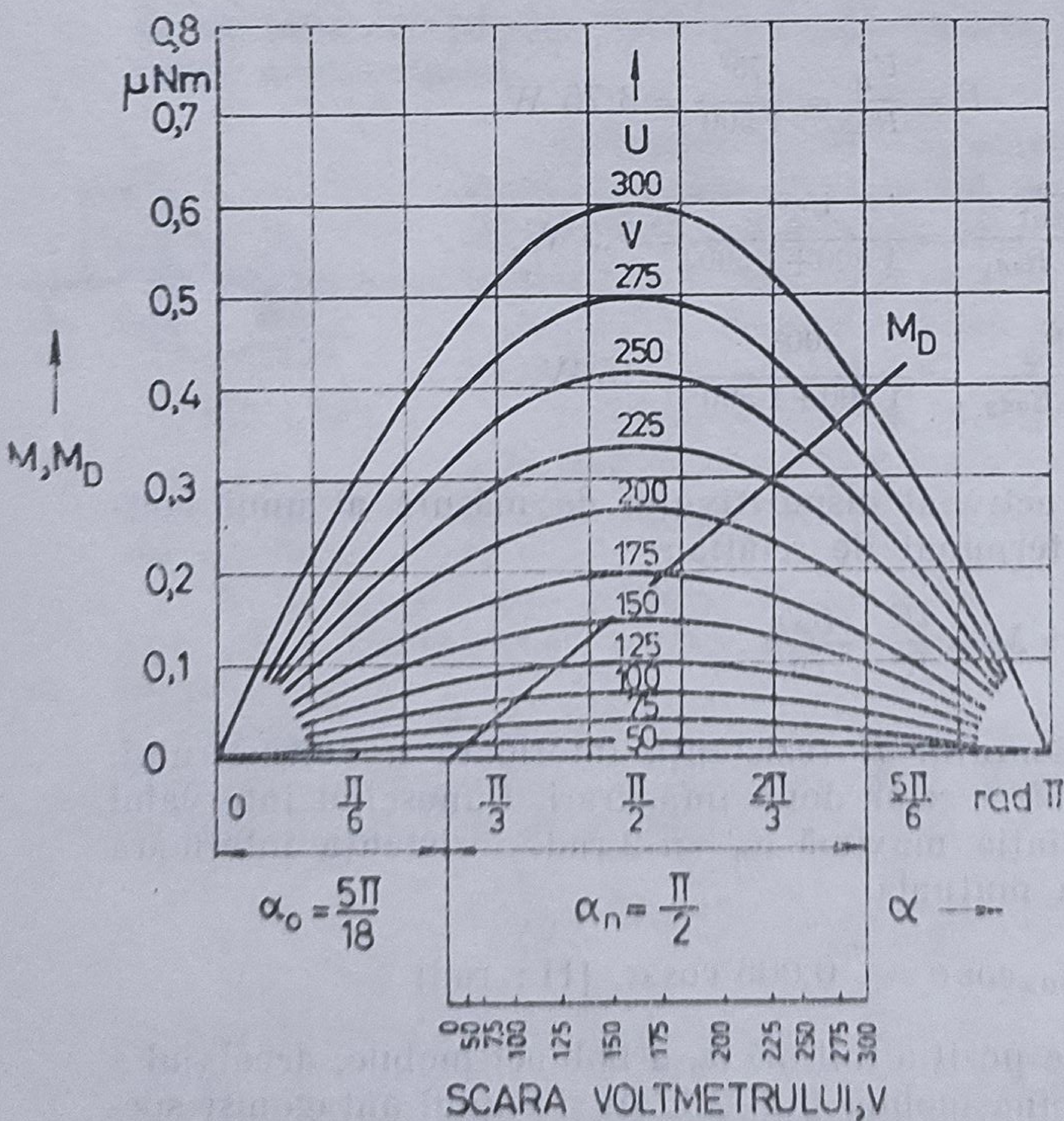


Fig. 2.1.21.

și

$$\varepsilon = \frac{\pi - \alpha_n}{2} - \alpha_0.$$

La $\alpha_0 = 5\pi/18$ rad, $\varepsilon = -\pi/18$ rad și $D = 2{,}45 \cdot 10^{-7}$ Nm/rad, pentru voltmetrul din enunț se obține scara din partea inferioară a fig. 2.1.21, poziția gradațiilor scării fiind determinată de abscisele punctelor de intersecție ale curbelor $M(\alpha)$, corespunzătoare diferitelor tensiuni U, cu dreapta $M_D = D(\alpha - \alpha_0)$.

Problema 2.1.22. Intervalul de măsurare al unui voltmetru electrostatic se lărgește cu un divizor de tensiune rezistiv de la $U_n = 1$ kV la $U_l = 30$ kV (tensiune continuă).

1. Să se determine rezistențele R_1 și R_2 (fig. 2.1.22) astfel încît consumul voltmetrului cu divizor de tensiune să nu depășească $P=10$ W.

2. Ce valoare trebuie să aibă rezistența de izolație R_i dintre armăturile voltmetrului pentru a nu provoca raportului de lărgire a intervalului de măsurare o abatere relativă procentuală mai mare de 0,1% ?

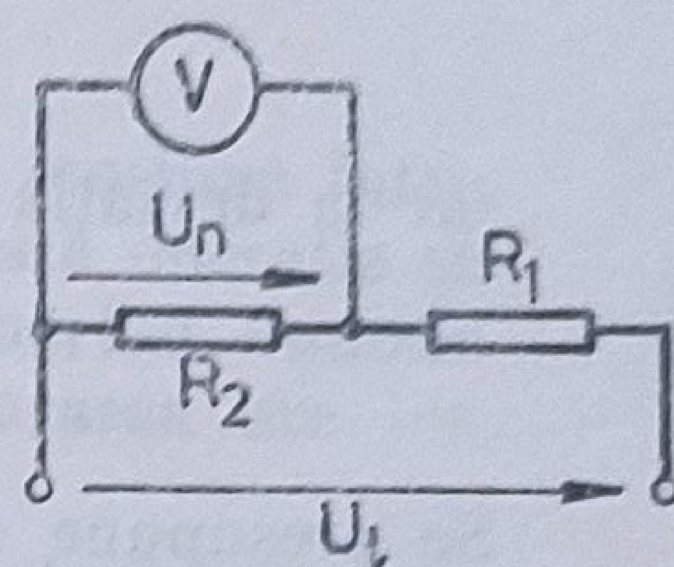


Fig. 2.1.22.

Soluție. 1. Neglijînd consumul voltmetrului electrostatic, adică admițînd că rezistența de izolație dintre armăturile sale este infinită, raportul de lărgire a intervalului de măsurare este :

$$\frac{R_1}{R_2}+1=\frac{U_l}{U_n}=\frac{30}{1},$$

iar consumul divizorului de tensiune

$$\frac{U_l^2}{R_1+R_2}=\frac{9\cdot 10^8}{R_1+R_2}\leqslant P=10,$$

de unde $R_1=29\ R_2$ și $R_1+R_2\geqslant 9\cdot 10^7$. Aceste condiții sînt satisfăcute pentru $R_1\geqslant 87\cdot 10^6\ \Omega$ și $R_2\geqslant 3\cdot 10^6\ \Omega$.

2. Dacă se ține seama de consumul voltmetrului electrostatic, cu alte cuvinte se admite că rezistența de izolație R_i dintre armăturile sale este finită, atunci raportul de lărgire a intervalului de măsurare este

$$\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{R_2+R_i}{R_i}+1.$$

Abaterea relativă procentuală dintre cele două valori ale raportului de lărgire a intervalului de măsurare – considerînd R_i infinit și R_i finit – trebuie să fie cel mult 0,1%. Deci :

$$\frac{100\left(\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{R_2+R_i}{R_i}+1-\frac{R_1}{R_2}-1\right)}{\frac{R_1}{R_2}+1}=\frac{100\cdot\frac{R_1}{R_i}}{\frac{R_1}{R_2}+1}\leqslant 0{,}1.$$

Rezultă $R_i\geqslant 33{,}33\ R_1$ și apoi $R_i\geqslant 2{,}9\cdot 10^9\ \Omega$.

Problema 2.1.23. Intervalul de măsurare al unui voltmetru electrostatic se lărgește cu un divizor de tensiune capacitiv de la valoarea $U_n=1{,}5$ kV pînă la valoarea $U_l=60$ kV (tensiune alternativă).

1. Știind că la deviația zero capacitatea voltmetrului este $C_0=21$ pF, iar la deviația maximă $C_n=25$ pF, să se calculeze capacitățile C_1 și C_2 (fig. 2.1.23) astfel încît eroarea relativă procentuală a raportului de lărgire a intervalului de măsurare să nu fie mai mare de 1%.

2. Să se determine consumul voltmetrului cu divizorul de tensiune capacitiv la tensiune alternativă cu frecvența f=50 Hz.

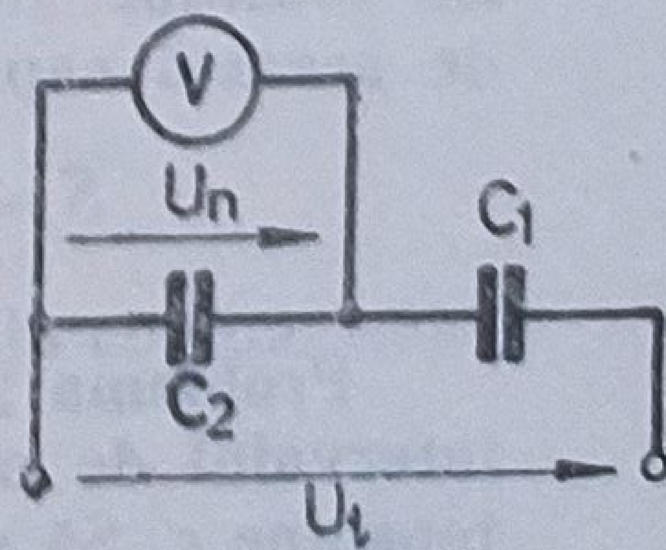


Fig. 2.1.23.

Soluție. 1. La deviația zero raportul de lărgire a intervalului de măsurare este:

$$n_{l0} = \frac{C_2 + C_0}{C_1} + 1,$$

iar la deviația maximă

$$n_{ln} = \frac{C_2 + C_n}{C_1} + 1.$$

Se presupune că la deviația zero

$$n_{l0} = \frac{U_l}{U_n} = \frac{60}{1,5} = 40,$$

deci:

$$\frac{C_2 + 21}{C_1} + 1 = 40$$

și

$$39\ C_1 - C_2 = 21.$$

Deoarece $C_o < C_n$, raportul de lărgire a intervalului de măsurare este mai mare la deviația maximă decît la deviația zero. Eroarea relativă procentuală, care apare astfel, trebuie să fie cel mult 1%. Prin urmare,

$$\frac{100\,(n_{ln} - n_{l0})}{n_{l0}} < 1$$

sau

$$n_{ln} \leqslant 1{,}01\ n_{l0} = 40{,}4.$$

Deci:

$$\frac{C_2 + 25}{C_1} + 1 \leqslant 40{,}4$$

și apoi

$$39{,}4\ C_1 - C_2 \geqslant 25.$$

Din cele două relații cu două necunoscute rezultă $C_1 \geqslant 10$ pF și $C_2 \geqslant 369$ pF.

2. Capacitatea echivalentă a voltmetrului cu divizorul de tensiune este

$$C = \frac{C_1\,(C_2 + C_n)}{C_1 + C_2 + C_n} = \frac{10\,(369 + 25)}{10 + 369 + 25} = 9{,}75 \text{ pF}.$$

La tensiune alternativă cu frecvența $f = 50$ Hz puterea aparentă consumată de această capacitate este

$$S = 2\pi f C U_l^2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 9{,}75 \cdot 10^{-12} \cdot (6 \cdot 10^4)^2 = 11{,}02 \text{ VA}.$$

Problema 2.1.24. Un voltmetru numeric cu compararea tensiunii are intervalul de măsurare U_{max}, rezoluția U_{rez} și numărul de comparatoare de tensiune c. Să se precizeze numărul de pași p necesar la efectuarea comparării tensiunii pînă la stabilirea rezultatului măsurării.

Soluție. Numărul de cuante de tensiune corespunzător voltmetrului numeric este

$$n=\frac{U_{max}}{U_{rez}}.$$

Măsurarea numerică a tensiunii presupune stabilirea cuantei de tensiune între ale cărei limite se încadrează tensiunea U, ce se măsoară. Această operație se efectuează prin intermediul comparatoarelor de tensiune, comparînd limitele cuantelor de tensiune cu tensiunea U, ce se măsoară. Compararea are loc simultan sau succesiv.

La compararea simultană sînt necesare mai multe comparatoare de tensiune ($c \leqslant n$). Dacă numărul lor c este egal cu cel al cuantelor de tensiune n, atunci compararea are loc într-un singur pas. Acest caz limită se întîlnește foarte rar datorită numărului mare de comparatoare de tensiune și de tensiuni de referință U_r necesare realizării lui practice (fig. 2.1.24). Adeseori numărul de comparatoare de tensiune c este mai mic decît cel al cuantelor de tensiune n. În astfel de cazuri se împarte întîi intervalul de măsurare U_{max} într-un număr c de cuante de tensiune U_{max}/c și se stabilește cuanta de tensiune între ale cărei limite se încadrează tensiunea U, ce se măsoară ; acesta constituie primul pas la efectuarea comparării tensiunii. Apoi cuanta de tensiune U_{max}/c stabilită anterior se împarte într-un număr c de cuante de tensiune U_{max}/c^2 și se găsește cuanta de tensiune între ale cărei limite se încadrează tensiunea U, ce

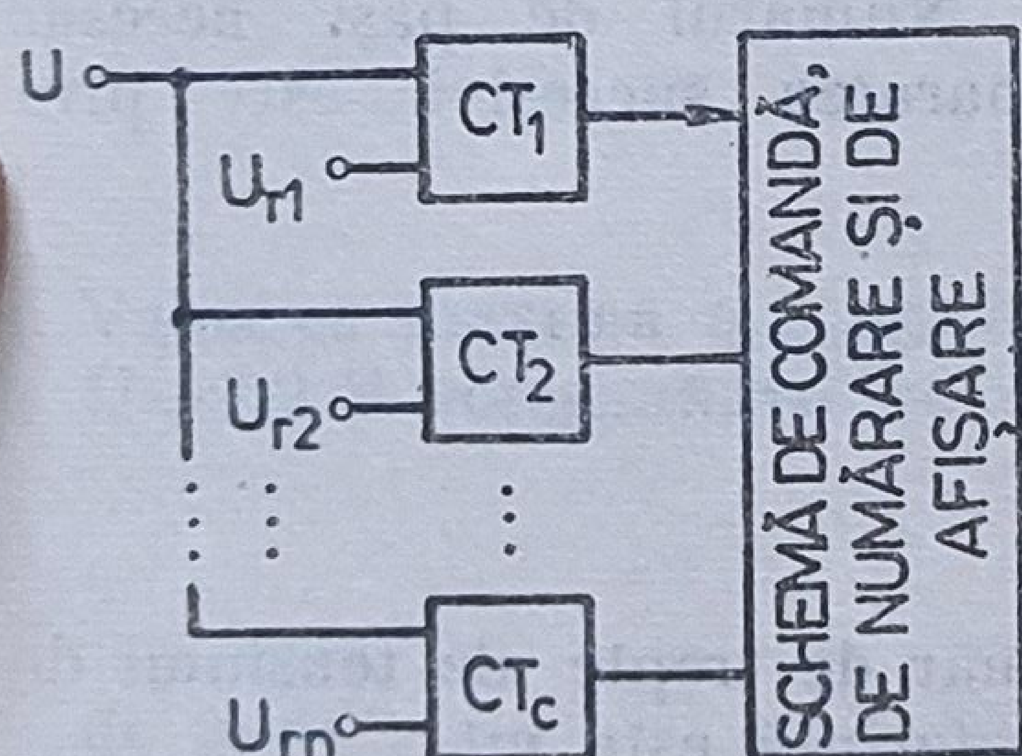


Fig. 2.1.24.

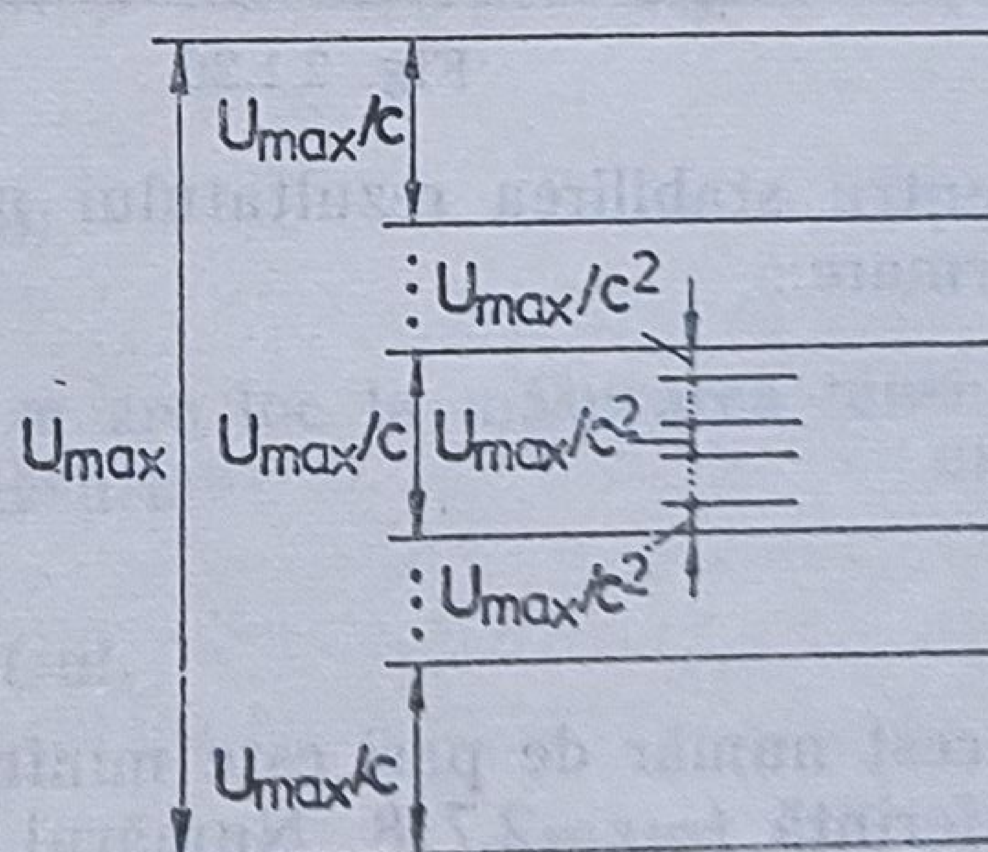


Fig. 2.1.25.

se măsoară ; acesta constituie al doilea pas la efectuarea comparării tensiunii (fig. 2.1.25). Se continuă în acest fel pînă în momentul în care

$$\frac{U_{max}}{c^p} \leqslant U_{rez},$$

sau

$$n \leqslant c^p.$$

Numărul de pași necesar pentru stabilirea rezultatului măsurării la compararea simultană este prin urmare

$$p \geqslant \frac{\ln n}{\ln c}.$$

Numărul de comparatoare de tensiune c și cel de tensiuni de referință cp este mai redus decît în cazul limită al comparării într-un singur pas.

La compararea succesivă este necesar un singur comparator de tensiune ($c=1$), în schimb tensiunea de referință U_r este variabilă în timp. Dacă numărul de trepte t ale tensiunii de referință este egal cu cel al cuantelor de tensiune n, atunci compararea are loc în cel mult n pași. Uneori numărul de trepte t ale tensiunii de referință este mai mic decît cel al cuantelor de tensiune n. În astfel de cazuri se parcurg întîi cele t trepte ale tensiunii de referință și se stabilește cuanta de tensiune U_{max}/t între ale cărei limite se încadrează tensiunea U, ce se măsoară. Apoi se parcurg cele t trepte ale tensiunii de referință U_{max}/t și se stabilește cuanta de tensiune U_{max}/t^2 între ale cărei limite se încadrează tensiunea U ce se măsoară (fig. 2.1.26). Se continuă în acest fel pînă în momentul în care

Fig. 2.1.26.

$$\frac{U_{max}}{t^m} \leqslant U_{rez},$$

sau

$$n \leqslant t^m,$$

m fiind numărul de reluări ale parcurgerii treptelor. Numărul de pași necesar pentru stabilirea rezultatului măsurării la compararea succesivă este prin urmare :

$$p \geqslant mt,$$

sau

$$p \geqslant t\,\frac{\ln n}{\ln t}\,.$$

Acest număr de pași este minim pentru un număr de trepte ale tensiunii de referință $t=e=2{,}718$. Numărul de tensiuni de referință este mt.

Se amintește că la alegerea schemei voltmetrului numeric cu compararea tensiunii, pe lîngă numărul de comparatoare de tensiune și cel de tensiuni de referință se ține seama și de complexitatea schemei de comandă, de numărare și de afișare, precum și de timpul de mă surare, ce urmează a fi respectat. Acesta din urmă depinde în mare măsură de numărul de pași p necesar la efectuarea comparării tensiunii pînă la stabilirea rezultatului măsurării.

Problema 2.1.25. Cu un voltmetru numeric cu dublă integrare (fig. 2.1.27), avînd intervalul de măsurare $U_{max}=1{,}2$ V și rezoluția $U_{rez}=10$ μV, se măsoară tensiunea continuă $U_x=0{,}95974$ V. La comanda START, schema de comandă *SC* comută comutatorul *K* în poziția 1, aduce numărătorul zecimal *NZ* în poziția zero și declanșează numărarea de către acesta a impulsurilor produse de generatorul de frecvență etalon *GFE*. Amplificatorul integrator *AI*

începe integrarea tensiunii U_x și o încheie după intervalul de timp $t_1=0{,}02$ s, la care numărătorul zecimal *NZ*, ce a numărat n_1 impulsuri produse de generatorul de frecvență etalon *GFE*, provoacă prin intermediul schemei de comandă *SC* comutarea comutatorului *K* în poziția 2. Din acest moment tensiunea $u_{ieș}$ de la ieșirea amplificatorului integrator *AI* începe să descrească deoarece are loc integrarea tensiunii de referință U_r aplicată cu polaritatea inversă față de cea a tensiuni U_x. Cînd tensiunea $u_{ieș}$ de la ieșirea amplificatorului integrator *AI* trece prin zero, comparatorul de tensiune *CT* determină prin intermediul schemei de comandă *SC* oprirea numărătorului zecimal *NZ*.

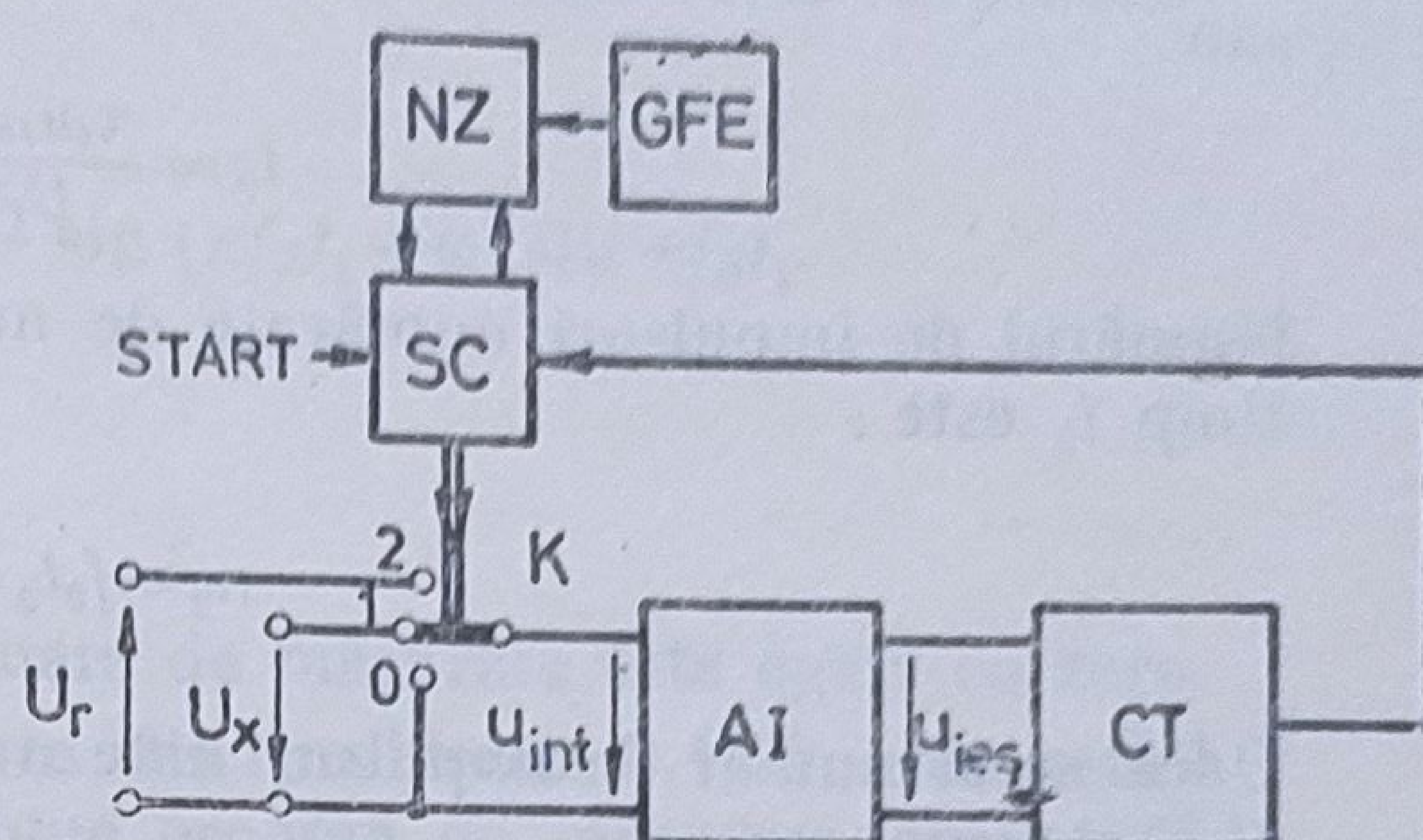


Fig. 2.1.27.

1. Să se precizeze constanta de timp τ_i a amplificatorului integrator *AI*, știind că valoarea maximă a tensiunii sale de ieșire este $u_{ieșmax}=12$ V.

2. Să se stabilească relația dintre frecvența f_e a impulsurilor produse de generatorul de frecvență etalon *GFE* și tensiunea de referință U_r astfel încît numărul de impulsuri n_2 numărat de numărătorul zecimal *NZ* în poziția 2 a comutatorului *K* să fie un multiplu zecimal al tensiunii măsurate U_x.

Soluție. 1. Între tensiunea de intrare u_{int} și cea de ieșire $u_{ieș}$ a amplificatorului integrator *AI* are loc relația :

$$u_{ieș}=\frac{1}{\tau_i}\int_0^t u_{int}\,dt.$$

Valoarea maximă $u_{ieșmax}$ a tensiunii de ieșire are loc la măsurarea tensiunii $U=1{,}2$ V corespunzătoare intervalului de măsurare:

$$u_{ieșmax}=\frac{1}{\tau_i}\int_0^{t_1} U dt,$$

de unde

$$\tau_i=\frac{t_1 U}{u_{ieșmax}}=\frac{0{,}02\cdot 1{,}2}{12}=2\cdot 10^{-3}\ \text{s}.$$

2. În intervalul de timp t_1, în care prin comutatorul *K* se aplică la intrarea amplificatorului integrator *AI* tensiunea U_x, tensiunea de la ieșirea acestuia atinge valoarea :

$$u_{ieș1}=\frac{1}{\tau_i}\int_0^{t_1} U_x\ dt=\frac{t_1 U_x}{\tau_i}=\frac{0{,}02\cdot 0{,}95874}{2\cdot 10^{-3}}=9{,}5874\ \text{V}.$$

Intervalul de timp t_2, în care prin aplicarea tensiunii de referință U_r tensiunea de la ieșirea amplificatorului integrator AI devine din nou egală cu zero se determină din relația

$$u_{ieș1}-\frac{1}{\tau_i}\int_0^{t_2} U_r\ dt=0$$

sau

$$t_2 = \frac{\tau_i u_{ieşi}}{U_r} = \frac{t_1 U_x}{U_r}.$$

Numărul de impulsuri numărate de numărătorul zecimal NZ în intervalul de timp t_2 este :

$$n_2 = f_e t_2 = \frac{f_e t_1 U_x}{U_r}.$$

Dacă acest număr de impulsuri este un multiplu zecimal al tensiunii măsurate U_x, atunci :

$$n_2 = 10^k U_x$$

şi

$$\frac{f_e}{U_r} = \frac{10^k}{t_1} = \frac{10^k}{0{,}02} = 5 \cdot 10^{k+1}\ \text{Hz/V},$$

în care k este un număr întreg. Ţinînd seama de intervalul de măsurare şi de rezoluţia voltmetrului, se constată că rezultatul măsurării apare sub forma a 6 cifre semnificative, din care 5 sînt subunitare. Numărul de impulsuri n_2 fiind neapărat un număr întreg, rezultă $k \geqslant 5$. Prin urmare între frecvenţa etalon f_e a generatorului de frecvenţă etalon GFE şi tensiunea de referinţă U_r are loc relaţia

$$\frac{f_e}{U_r} = (5 \cdot 10^6,\ 5 \cdot 10^7,\ \ldots)\ \text{Hz/V}.$$

Problema 2.1.26. Un voltmetru numeric cu dublă integrare (vezi problema 2.1.25) este destinat măsurării tensiunii continue. Să se studieze comportarea voltmetrului în situaţia, în care tensiunea continuă, ce se măsoară, este însoţită de o tensiune alternativă perturbatoare cu frecvenţa f_x, intervalul de timp corespunzător primei integrări fiind t_1.

Soluţie. Tensiunea aplicată voltmetrului este :

$$u_x = U_{xc} + U_{xam} \sin(2\pi f_x t + \varphi),$$

unde U_{xc} este tensiunea continuă, U_{xam} amplitudinea şi φ faza tensiunii alternative perturbatoare.

Pe baza soluţiei problemei 2.1.25 se afirmă că tensiunea de la ieşirea amplificatorului integrator AI are la sfîrşitul intervalului de timp t_1 corespunzător primei integrări valoarea :

$$u'_{ieşi} = \frac{1}{\tau_i}\int_0^{t_1} u_x \mathrm{d}t = \frac{t_1 U_{xc}}{\tau_i} + \frac{U_{xam}}{2\pi f_x \tau_i}[\cos\varphi - \cos(2\pi f_x t_1 + \varphi)] = u_{ieşi} +$$

$$+ \frac{U_{xam}}{\pi f_x \tau_i} \sin(\pi f_x t_1 + \varphi) \sin \pi f_x t_1,$$

în care $u_{ieşi}$ este tensiunea de ieşire corespunzătoare tensiunii continue U_{xc}, iar τ_i constanta de timp a amplificatorului integrator. Tensiunea alternativă

perturbatoare produce o eroare de măsurare a cărei valoare relativă procentuală este :

$$E_r = \frac{100\,(u'_{ieşl} - u_{ieşl})}{u_{ieşl}} = \frac{100\,U_{xam}}{f_x t_1 U_{xc}} \sin(\pi f_x t_1 + \varphi) \sin \pi f_x t_1.$$

Dacă

$$f_x t_1 = k,$$

k fiind un număr întreg, atunci această eroare de măsurare este egală cu zero.

Voltmetrul numeric cu dublă integrare din problema 2.1.25 este astfel realizat încît la măsurarea tensiunii continue eroarea de măsurare provocată de toate armonicele tensiunii alternative perturbatoare, ce provine de la reţeaua de c.a. de frecvenţă industrială $f=50$ Hz, să fie egală cu zero. Pentru acest voltmetru

$$nft_1 = n \cdot 50 \cdot 0{,}02 = n,$$

unde n este un număr întreg, corespunzînd ordinului armonicii tensiunii alternative perturbatoare.

Problema 2.1.27. La măsurarea curentului pulsatoriu

$$i = 3{,}73\,|\sin 314\,t|,\ [\mathrm{A}\ ;\ \mathrm{s}]$$

se leagă în serie ampermetrele din tabelul 2.1.5.

Tabelul 2.1.5

Ampermetrul	Tipul ampermetrului	Intervalul de măsurare [A]	Scara [div]	Clasa de precizie
1	magnetoelectric	6	60	1
2	magnetoelectric cu redresarea ambelor alternanţe	6	60	1,5
3	feromagnetic	5	100	0,5
4	electrodinamic	10	10	1

1. Să se precizeze natura valorii măsurate de fiecare ampermetru.
2. Să se calculeze indicaţia şi eroarea relativă procentuală limită a ei în cazul fiecăruia dintre ampermetre.
3. Să se determine factorul de formă k_f al curentului pulsatoriu pe baza indicaţiei ampermetrelor.

Soluţie. 1, 2. Notînd cu I_{med} valoarea medie şi cu I valoarea efectivă a curentului pulsatoriu se obţin rezultatele din tabelul 2.1.6.

Tabelul 2.1.6

Ampermetrul	Natura valorii măsurate	Indicația		Eroarea relativă procentuală limită
		[A]	[div]	[%]
1	I_{med}	2,37	23,7	±2,53
2	1,11 I_{med}	2,64	26,4	±3,42
3	I	2,64	52,8	±0,95
4	I	2,64	2,64	±3,79

3. Factorul de formă este :

$$k_f = \frac{I}{I_{med}} = \frac{2,64}{2,37} = 1,11.$$

Problema 2.1.28. La măsurarea unei tensiuni se leagă în paralel mai multe voltmetre, obținîndu-se indicațiile din tabelul 2.1.7.

Tabelul 2.1.7

Voltmetrul	Tipul voltmetrului	Intervalul de măsurare	Scara	Indicația	Clasa de precizie
		[V]	[div]	[div]	
1	magnetoelectric	300	30	0	1
2	magnetoelectric cu redresarea unei alternanțe	300	30	23,7	2,5
3	feromagnetic	600	150	27	1,5
4	electrostatic	500	100	21,6	1,5

1. Să se precizeze natura valorii măsurate de fiecare voltmetru.
2. Să se calculeze tensiunea măsurată și eroarea relativă procentuală limită a măsurării ei în cazul fiecăruia dintre voltmetre.
3. Să se determine factorul de formă al tensiunii măsurate.

Soluție. 1, 2. În tabelul 2.1.8 s-au redat rezultatele cerute în enunț, notîndu-se cu U_{medT} valoarea medie pe o perioadă, cu $U_{medT/2}$ valoarea medie pe o semiperioadă și cu U valoarea efectivă a tensiunii măsurate.

3. Factorul de formă este :

$$k_f = \frac{U}{U_{medT/2}} = \frac{108}{\frac{237}{2,22}} = 1,01.$$

Tabelul 2.1.8

Volt-metrul	Natura valorii măsurate	Indicația [V]	Eroarea relativă procentuală limită [%]
1	U_{medT}	0	$\pm\infty$
2	$2{,}22\, U_{medT/2}$	237	$\pm 3{,}15$
3	U	108	$\pm 8{,}31$
4	U	108	$\pm 6{,}93$

Problema 2.1.29. Voltmetrele din tabelul 2.1.9 se leagă în paralel la tensiunea alternativă $U=122$ V.

Tabelul 2.1.9

Volt-metrul	Tipul voltmetrului	Intervalul de măsurare [V]	Scara [div]	Clasa de precizie
1	magnetoelectric cu redresor	150	60	2,5
2	feromagnetic	130	130	1,5
3	electrodinamic	250	100	0,5
4	electrostatic	250	50	1

Să se precizeze limitele între care este cuprinsă indicația fiecărui voltmetru.

Soluție. Conform relațiilor (1.5) și (1.3), eroarea absolută limită corespunzătoare indicației unui aparat de măsură cu eroarea raportată procentuală limită $E_{R\lim}$ și intervalul de măsurare X_c este :

$$E_{\lim}=\frac{E_{R\lim}X_c}{100}.$$

Ținînd seama de constantele voltmetrelor se obțin datele din tabelul 2.1.10.

Problema 2.1.30. Se măsoară tensiunea continuă $U=9{,}37$ V cu un voltmetru analogic și cu unul numeric. Voltmetrul analogic are intervalul de măsurare $U_{ca}=15$ V și clasa de precizie 0,2, iar voltmetrul numeric intervalul de măsurare $U_{cn}=12$ V, clasa de precizie 0,05 și rezoluția 1 mV. Să se arate între ce limite se află indicațiile celor două voltmetre, știind că clasele lor de

Tabelul 2.1.10

Volt-metrul	Limitele indicației [div]	Observații
1	$48{,}8\pm 1{,}5$	numai în tens. alt. sin.
2	$12{,}2\pm 2{,}25$	
3	$48{,}8\pm 0{,}5$	
4	$24{,}4\pm 0{,}5$	

precizie s-au stabilit ca erori raportate procentuale limită pe baza valorilor convenționale U_{ca} și U_{cn}.

Soluție. Conform relației (1.4), eroarea absolută limită aferentă măsurării tensiunii cu voltmetrul analogic este

$$E_{lima}=\frac{(\pm 0,2)\,U_{ca}}{100}=\frac{(\pm 0,2)\cdot 15}{100}=\pm 0,03\ \mathrm{V}=\pm 30\ \mathrm{mV}.$$

Prin urmare, indicația voltmetrului analogic are valoarea cuprinsă între limitele $(9,37\pm 0,03)$ V, adică între 9,34 V și 9,40 V.

La măsurarea tensiunii cu voltmetrul numeric, pe lîngă eroarea absolută limită

$$E_{limn}=\frac{(\pm 0,05)\,U_{cn}}{100}=\frac{(\pm 0,05)\cdot 12}{100}=\pm 6\cdot 10^{-3}\ \mathrm{V}=\pm 6\ \mathrm{mV},$$

rezultatul măsurării este afectat de eroarea de cuantizare ± 1 mV corespunzătoare rezoluției. Ca urmare, indicația voltmetrului numeric are valorea cuprinsă între limitele $(9,37\pm 6\cdot 10^{-3}\pm 1\cdot 10^{-3})$ V, adică între 9,363 V și 9,377 V.

Problema 2.1.31. Două voltmetre numerice de tensiune alternativă au intervalul de măsurare $U_c=1$ V. Ercarea de măsurare a primului voltmetru reprezintă $\pm 0,05\%$ din valoarea măsurată și $\pm 0,03\%$ din intervalul de măsurare, în timp ce a celui de al doilea voltmetru este $\pm 0,1\%$ din valoarea măsurată și $\pm 0,025\%$ din intervalul de măsurare. Erorile de cuantizare fiind înglobate în al doilea termen al erorii de măsurare al fiecărui voltmetru, să se precizeze :

1. Care din cele două voltmetre permite măsurarea mai precisă a tensiunii alternative $U=0,5$ V ?

2. La ce tensiune alternativă U_x erorile de măsurare ale celor două voltmetre sînt egale ?

Soluție. 1. Eroarea absolută de măsurare a tensiunii alternative $U=0,5$ V cu primul voltmetru este

$$E_1=\frac{(\pm 0,05)\,U}{100}+\frac{(\pm 0,03)\,U_c}{100}=\frac{(\pm 0,05)\cdot 0,5}{100}+\frac{(\pm 0,03)\cdot 1}{100}=\pm 5,5\cdot 10^{-4}\ \mathrm{V},$$

iar cu cel de al doilea

$$E_2=\frac{(\pm 0,1)\,U}{100}+\frac{(\pm 0,025)\,U_c}{100}=\frac{(\pm 0,1)\cdot 0,5}{100}+\frac{(\pm 0,025)\cdot 1}{100}=\pm 7,5\cdot 10^{-4}\ \mathrm{V}.$$

2. Are loc relația :

$$\frac{(\pm 0,05)\,U_x}{100}+\frac{(\pm 0,03)\,U_c}{100}=\frac{(\pm 0,1)\,U_x}{100}+\frac{(\pm 0,025)\,U_c}{100}$$

sau

$$5U_x+3U_c=10U_x+2,5U_c,$$

de unde rezultă

$$U_x=0,1\,U_c=0,1\cdot 1=0,1\ \mathrm{V}.$$

La măsurarea tensiunilor alternative mai mici decît U_x al doilea voltmetru este mai precis, la măsurarea celor mai mari decît U_x primul voltmetru prezintă precizia mai ridicată.

Problema 2.1.32. O sursă de t.e.m. continuă are rezistenţa interioară R_s. Se măsoară tensiunea la bornele acestei surse cu un voltmetru avînd rezistenţa interioară R_v şi se consideră că indicaţia voltmetrului reprezintă tocmai t.e.m. a sursei. Să se reprezinte grafic dependenţa erorii relative procentuale sistematice de măsurare a t.e.m. faţă de raportul R_v/R_s.

Soluţie. Fie U_e t.e.m. a sursei şi U tensiunea măsurată de voltmetru. Între ele există relaţia

$$U=\frac{R_v}{R_s+R_v}U_e.$$

Conform relaţiilor (1.1) şi (1.2), eroarea relativă procentuală sistematică de măsurare a t.e.m. este:

$$E_{rsUe}=\frac{100\,(U-U_e)}{U_e}=\frac{100\,\dfrac{R_v}{R_s+R_v}U_e-U_e}{U_e}=-\frac{100}{1+\dfrac{R_v}{R_s}}.$$

Această dependenţă este redată grafic la scară logaritmică în fig. 2.1.28. Cu cît rezistenţa interioară R_v a voltmetrului este mai mare în raport cu rezistenţa interioară R_s a sursei de t.e.m. cu atît eroarea relativă procentuală sistematică e mai scăzută.

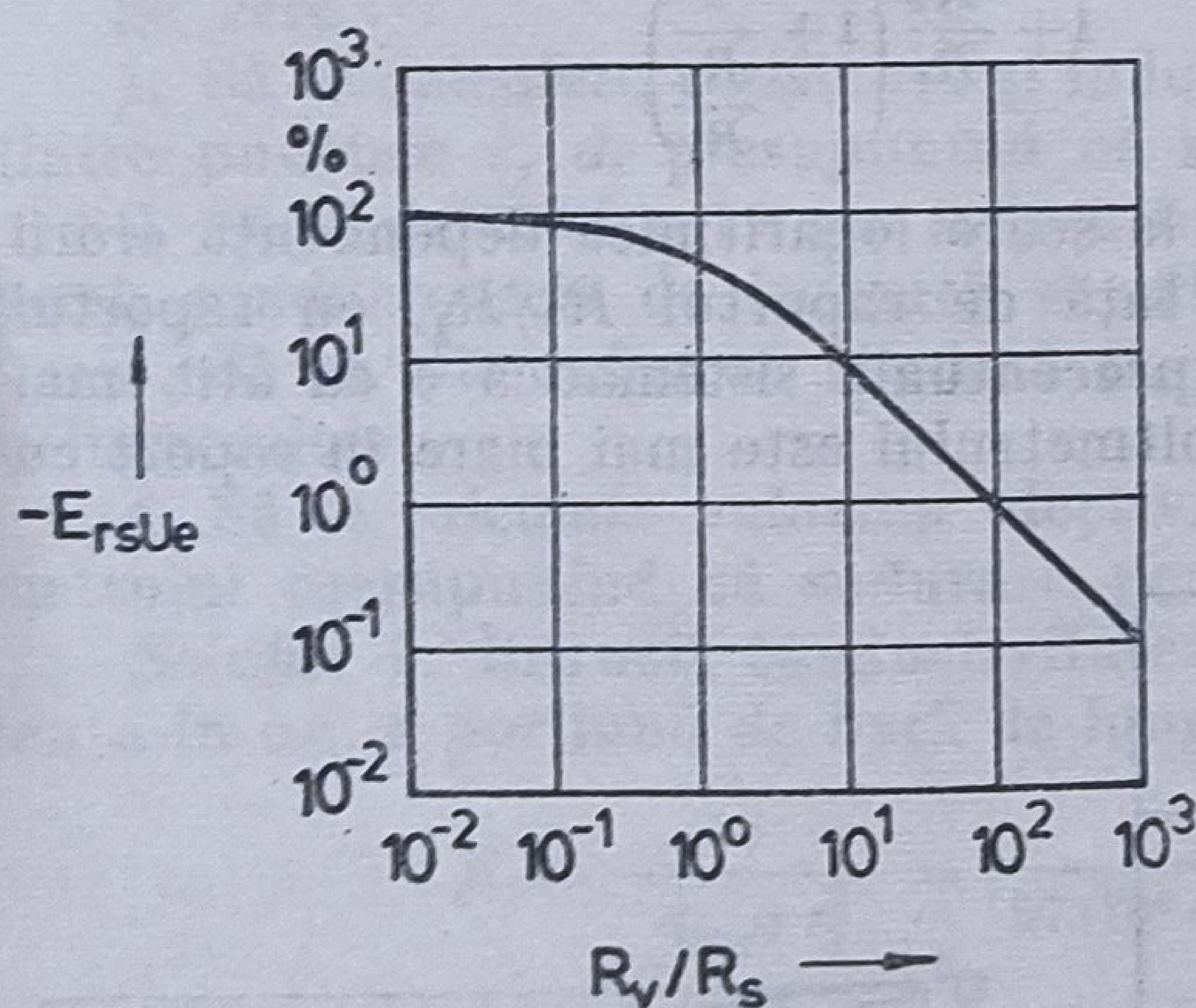


Fig. 2.1.28.

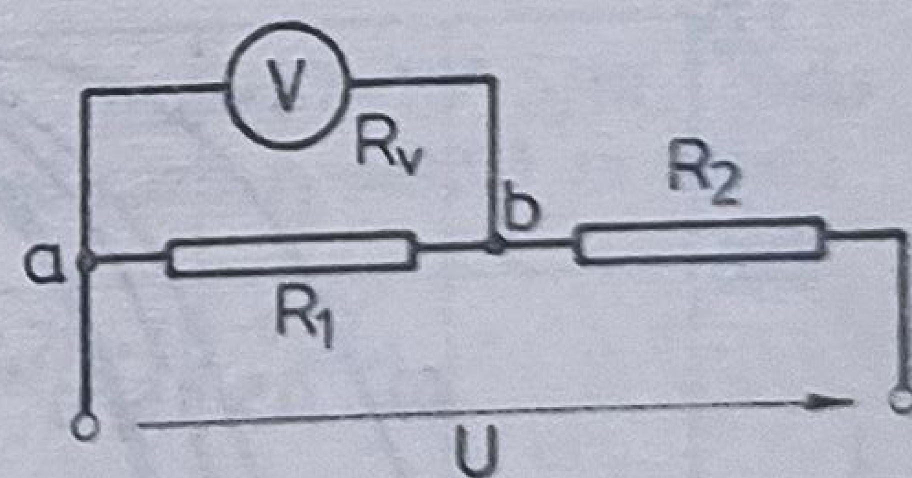


Fig. 2.1.29.

Problema 2.1.33. Un divizor de tensiune alcătuit din două rezistoare cu rezistenţele R_1 şi R_2 este alimentat la tensiunea constantă U (fig. 2.1.29). Se măsoară tensiunea dintre punctele a şi b cu un voltmetru avînd rezistenţa interioară R_v.

1. Să se reprezinte grafic variaţia raportului U_1'/U_1 în funcţie de raportul R_v/R_1 cu R_2/R_1 ca parametru, ştiind că U_1' este tensiunea între a şi b în prezenţa voltmetrului, iar U_1 tensiunea între aceleaşi puncte fără voltmetru.

2. Să se reprezinte grafic eroarea relativă procentuală sistematică E_{rsU_1}, produsă de voltmetru la măsurarea tensiunii U_1, în funcţie de raportul R_v/R_1.

Soluție. 1. Înainte de conectarea voltmetrului tensiunea între punctele *a* și *b* este:

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = U,$$

iar după conectarea voltmetrului,

$$U_1' = \frac{R_1 R_v}{R_1 R_v + R_2 R_v + R_1 R_2} U.$$

Deci:

$$\frac{U_1'}{U_1} = \frac{1}{1 + \dfrac{\dfrac{R_2}{R_1}}{\dfrac{R_v}{R_1}\left(1 + \dfrac{R_2}{R_1}\right)}}.$$

Această dependență este redată grafic în fig. 2.1.30, raportul R_v/R_1 fiind reprezentat la scară logaritmică.

2. Conform relațiilor (1.1) și (1.2) eroarea relativă procentuală sistematică E_{rsU_1} are valoarea:

$$E_{rsU_1} = \frac{100\,(U_1' - U_1)}{U_1} = -\frac{100}{1 + \dfrac{R_v}{R_1}\left(1 + \dfrac{1}{\dfrac{R_2}{R_1}}\right)}.$$

În fig. 2.1.31 s-a reprezentat grafic la scară logaritmică dependența erorii relative procentuale sistematice E_{rsU_1} față de raportul R_v/R_1, cu raportul R_2/R_1 ca parametru. Eroarea relativă procentuală sistematică e cu atît mai mică cu cît rezistența interioară R_v a voltmetrului este mai mare în raport cu rezistențele R_1 și R_2.

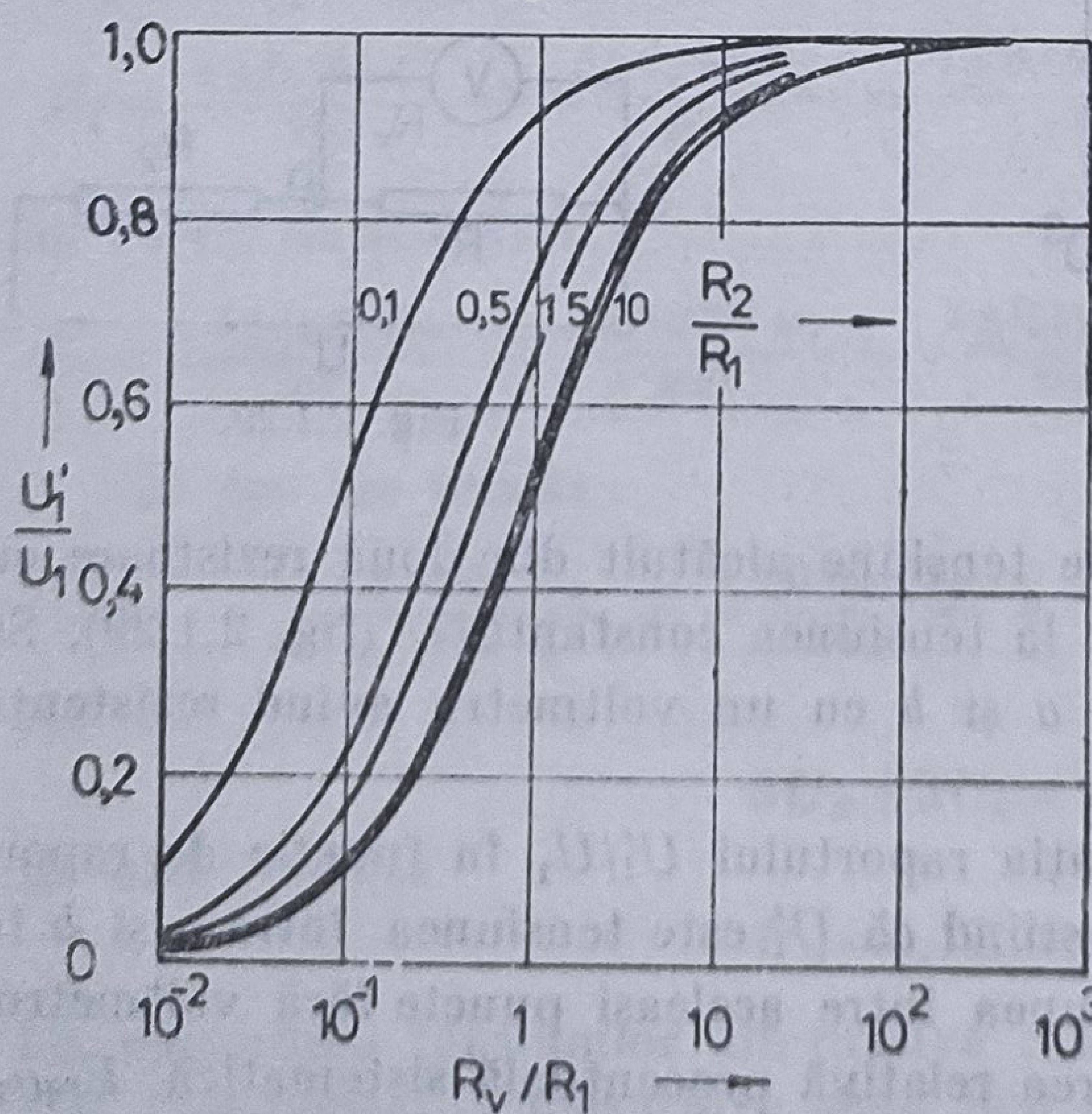


Fig. 2.1.30.

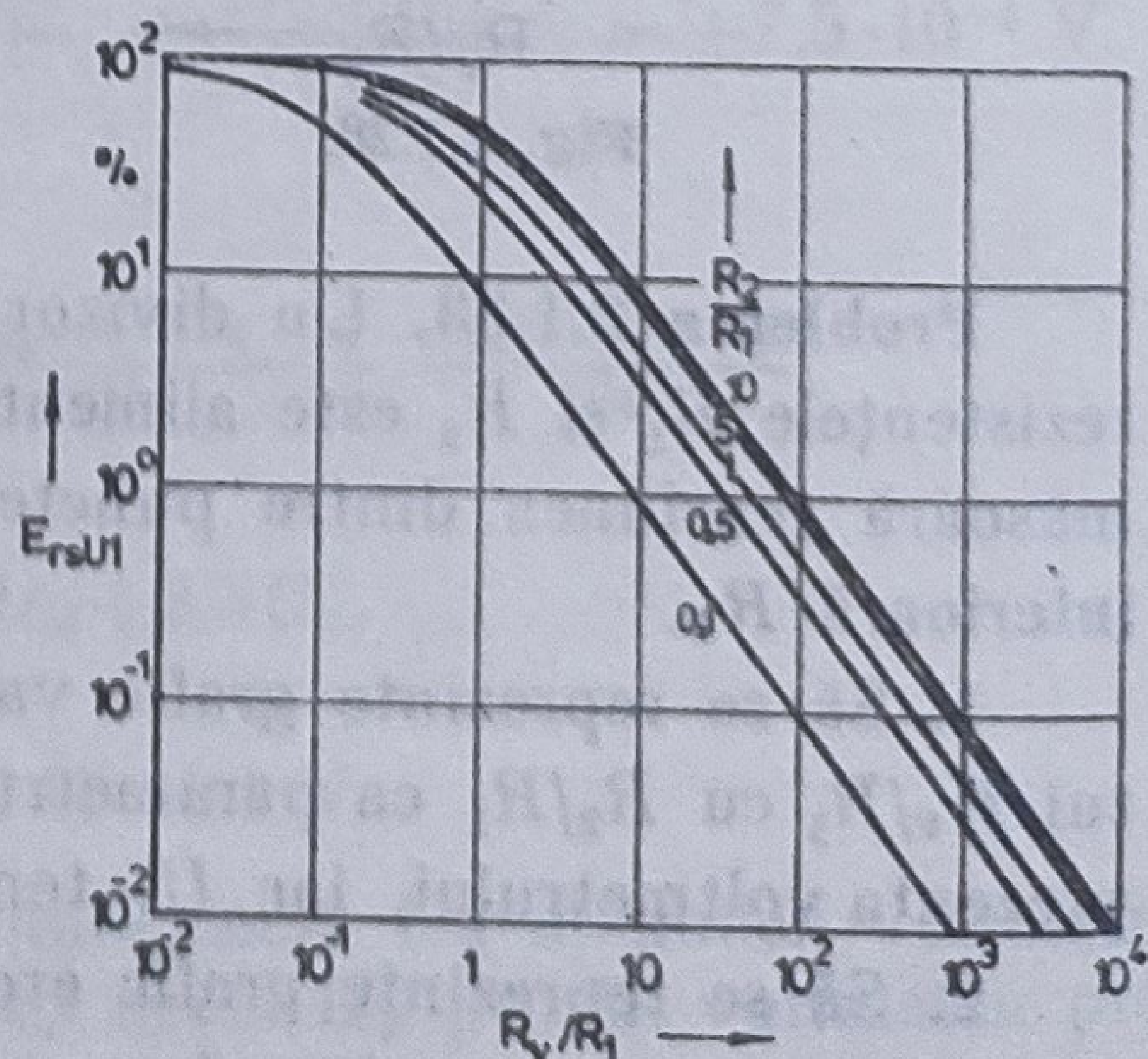


Fig. 2.1.31.

Problema 2.1.34. Într-o instalaţie de c.a. de joasă tensiune de frecvenţă industrială $f=50$ Hz se înnădeşte prin sudare o bară cilindrică de cupru, avînd diametrul $2r_1=0{,}02$ m. Prin intermediul unui milivoltmetru se măsoară căderea de tensiune produsă de curentul de sarcină, avînd valoarea efectivă $I=500$ A, între punctele c, d aflate la distanţa $l=0{,}5$ m pe generatoarea barei de o parte şi alta a sudurii, urmărindu-se în acest fel determinarea rezistenţei de contact a sudurii. Deoarece cîmpul magnetic intens produs de curentul de sarcină poate influenţa indicaţia milivoltmetrului, acesta se plasează la distanţa $r_2=2$ m de axul barei, conform fig. 2.1.32. Se presupune că:

1. Rezistenţa interioară R_v a voltmetrului este foarte mare în raport cu rezistenţa barei şi a conductoarelor de legătură.

2. Secţiunea conductoarelor de legătură este neglijabilă.

3. Bara este foarte lungă astfel încît cîmpul magnetic produs de curentul de sarcină prezintă simetrie axială.

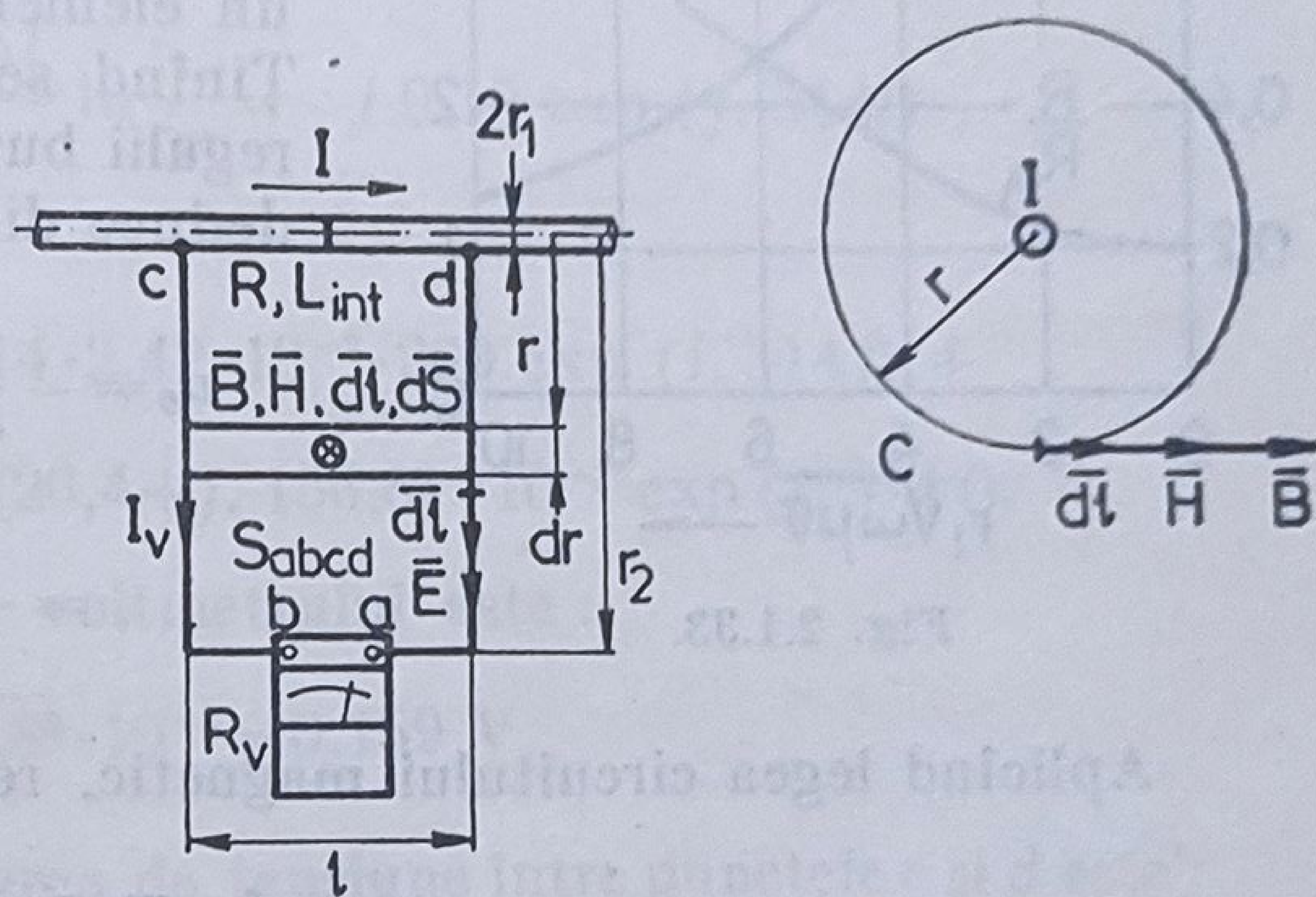


Fig. 2.1.32.

Se cere:

1. Să se calculeze rezistenţa şi inductivitatea interioară a porţiunii de bară dintre punctele c, d, presupunînd că sudura este perfectă.

2. Să se determine t.e.m. indusă în conturul $abcd$ format de generatoarea barei, conductoarele de legătură şi milivoltmetru.

3. Să se afle valoarea maximă B_{m2} a inducţiei magnetice în dreptul milivoltmetrului.

4. Să se calculeze valoarea efectivă U a tensiunii care se aplică milivoltmetrului presupunînd că sudura e perfectă.

Soluţie. 1. Întrucît conductivitatea cuprului este $\sigma_{Cu}=57\cdot10^6$ S/m, rezistenţa în c.c. a porţiunii de bară de lungime $l=0{,}5$ m şi raza $r_1=0{,}01$ m este:

$$R_0=\frac{l}{\sigma_{Cu}\pi r_1^2}=\frac{0{,}5}{57\cdot10^6\cdot3{,}14\cdot0{,}01^2}=2{,}79\cdot10^{-5}\ \Omega.$$

Permeabilitatea magnetică a cuprului fiind practic egală cu $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ H/m, inductivitatea interioară în c. c. a porţiunii de bară luată în considerare este:

$$L_{int0}=\frac{\mu_0 l}{8\pi}=\frac{4\cdot3{,}14\cdot10^{-7}\cdot0{,}5}{8\cdot3{,}14}=0{,}25\cdot10^{-7}\ \text{H}.$$

Datorită efectului pelicular, rezistenţa şi inductivitatea interioară în c.a. diferă de cele din c.c. Cunoscînd frecvenţa circulară $\omega=2\pi f=2\cdot3{,}14\cdot50=$ $=314$ rad/s a c.a., se determină parametrul

$$r_1\sqrt{\omega\mu_0\sigma_{Cu}}=0{,}01\sqrt{314\cdot4\cdot3{,}14\cdot10^{-7}\cdot57\cdot10^6}=1{,}5.$$

În funcţie de acest parametru se deduc din diagrama reprezentată în fig. 2.1.33 rapoartele $R/R_0=1{,}05$ şi $L_{int}/L_{int0}=0{,}97$, R şi L_{int} fiind rezistenţa respectiv inductivitatea porţiunii de bară în c.a. Rezultă

$$R=1{,}05R_0=1{,}05\cdot2{,}79\cdot10^{-5}=2{,}93\cdot10^{-5}\ \Omega$$

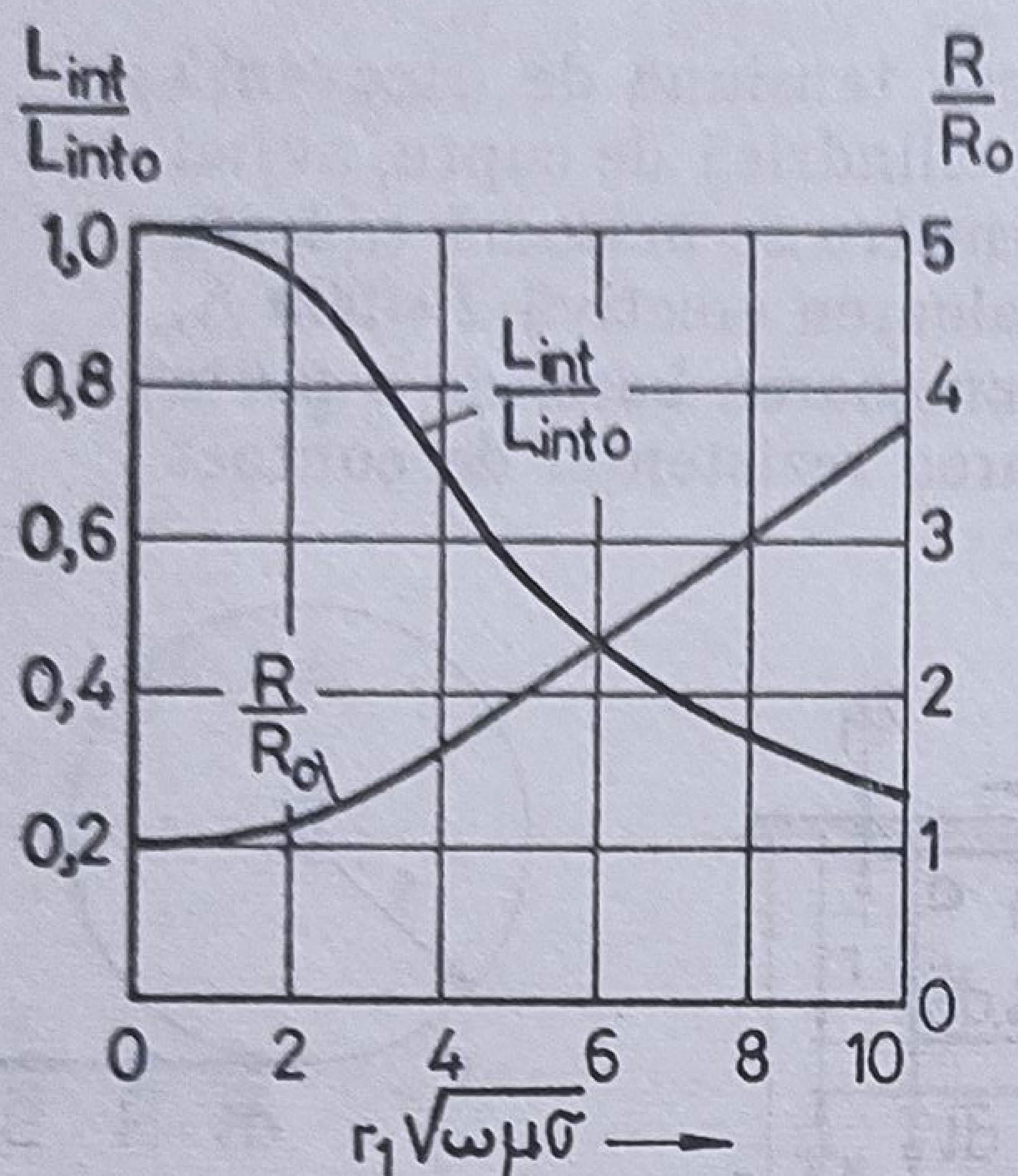


Fig. 2.1.33.

şi

$$L_{int}=0{,}97L_{into}=0{,}97\cdot 0{,}25\cdot 10^{-7}=2{,}42\cdot 10^{-8}\ \text{H}.$$

2. Fie $\overline{\mathbf{B}}$ inducţia magnetică, $\overline{\mathbf{H}}$ intensitatea cîmpului magnetic, $\overline{d\mathbf{S}}$ un element de suprafaţă al suprafeţei S_{abcd} limitată de conturul *abcd*, $\overline{dl}$ un element de lungime al conturului circular *C*. Ţinînd seama de sensul pozitiv admis pe baza regulii burghiului, valoarea momentană a t.e.m. se deduce din legea inducţiei electromagnetice

$$u_e=-\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_{abcd}}(\overline{\mathbf{B}}d\overline{\mathbf{S}})=-\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_{abcd}}(\mu_0\overline{\mathbf{H}}d\overline{\mathbf{S}})=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_{abcd}}\mu_0 H dS=-\frac{\partial}{\partial t}\int_{r_1}^{r_2}\mu_0 H l dr.$$

Aplicînd legea circuitului magnetic, rezultă

$$\oint_C(\overline{\mathbf{H}}d\overline{\mathbf{l}})=\sqrt{2}I\sin\omega t$$

şi

$$H=\frac{\sqrt{2}I}{2\pi r}\sin\omega t.$$

Prin înlocuire se obţine:

$$u_e=-\frac{\partial}{\partial t}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\sqrt{2}\mu_0 I l}{2\pi r}\sin\omega t\,dr=-\frac{\sqrt{2}\mu_0 I l\,\omega}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}\cos\omega t=$$

$$=-\frac{1{,}41\cdot 4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\cdot 900\cdot 0{,}5\cdot 314}{2\cdot 3{,}14}\ln\frac{2}{0{,}01}\cos 314t=$$

$$=-0{,}211\cos 314t,\ [\text{V}\,;\ \text{s}].$$

Valoarea efectivă a acestei t. e. m. alternative sinusoidale este $U_e=0{,}15$ V.

3. Adoptînd notaţiile de la punctul 2 se scrie:

$$B_{m2}=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi r_2}=\frac{1{,}41\cdot 4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\cdot 900}{2\cdot 3{,}14\cdot 2}=1{,}27\cdot 10^{-4}\ \text{T}.$$

4. Fie $\overline{\mathbf{E}}$ intensitatea cîmpului electric într-un punct al conturului *abcd*, $\overline{\mathbf{dl}}$ un element de lungime al acestui contur, i şi i_v valorile momentane ale curenţilor prin bară şi prin milivoltmetru. Ţinînd seama de ipotezele din enunţ şi de sensurile pozitive admise în fig. 2.1.32, rezultă:

$$\oint_{abcd}(\overline{\mathbf{E}}d\overline{\mathbf{l}})=u_e-L_{int}\frac{di}{dt}=-R_v i_v+Ri.$$

Tensiunea la bornele milivoltmetrului este:

$$u_v=R_v i_v=-u_e+L_{int}\frac{di}{dt}+Ri.$$

Trecînd la mărimi complexe,

$$\underline{U}_v = \underline{U}_e + j\omega L_{int}\underline{I} + R\underline{I},$$

în care

$$\underline{I} = I \exp (j\,\omega t) = 900 \exp (j.\ 314t).$$

Dar conform punctului 2,

$$\underline{U}_e = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu_0 lI}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}\right) = -\frac{j\mu_0 l\omega I}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} = -j\ 0{,}15 \exp (j.\ 314t)$$

şi deci :

$$\underline{U}_v = j.\ 0{,}15 \exp (j.\ 314\,t) + j.\ 314\cdot 2{,}42\cdot 10^{-8}\cdot 900 \exp (j.\ 314\,t) +$$
$$+ 2{,}93\cdot 10^{-5}\cdot 900 \exp (j.\ 314\,t) = (26{,}4 + j.\ 156{,}8)\cdot 10^{-3} \exp (j.\ 314\,t).$$

Valoarea efectivă a tensiunii aplicată voltmetrului este :

$$U_v = \sqrt{26{,}4^2 + 156{,}8^2}\cdot 10^{-3} = 0{,}159\ \text{V}.$$

Presupunînd sudura perfectă, căderea de tensiune între punctele *c* şi *d* este:

$$\underline{U}_{cd} = j\omega L_{int}\underline{I} + R\underline{I} = j.\ 314\cdot 2{,}42\cdot 10^{-8}\cdot 900 \exp (j.\ 314\,t) +$$
$$+ 2{,}93\cdot 10^{-5}\cdot 900 \exp (j.\ 314\,t) = (26{,}4 + j.\ 6{,}8)\ 10^{-3} \exp (j.\ 314\,t),$$

valoarea ei efectivă fiind :

$$U_{cd} = \sqrt{26{,}4^2 + 6{,}8^2}\cdot 10^{-3} = 0{,}0272\ \text{V}.$$

Se remarca faptul că t.e.m. indusă în conturul *abcd* influenţează pregnant rezultatul măsurării. Pentru a elimina t.e.m. indusă se recomandă legarea milivoltmetrului prin conductoare împletite, la care suprafaţa corespunzătoare conturului *abcd* şi prin urmare t.e.m. indusă în ea sînt neglijabile (fig. 2.1.34). În acelaşi scop se utilizează adeseori conductoare ecranate.

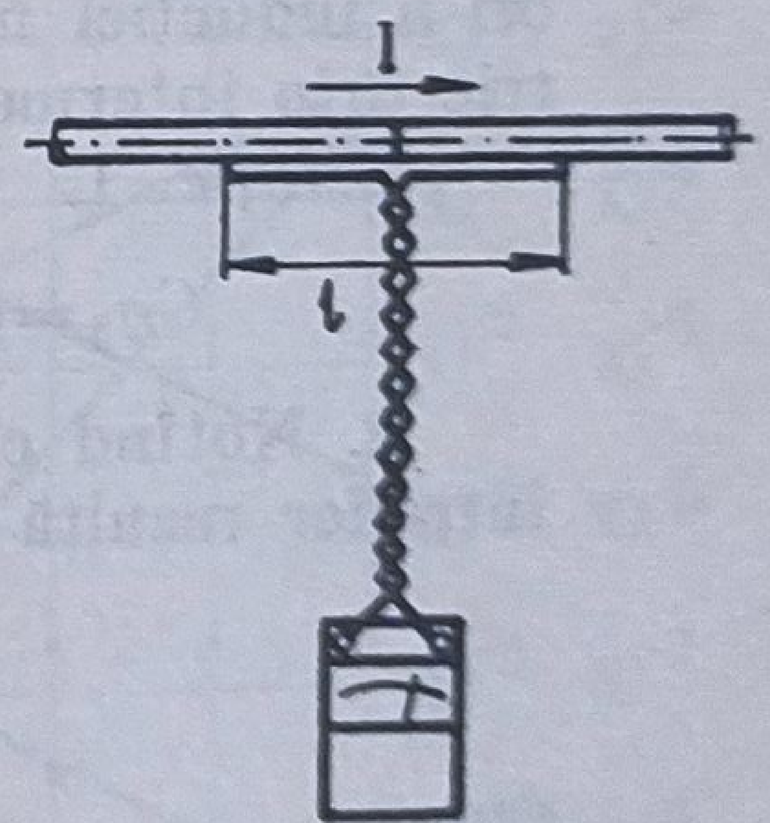


Fig. 2.1.34.

T.e.m. alternative induse în circuite de măsurare influenţează în mod deosebit rezultatele măsurărilor ce se efectuează la frecvenţe mai înalte decît cea industrială. Utilizarea în acest caz a conductoarelor ecranate este imperios necesară.

2.2 GALVANOMETRE OBIŞNUITE ŞI GALVANOMETRE VIBRATOARE

Galvanometrele sînt aparate de măsură magnetoelectrice cu sensibilitatea deosebit de mare. Galvanometrele obişnuite se utilizează la măsurarea curenţilor continui şi a tensiunilor continue de valoare foarte mică, precum şi ca

indicatoare de nul de curent continuu. Galvanometrele vibratoare se folosesc ca indicatoare de nul selective de curent alternativ de frecvență corespunzătoare frecvențelor lor de rezonanță.

Pentru protejarea galvanometrelor obișnuite sau pentru micșorarea sensibilității galvanometrelor obișnuite se utilizează șunturi multiple.

Timpul de stabilizare al galvanometrelor obișnuite depinde de perioada oscilației libere și de gradul de amortizare aferente echipajelor lor mobile. Rezistența circuitului exterior galvanometrelor obișnuite influențează pronunțat gradul de amortizare și prin aceasta timpul de stabilizare. Acesta are valoarea minimă la amortizarea apropiată de cea critică.

Galvanometrele obișnuite și galvanometrele vibratoare nu au clasă de precizie, ca urmare constantele și sensibilitățile lor se cunosc cu aproximație. La nevoie aceste constante și sensibilități se determină mai precis, erorile lor de determinare depinzînd de erorile aferente mijloacelor de măsurare folosite în acest scop.

Problema 2.2.1. Un galvanometru obișnuit are rezistența interioară $R_g = 20\ \Omega$, rezistența exterioară critică $R_{ek1} = 50\ \Omega$ și constanta de curent $C_{I1} = 7 \cdot 10^{-9}$ Am/mm.

1. Să se determine constanta de tensiune C_{U1} a acestui galvanometru.
2. Știind că amortizarea galvanometrului obișnuit deconectat de circuitul exterior lui este neglijabilă, să se determine rezistența exterioară R_{ek2}, constanta de curent C_{I2} și constanta de tensiune C_{U2} în cazul micșorării de 1,83 ori a inducției magnetice în întrefierul dispozitivului de măsură magnetoelectric prin intermediul șuntului magnetic.

Soluție. 1.

$$C_{U1} = C_{I1}(R_g + R_{ek1}) = 7 \cdot 10^{-9} \cdot (20 + 50) = 4{,}9 \cdot 10^{-7}\ \text{Vm/mm}.$$

2. Notînd cu B_1 valoarea inițială și cu B_2 valoarea finală a inducției în întrefier rezultă :

$$\frac{R_g + R_{ek1}}{R_g + R_{ek2}} = \frac{B_1}{B_2},\quad \frac{C_{I2}}{C_{I1}} = \frac{B_1}{B_2}\ \text{și}\ \frac{C_{U1}}{C_{U2}} = \frac{B_1}{B_2},$$

sau

$$\frac{20 + 50}{20 + R_{ek2}} = 1{,}83,\qquad R_{ek2} = 0{,}9\ \Omega,$$

$$C_{I2} = 1{,}83 \cdot 7 \cdot 10^{-9} = 1{,}28 \cdot 10^{-8}\ \text{Am/mm}$$

și

$$C_{U2} = \frac{4{,}9 \cdot 10^{-7}}{1{,}83} = 2{,}68 \cdot 10^{-7}\ \text{Vm/mm}.$$

Prin urmare micșorarea inducției magnetice în întrefierul dispozitivului de măsură magnetoelectric atrage după sine creșterea constantei de curent și scăderea constantei de tensiune a galvanometrului obișnuit.

Problema 2.2.2. Un galvanometru obișnuit are perioada oscilațiilor libere $T_0 = 2$ s, rezistența interioară $R_g = 100\ \Omega$, rezistența exterioară critică $R_{ek} = 1\,400\ \Omega$ și constanta de curent $C_I = 10^{-9}$ Am/mm. Știind că amortizarea

galvanometrului deconectat de circuitul exterior lui este neglijabilă, să se determine momentul de inerție J al echipajului mobil față de axa de rotație și cuplul antagonist specific D al firului de suspensie.

Soluție. Între mărimile care caracterizează un galvanometru obișnuit există următoarele relații :

$$C_I = \frac{D}{2K}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \text{ și } R_{ek} + R_g = \frac{K^2}{2\sqrt{JD}},$$

în care K este o mărime constantă. Din aceste trei egalități rezultă :

$$J = \frac{C_I^2(R_{ek}+R_g)\cdot T_0^3}{\pi^3} = \frac{(10^{-6})^2\cdot(1\,400+100)\cdot 2^3}{3{,}14^3} = 3{,}88\cdot10^{-10}\ \text{kgm}^2$$

și

$$D = \frac{4C_I^2(R_{ek}+R_g)\cdot T_0}{\pi} = \frac{4\cdot(10^{-6})^2(1\,400+100)\cdot 2}{3{,}14} = 3{,}82\cdot10^{-9}\ \text{Nm/rad},$$

în care s-a considerat că $C_I = 10^{-6}$ A/rad.

Problema 2.2.3. Dispozitivul de măsură al unui galvanometru obișnuit are momentul de inerție al echipajului mobil față de axa de rotație $J = 4\cdot10^{-9}$ kgm², coeficientul de amortizare datorită frecării cu aerul $A_1 = 2{,}4\cdot10^{-11}$ Nms/rad, inducția magnetică în întrefier $B = 0{,}2$ T, secțiunea medie a ferestrei bobinei mobile $S = 5\cdot10^{-4}$ m² și numărul de spire al bobinei mobile $N = 150$ spire. Să se reprezinte grafic dependența perioadei oscilațiilor libere T_0, a rezistenței critice R_k, a constantei de curent C_I și a constantei de tensiune C_U față de cuplul antagonist specific D al firului de suspensie al echipajului mobil.

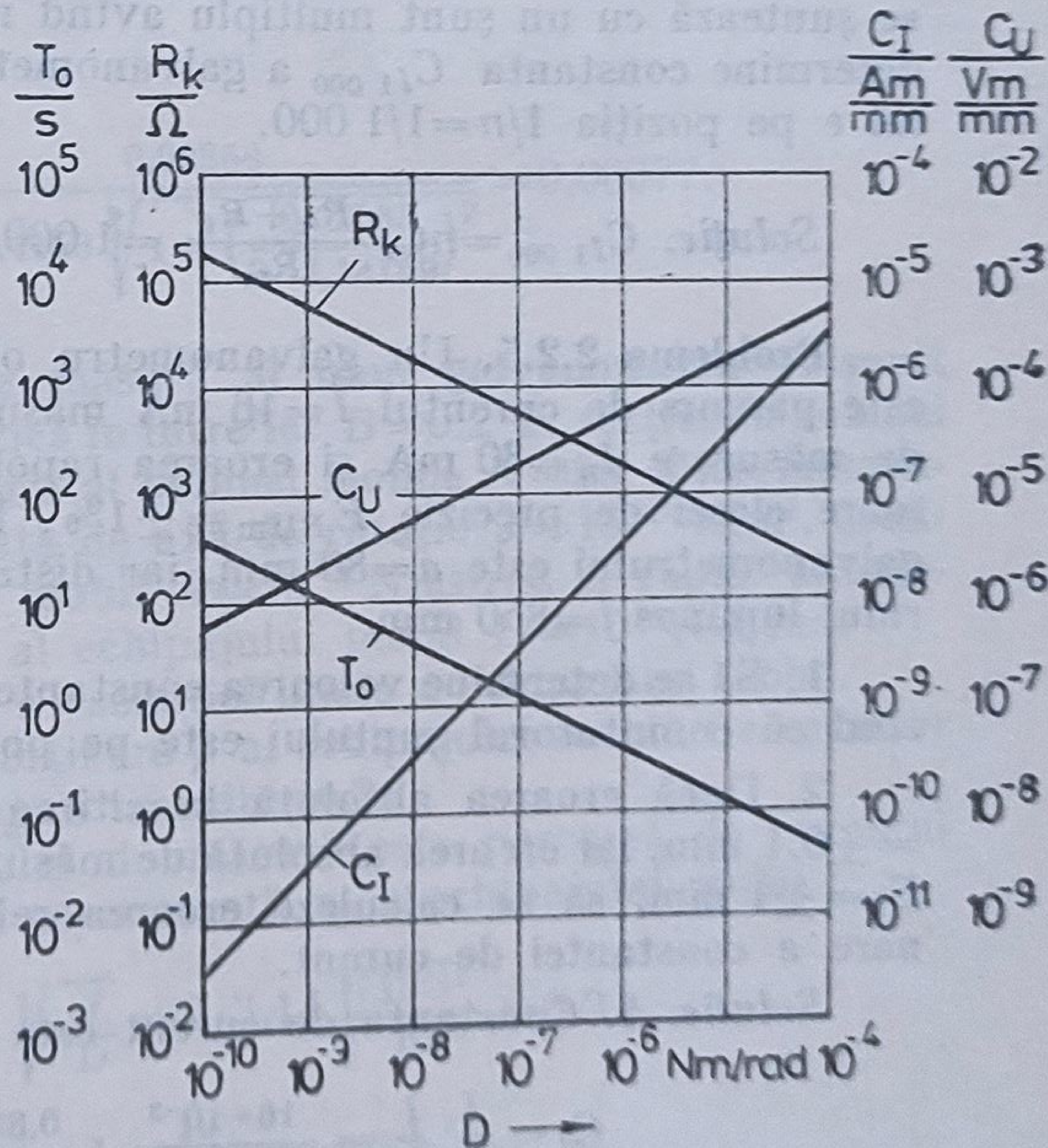


Fig. 2.2.1.

Soluție. Reprezentările grafice (fig. 2.2.1.) s-au redat la scară logaritmică pe baza relațiilor :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} = 2\cdot3{,}14\cdot\sqrt{\frac{4\cdot10^{-9}}{D}} = \frac{2\cdot3{,}14\cdot6{,}32\cdot10^{-5}}{\sqrt{D}} = \frac{3\cdot97\cdot10^{-4}}{\sqrt{D}}, \quad [\text{s}\,;\ \text{Nm/rad}]$$

$$R_k = \frac{B^2S^2N^2}{2\sqrt{JD}-A_1} = \frac{(0{,}2\cdot5\cdot10^{-4}\cdot150)^2}{2\sqrt{4\cdot10^{-9}D}-2{,}4\cdot10^{-11}} = \frac{2{,}25}{1{,}265\sqrt{D}-2{,}4\cdot10^{-7}}, \quad [\Omega\,;\ \text{Nm/rad}]$$

$$C_I = \frac{D}{2BSN} = \frac{D}{2 \cdot 0{,}2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 150} = \frac{D}{0{,}03}, \ [\text{A/rad}; \quad \text{Nm/rad}],$$

$$C_I = \frac{D}{30}, \ [\text{Am/mm}; \ \text{Nm/rad}],$$

$$C_U = \frac{BSND}{4\sqrt{JD} - 2A_1} = \frac{0{,}2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot D}{4\sqrt{4 \cdot 10^{-9} D} - 2 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-11}} = \frac{0{,}015D}{2{,}53 \cdot 10^{-4}\sqrt{D} - 4{,}8 \cdot 10^{-11}},$$

$$[\text{V/rad}; \ \text{Nm/rad}],$$

$$C_U = \frac{0{,}15\, D}{2{,}53\sqrt{D} - 4{,}8 \cdot 10^{-7}}, \ [\text{Vm/mm}; \ \text{Nm/rad}].$$

Se observă că cu cît cuplul antagonist specific D crește, cu atît perioada oscilațiilor libere T_0 și rezistența critică R_k scad, iar constantele de curent C_I și de tensiune C_U cresc.

Problema 2.2.4. Un galvanometru obișnuit cu indicator luminos interior, avînd constanta de curent $C_I = 10^{-8}$ A/div și rezistența interioară $R_g = 250\ \Omega$ se șuntează cu un șunt multiplu avînd rezistența totală $R_{s1} = 1\,500\ \Omega$. Să se determine constanta $C_{I1\,000}$ a galvanometrului șuntat cînd comutatorul șuntului e pe poziția $1/n = 1/1\,000$.

Soluție. $C_{I1\,000} = nC_I \dfrac{R_{s1} + R_g}{R_{s1}} = 1\,000 \cdot 10^{-8} \cdot \dfrac{1\,500 + 250}{1\,500} = 1{,}17 \cdot 10^{-5}$ A/div.

Problema 2.2.5. Un galvanometru obișnuit șuntat cu un șunt multiplu este parcurs de curentul $I = 16$ mA măsurat de un ampermetru cu intervalul de măsurare $I_n = 30$ mA și eroarea raportată procentuală limită corespunzătoare clasei de precizie $E_{R\lim} = \pm 1\%$. Numărul de diviziuni citit pe scara galvanometrului este $a = 80$ mm, iar distanța dintre scară și oglinda indicatorului luminos $l = 850$ mm.

1. Să se determine valoarea constantei de curent a galvanometrului, cunoscînd că comutatorul șuntului este pe poziția $1/n = 1/10\,000$.

2. Dacă eroarea absolută la citirea numărului de diviziuni este $E_a = \pm 0.1$ mm, iar eroarea absolută de măsurare a distanței dintre scară și oglindă $E_l = \pm 1$ mm, să se calculeze eroarea relativă procentuală limită de determinare a constantei de curent.

Soluție. 1. Constanta de curent este:

$$C_I = \frac{I}{n}\,\frac{l}{a} = \frac{16 \cdot 10^{-3}}{10\,000} \cdot \frac{0{,}85}{80} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \text{Am/mm}.$$

2. Conform relațiilor (1.7), (1.5) și (1.3), eroarea relativă procentuală limită de determinare a constantei de curent este:

$$E_{r\,\lim CI} = E_{r\lim I} + E_{r\lim a} + E_{r\lim l} = E_{R\lim}\frac{I_n}{I} + \frac{100E_a}{a} + \frac{100E_l}{l} =$$

$$= (\pm 1) \cdot \frac{30}{16} + \frac{100 \cdot (\pm 0{,}1)}{80} + \frac{100 \cdot (\pm 1)}{850} = \pm 2{,}12\%.$$

Problema 2.2.6. Echipajul mobil al unui galvanometru obişnuit deconectat din circuitul exterior lui oscilează în jurul poziţiei de zero, elongaţiile succesive fiind cele din tabelul 2.2.1.

Tabelul 2.2.1

α (stînga)	[div]	88	86	84	82
α (dreapta)	[div]	87	85	83	81

Să se determine gradul de amortizare β al galvanometrului obişnuit aflat în această situaţie.

Soluţie. Raportul de amortizare mediu are valoarea:

$$K_{med}=\frac{1}{6}\left(\frac{88}{86}+\frac{87}{85}+\frac{86}{84}+\frac{85}{83}+\frac{84}{82}+\frac{83}{81}\right)=1{,}02396,$$

iar decrementul logaritmic

$$\Lambda=\ln K_{med}=\ln\ 1{,}02396=0{,}02368.$$

Gradul de amortizare este:

$$\beta=\frac{\Lambda}{2\pi\sqrt{1+\frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}}=\frac{0{,}02368}{2\cdot 3{,}14159\sqrt{1+\left(\frac{0{,}02368}{2\cdot 3{,}14159}\right)^2}}=0{,}00377.$$

Problema 2.2.7. Dispozitivul de măsură al unui galvanometru obişnuit este caracterizat prin inducţia magnetică în întrefier $B=0{,}2$ T, secţiunea bobinei mobile $S=4\cdot 10^{-4}$ m², numărul de spire al bobinei mobile $N=20$ spire, momentul de inerţie al echipajului mobil faţă de axa de rotaţie $J=10^{-10}$ kgm², coeficientul de amortizare al echipajului mobil $A=10^{-8}$ Nms/rad şi cuplul antagonist specific al firului de suspensie al echipajului mobil $D=10^{-7}$Nm/rad.

1. Să se determine perioada T_0 a oscilaţiei libere a echipajului mobil.
2. Să se calculeze gradul de amortizare β al echipajului mobil. Ce caracter are mişcarea echipajului mobil în regim tranzitoriu?
3. Ştiind că bobina dispozitivului de măsură este parcursă de curentul $I=10^{-5}$ A, să se determine deviaţia permanentă α_p a echipajului mobil.

Soluţie. 1. $$T_0=2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}=2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{10^{-10}}{10^{-7}}}=0{,}2\text{ s.}$$

2. $$\beta=\frac{A}{2\sqrt{JD}}=\frac{10^{-8}}{2\sqrt{10^{-10}\cdot 10^{-7}}}=1{,}58.$$

Deoarece $\beta>1$, mişcarea echipajului mobil în regim tranzitoriu este aperiodică.

3. $$\alpha_p=\frac{BSNI}{D}=\frac{0{,}2\cdot 4\cdot 10^{-4}\cdot 20\cdot 10^{-5}}{10^{-7}}=0{,}16\text{ rad.}$$

Problema 2.2.8. Un galvanometru obişnuit avînd perioada oscilaţiilor libere T_0 şi gradul de amortizare β se conectează într-un circuit de curent con-

tinuu. Se presupune că regimul tranzitoriu, deci mişcarea echipajului mobil al acestui galvanometru încetează cînd deviaţia sa α rămîne cuprinsă între 99% şi 101% din deviaţia permanentă α_p. Intervalul de timp corespunzător regimului tranzitoriu este timpul de stabilizare t_s. Să se reprezinte grafic dependenţa dintre timpul relativ de stabilizare t_s/T_0 şi gradul de amortizare β.

Soluţie. În regimul tranzitoriu corespunzător conectării galvanometrului deviaţia echipajului mobil este:

– pentru $\beta<1$ (mişcare periodică)

$$\alpha=\alpha_p\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\exp\left(-2\pi\beta\frac{t}{T_0}\right)\sin\left(2\pi\sqrt{1-\beta^2}\frac{t}{T_0}+\arccos\beta\right)\right],$$

– pentru $\beta=1$ (mişcare aperiodică critică)

$$\alpha=\alpha_p\left[1-\left(2\pi\frac{t}{T_0}+1\right)\exp\left(-2\pi\frac{t}{T_0}\right)\right],$$

– pentru $\beta>1$ (mişcare aperiodică)

$$\alpha=\alpha_p\left[1-\frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}\exp\left(-2\pi\beta\frac{t}{T_0}\right)\operatorname{sh}\left(2\pi\sqrt{\beta^2-1}\frac{t}{T_0}+\operatorname{argch}\beta\right)\right].$$

La $t\geqslant t_s$ au loc următoarele inegalităţi:

– pentru $\beta<1$

$$0{,}99\,\alpha_p\leqslant\alpha\leqslant1{,}01\,\alpha_p,$$

– pentru $\beta\geqslant1$

$$\alpha\geqslant0{,}99\,\alpha_p$$

De aici rezultă:

– pentru $\beta<1$

$$-0{,}01\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\exp\left(-2\pi\beta\frac{t}{T_0}\right)\sin\left(2\pi\sqrt{1-\beta^2}\frac{t}{T_0}+\arccos\beta\right)\leqslant0{,}01,$$

– pentru $\beta=1$

$$\left(2\pi\frac{t}{T_0}+1\right)\exp\left(-2\pi\frac{t}{T_0}\right)\leqslant0{,}01,$$

– pentru $\beta>1$

$$\frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}\exp\left(-2\pi\beta\frac{t}{T_0}\right)\operatorname{sh}\left(2\pi\sqrt{\beta^2-1}\frac{t}{T_0}+\operatorname{argch}\beta\right)\leqslant0{,}01.$$

În fig. 2.2.2. s-au reprezentat grafic expresiile $F(t/T_0, \beta)$ în funcţie de t/T_0. Orizontalele corespunzătoare ordonatelor $\pm0{,}01$ intersectează curbele obţinute prin reprezentarea grafică, determinînd valorile aferente lui t_s/T_0. Se procedează cu deosebită atenţie la $\beta<1$ deoarece în acest caz pot exista mai multe astfel de intersecţii, dintre care ultima se consideră a fi corespunzătoare timpului de stabilizare t_s/T_0. Pe baza valorilor obţinute s-a construit reprezentarea grafică cerută (fig. 2.2.3). Din această reprezentare grafică rezultă că timpul de stabilizare relativ t_s/T_0 este minim cînd amortizarea este apropiată de cea critică caracterizată prin $\beta=1$.

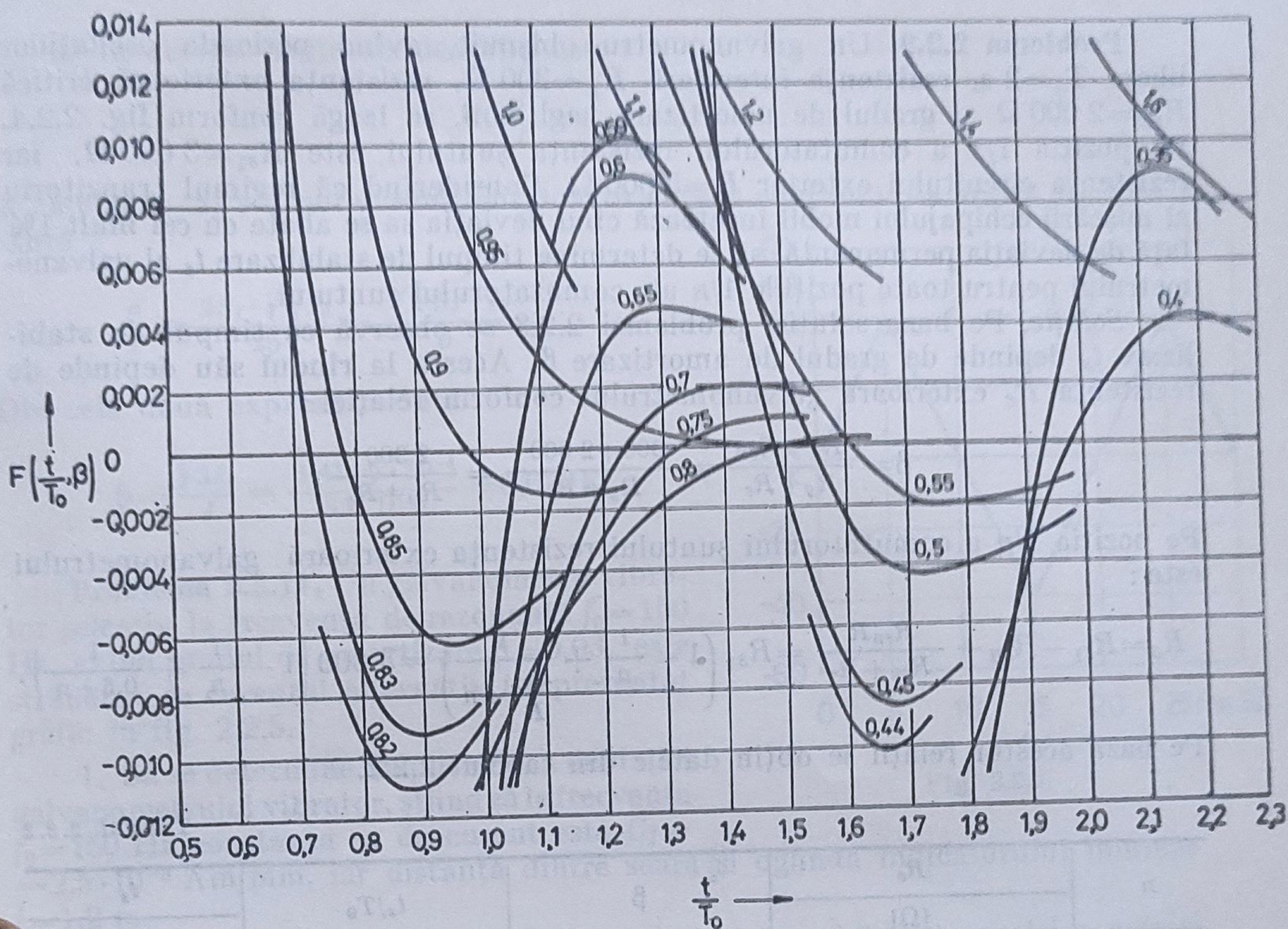


Fig. 2.2.2.

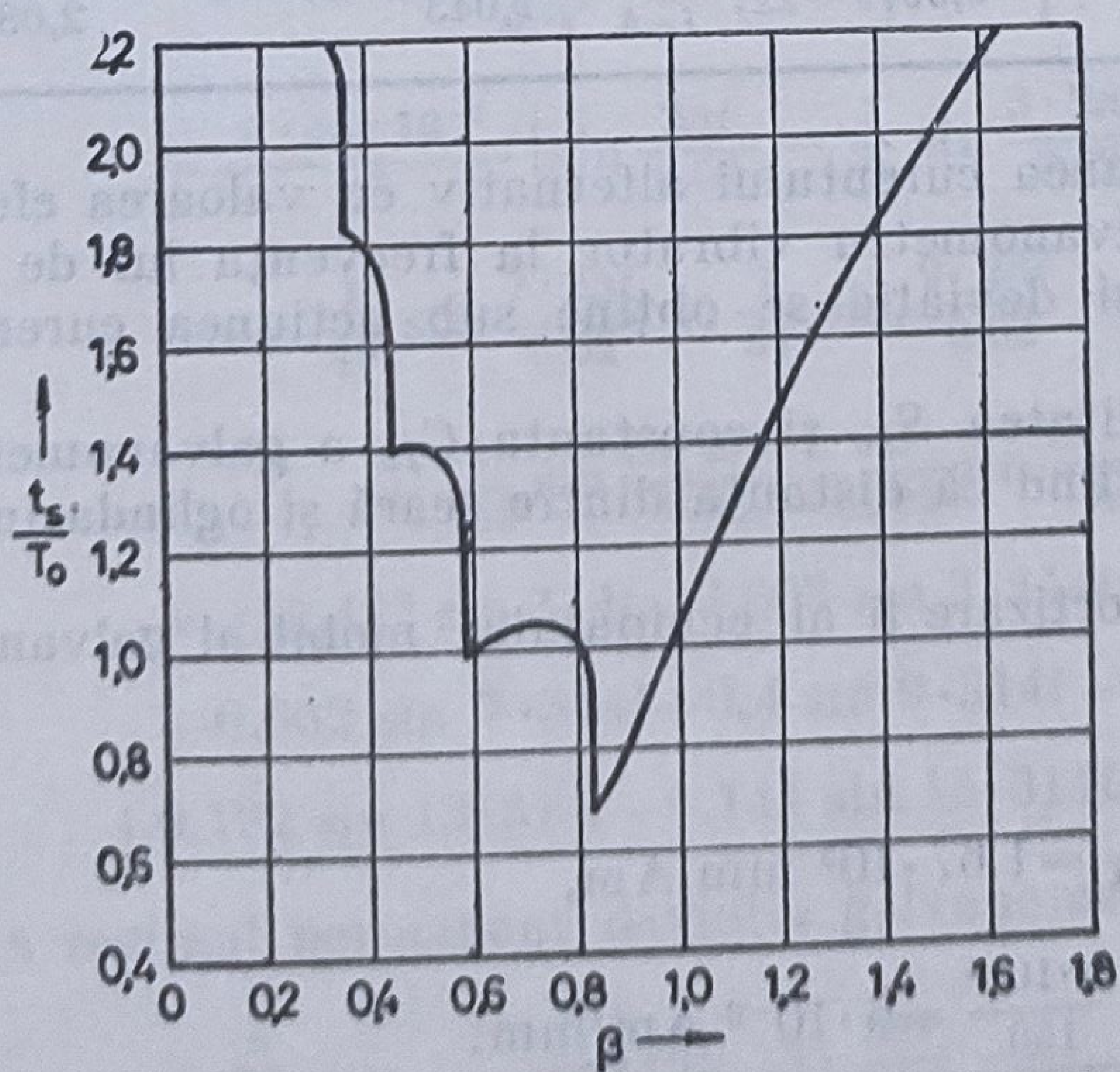


Fig. 2.2.3.

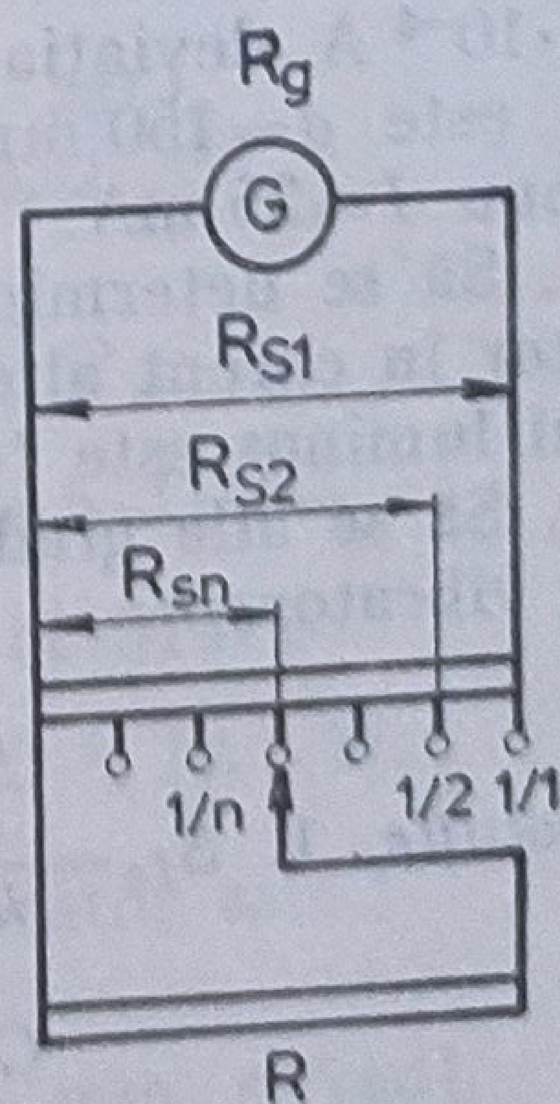


Fig. 2.2.4.

Problema 2.2.9. Un galvanometru obişnuit, avînd perioada oscilaţiilor libere $T_0=2$ s, rezistenţa interioară $R_g=300\ \Omega$, rezistenţa exterioară critică $R_{ek}=2\,000\ \Omega$ şi gradul de amortizare neglijabil, se leagă conform fig. 2.2.4. Pe poziţia 1/1 a comutatorului, rezistenţa şuntului este $R_{s1}=3\,000\ \Omega$, iar rezistenţa circuitului exterior $R=5\,000\ \Omega$. Considerînd că regimul tranzitoriu al mişcării echipajului mobil încetează cînd deviaţia sa se abate cu cel mult 1% faţă de deviaţia permanentă, să se determine timpul de stabilizare t_s al galvanometrului pentru toate poziţiile $1/n$ ale comutatorului şuntului.

Soluţie. Pe baza soluţiei problemei 2.2.8 se observă că timpul de stabilizare t_s depinde de gradul de amortizare β. Acesta la rîndul său depinde de rezistenţa R_e exterioară galvanometrului conform relaţiei :

$$\beta=\frac{R_g+R_{ek}}{R_g+R_e}=\frac{300+2\,000}{R_g+R_e}=\frac{2\,300}{R_g+R_e}.$$

Pe poziţia $1/n$ a comutatorului şuntului rezistenţa exterioară galvanometrului este :

$$R_e=R_{s1}-R_{sn}+\frac{R_{sn}R}{R_{sn}+R}=R_{s1}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{\frac{R_{s1}}{R}+n}\right)=3\,000\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{0{,}6+n}\right).$$

Pe baza acestor relaţii se obţin datele din tabelul 2.2.2.

Tabelul 2.2.2

n	R_e [Ω]	β	t_s/T_0	t_s [s]
1	1 875	1,057	1,175	2,35
2	2 654	0,779	1,037	2,074
5	2 936	0,711	1,048	2,096
10	2 983	0,701	1,046	2,092
20	3 000	0,697	1,043	2,086
50	3 000	0,697	1,043	2,086

Problema 2.2.10. Sub acţiunea curentului alternativ cu valoarea efectivă $I_e=5\cdot10^{-4}$ A deviaţia unui galvanometru vibrator la frecvenţa lui de rezonanţă este $a=150$ mm. Aceeaşi deviaţie se obţine sub acţiunea curentului continuu $I=35$ mA.

1. Să se determine sensibilitatea S_{Ie} şi constanta C_{Ie} a galvanometrului vibrator în curent alternativ, ştiind că distanţa dintre scară şi oglinda indicatorului luminos este $l=1{,}8$ m.

2. Să se afle gradul de amortizare β al echipajului mobil al galvanometrului vibrator.

Soluţie. 1. $$S_{Ie}=\frac{\frac{a}{l}}{I_e}=\frac{\frac{150}{1{,}8}}{5\cdot10^{-4}}=1{,}67\cdot10^{5}\ \text{mm/Am},$$

$$C_{Ie}=\frac{I_e}{\frac{a}{l}}=\frac{5\cdot10^{-4}}{\frac{150}{1{,}8}}=6\cdot10^{-6}\ \text{Am/mm}.$$

2. În curent continuu deviația este:

$$\frac{a}{l} = S_I I,$$

în care prin S_I s-a notat sensibilitatea în curent continuu. În regim de rezonanță

$$\frac{a}{l} = \frac{2S_I \cdot \sqrt{2}\, I_e}{2\beta} = \frac{\sqrt{2}\, S_I \cdot I_e}{\beta}.$$

Din cele două expresii rezultă:

$$\beta = \frac{\sqrt{2} I_e}{I} = \frac{1{,}41 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{35 \cdot 10^{-3}} = 0{,}0201.$$

Problema 2.2.11. Un galvanometru vibrator selectiv la frecvența de rezonanță $f_0 = 150$ Hz, avînd gradul de amortizare $\beta = 0{,}03$, este străbătut de curentul alternativ i reprezentat grafic în fig. 2.2.5.

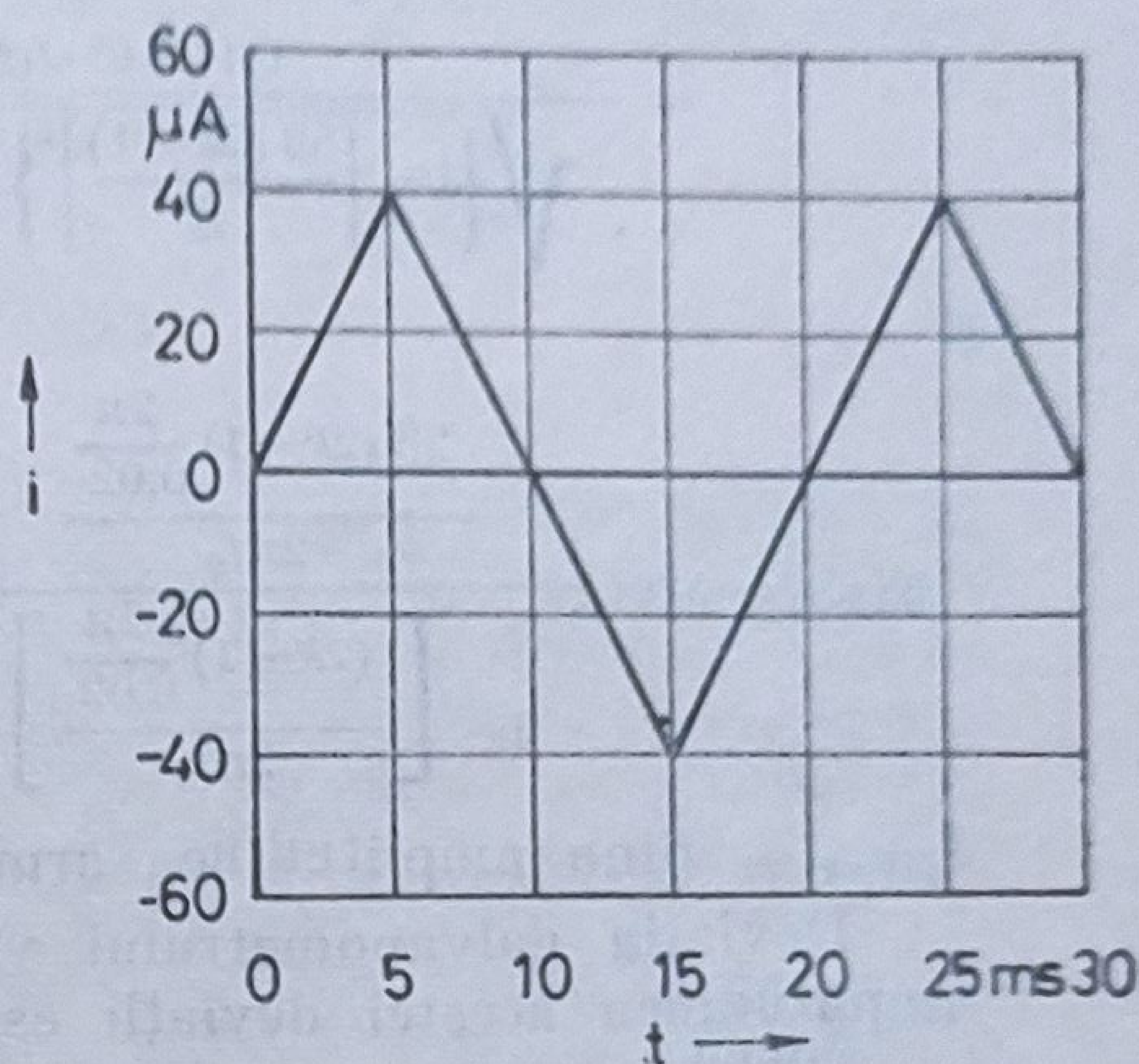


Fig. 2.2.5.

1. Să se determine amplitudinea deviației galvanometrului vibrator, știind că la frecvența $f_0 = 150$ Hz constanta sa de curent este $C_I = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ Am/mm, iar distanța dintre scară și oglinda indicatorului luminos $l = 1{,}2$ m.

2. Să se arate cît din amplitudinea deviației se datorește acelei armonici a curentului i care are frecvența $f = f_0$.

Soluție. 1. Se dezvoltă în serie Fourier:

$$i = 40 \cdot 10^{-6} \left\{ \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \sin\left[(2k-1)\frac{2\pi t}{0{,}02}\right] \right\} =$$

$$= \frac{8 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}{\pi^2} \left(\sin\frac{2\pi t}{0{,}02} - \frac{1}{9}\sin\frac{3 \cdot 2\pi t}{0{,}02} + \frac{1}{25}\sin\frac{5 \cdot 2\pi t}{0{,}02} - \right.$$

$$- \frac{1}{49}\sin\frac{7 \cdot 2\pi t}{0{,}02} + \frac{1}{81}\sin\frac{9 \cdot 2\pi t}{0{,}02} - \frac{1}{121}\sin\frac{11 \cdot 2\pi t}{0{,}02} +$$

$$\left. + \frac{1}{169}\sin\frac{13 \cdot 2\pi t}{0{,}02} - \frac{1}{225}\sin\frac{15 \cdot 2\pi t}{0{,}02} + \ldots \right) =$$

$$= (32{,}423 \sin 314t - 3{,}603 \sin 3 \cdot 314t + 1{,}297 \sin 5 \cdot 314t -$$

$$- 0{,}662 \sin 7 \cdot 314t + 0{,}4 \sin 9 \cdot 314t - 0{,}268 \sin 11 \cdot 314t +$$

$$+ 0{,}192 \sin 13 \cdot 314t - 0{,}144 \sin 15 \cdot 314t + \ldots) \cdot 10^{-6}, \text{ [A ; s]}.$$

În regimul permanent deviația galvanometrului vibrator este:

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_{(2k-1)m} \sin\left[(2k-1)\frac{2\pi t}{0{,}02} - \varphi_{2k-1}\right], \text{ [mm ; mm, s, rad]},$$

în care

$$a_{(2k-1)m}=\frac{2\beta l\, I_{(2k-1)m}}{\sqrt{2C_I\left\{1-\left[\frac{(2k-1)\frac{2\pi}{0{,}02}}{2\pi f_0}\right]^2\right\}^2+\left[\frac{2\beta(2k-1)\frac{2\pi}{0{,}02}}{2\pi f_0}\right]^2}}=$$

$$=\frac{1{,}44\cdot 10^6\cdot I_{(2k-1)m}}{\sqrt{\left\{1-\left[\frac{50(2k-1)}{f_0}\right]^2\right\}^2+\left[\frac{3(2k-1)}{f_0}\right]^2}},\ [\text{mm}\ ;\ \mu\text{A},\ -,\ \text{Hz}]$$

şi

$$\varphi_{2k-1}=\text{arctg}\frac{\frac{2\beta(2k-1)\frac{2\pi}{0{,}02}}{2\pi f_0}}{1-\left[\frac{(2k-1)\frac{2\pi}{0{,}02}}{2\pi f_0}\right]^2}=\text{arctg}\frac{\frac{3(2k-1)}{f_0}}{1-\left[\frac{50(2k-1)}{f_0}\right]^2},\ [\text{rad}\ ;\ -,\ \text{Hz}],$$

$I_{(2k-1)m}$ fiind amplitudinea armonicii de ordin $2k-1$.

Deviaţia galvanometrului vibrator s-a reprezentat grafic în fig. 2.2.6. Amplitudinea acestei deviaţii este $a_v=133{,}25$ mm şi are loc la momentul $t_v=0{,}0066$ s.

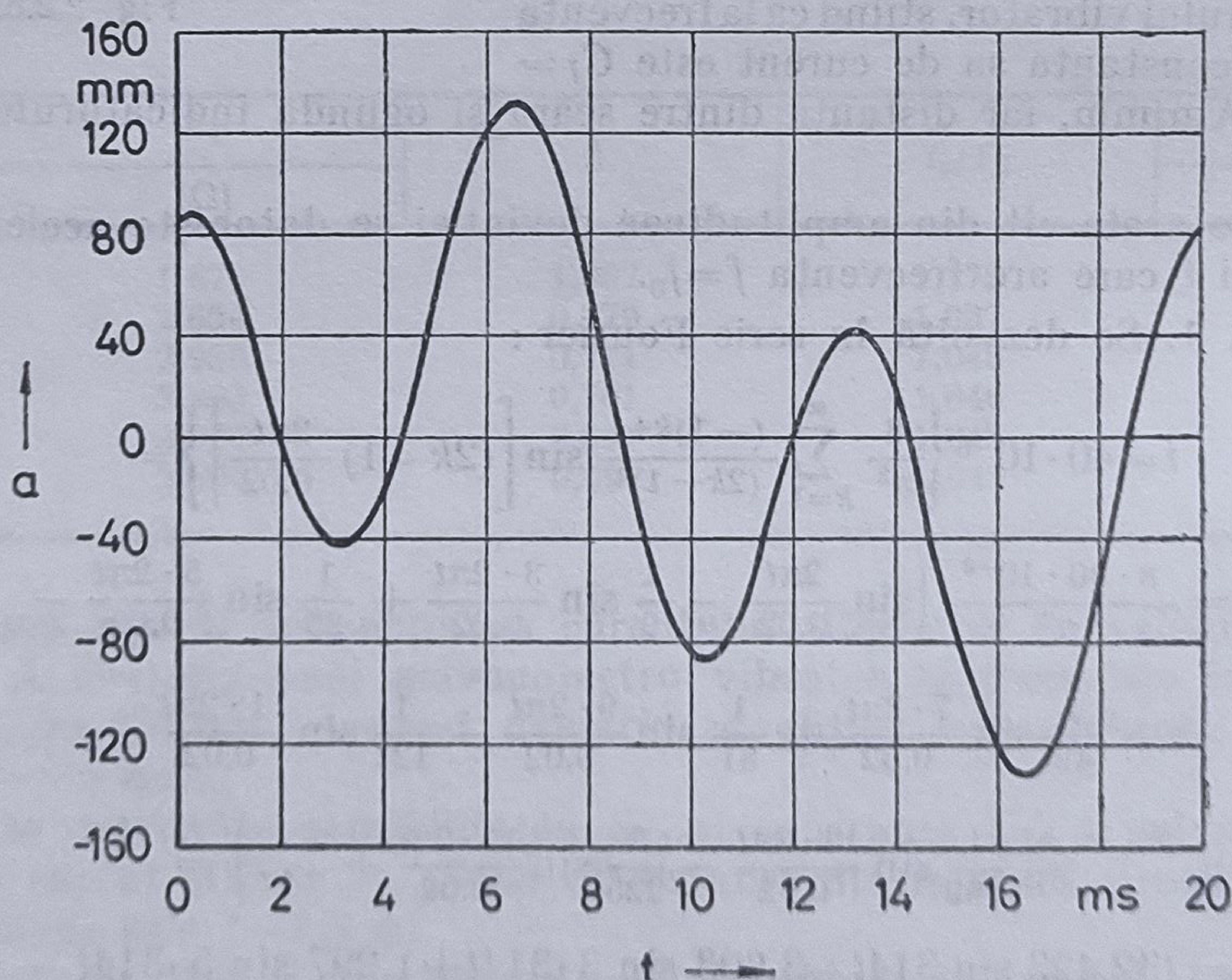


Fig. 2.2.6.

2. Se observă că frecvenţa $f_0=150$ Hz corespunde armonicii a 3-a a curentului i. La momentul $t_v=0{,}0066$ s deviaţia corespunzătoare armonicii a treia are valoarea

$$a_{3v}=a_{3m}\sin(3\cdot 314 t_v-\varphi_3)=86{,}4\sin\left(3\cdot 314\cdot 0{,}0066-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=86{,}472\cos\ 3\cdot 314\cdot 0{,}0066=86{,}29\ \text{mm}.$$

Rezultă :

$$\frac{a_{3v}}{a_v}=\frac{86,29}{133,25}=0,648.$$

La utilizarea unui galvanometru vibrator pot interveni deci situaţii în care deviaţia să nu se datorească exclusiv armonicii care se urmăreşte a se sesiza.

2.3. OSCILOGRAFE ELECTROMECANICE ŞI OSCILOSCOAPE CATODICE

Oscilografele electromecanice şi osciloscoapele catodice sînt aparate de măsură destinate în special prezentării şi înregistrării dependenţei faţă de timp a curentului electric sau a tensiunii electrice. Osciloscoapele catodice se utilizează uneori şi în alte scopuri, de ex., pentru prezentarea şi înregistrarea dependenţei dintre două mărimi diferite sau ca indicatoare de nul. Atît prezentarea pe ecrane de sticlă translucidă, cît şi înregistrarea pe hîrtie fotosensibilă au loc de obicei prin intermediul unor spoturi luminoase.

Oscilografele electromecanice se compun din dispozitive de măsură magnetoelectrice cu sensibilitate mare şi inerţie mică, numite vibratoare, cărora li se ataşează dispozitive pentru lărgirea intervalului de măsurare (şunturi, rezistoare adiţionale) şi dispozitive pentru realizarea electromecanică a bazei de timp.

Osciloscoapele catodice se compun din tuburi catodice, cărora li se ataşează dispozitive pentru lărgirea intervalului de măsurare (divizoare de tensiune, amplificatoare de măsură) şi dispozitive pentru realizarea electronică a bazei de timp.

Comportarea oscilografelor electromecanice şi a osciloscoapelor catodice este influenţată pronunţat de frecvenţa armonicilor curentului sau a tensiunii, a căror dependenţă faţă de timp se prezintă sau se înregistrează.

Problema 2.3.1. Se înregistrează cu oscilograful electromecanic curentul pulsatoriu

$$i=100\ |\sin 1\,884t\ |,\ [\text{mA};\ \text{s}]$$

obţinut prin redresarea unui curent alternativ sinusoidal. Distanţa dintre oglinzile vibratoarelor şi hîrtia fotosensibilă este $l=0,5$ m.

Să se calculeze şi să se deseneze oscilogramele realizate cu vibratoarele, avînd caracteristicile din tabelul 2.3.1.

Soluţie. Se dezvoltă în serie Fourier :

$$i=100\left[\left(\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2k\cdot 1\,884t}{4k^2-1}\right)=100\left[\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2\cdot 1\,884t}{3}+\frac{\cos 4\cdot 1\,884t}{15}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\cos 6\cdot 1\,884t}{35}+\frac{\cos 8\cdot 1\,884t}{63}+\frac{\cos 10\cdot 1\,884t}{99}+\frac{\cos 12\cdot 1\,884t}{143}+\frac{\cos 14\cdot 1\,884t}{195}+\ldots\right)\right]=$$

$$=63,66-42,44\cos 2\cdot 1\,884t-8,49\cos 4\cdot 1\,884t-3,64\cos 6\cdot 1\,884t-$$

$$-2,02\cos 8\cdot 1\,884t-1,29\cos 10\cdot 1\,884t-0,89\cos 12\cdot 1\,884t-$$

$$-0,65\cos 14\cdot 1\,884t+\ldots,\ [\text{mA};\ \text{s}].$$

Tabelul 2.3.1

Vibratorul	Frecvența circulară a oscilației libere, ω_0 [rad/s]	Gradul de amortizare, β	Sensibilitatea de curent, S_I [mm/mAm]
1	4 400	0,707	1,1
2	15 700	0,707	1,3
3	62 800	0,707	0,32

Deviația înregistrată pe oscilogramă în regimul permanent este :

$$a=a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_{2km}\cos(2k\cdot 1\,884t-\varphi_{2k}),$$

în care

$$a_0=l_{SI}I_0=0{,}5\cdot 63{,}66\;S_I=31{,}86\;S_I,\;[\text{mm};\;\text{mm/mAm}],$$

$$a_{2k\,m}=\frac{S_I I_{2km}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{2k\cdot 1\,884}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left(\frac{2\beta\cdot 2k\cdot 1\,884}{\omega_0}\right)^2}}=$$

$$=\frac{0{,}5\cdot S_I I_{2km}}{\sqrt{1+\left(\frac{2k\cdot 1\,884}{\omega_0}\right)^4}},\quad [\text{mm};\;\text{mm/m Am, mA, –, rad/s}],$$

$$\varphi_{2k}=\text{arctg}\left[\frac{\frac{2\;\cdot 2k\cdot 1\,884}{\omega_0}}{1-\left(\frac{2k\cdot 1\,884}{\omega_0}\right)^2}\right]=\text{arctg}\left[\frac{\frac{1{,}414\cdot 2k\cdot 1\,884}{\omega_0}}{1-\left(\frac{2k\cdot 1\,884}{\omega_0}\right)^2}\right],\;[\text{rad};\;–,\;\text{rad/s}].$$

Pe baza acestor relații s-au trasat oscilogramele din fig. 2.3.1, din care rezultă că pentru o redare cît mai fidelă a formei de variație în timp a curentului, frecvența circulară ω_0 a oscilației libere a vibratorului să fie cît mai mare în raport cu frecvența circulară $k\omega$ a armonicilor curentului înregistrat. Vibratorul 3 se comportă cel mai bine din acest punct de vedere.

Problema 2.3.2. Se înregistrează cu oscilograful electromecanic un curent alternativ, avînd valoarea efectivă $I=5$ mA și frecvența $f=50$ Hz. Distanța dintre oglinda vibratorului și hîrtia fotosensibilă este $l=0{,}6$ m, sensibilitatea de curent a vibratorului $S_I=6$ mm/mAm, iar frecvența oscilațiilor sale libere $f_0=3\,500$ Hz.

1. Să se determine amplitudinea deviației spotului luminos.

2. Să se calculeze viteza spotului luminos față de hîrtia fotosensibilă, ce se deplasează cu viteza $v_h=2$ m/s.

Soluție. 1. Deoarece $f_0 \gg f$, amplitudinea deviației spotului luminos nu depinde de frecvență, fiind :

$$a_m=l\;S_I\cdot\sqrt{2}I=0{,}6\cdot 6\cdot 1{,}41\cdot 5=25{,}4\text{ mm}.$$

2. Viteza spotului luminos față de hîrtia fotosensibilă (fig. 2.3.2) are două componente: viteza de deplasare longitudinală a hîrtiei $v_h=2$ m/s și viteza de deplasare transversală a spotului:

$$v_s=\frac{d}{dt}(a_m \sin 2\pi ft)=2\pi f\, a_m \cos 2\pi ft=2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 25{,}4\cdot 10^{-3} \cos 2\cdot 3{,}14\cdot 50\, t=$$
$$=8 \cos 314t, \text{ [m/s ; s]}.$$

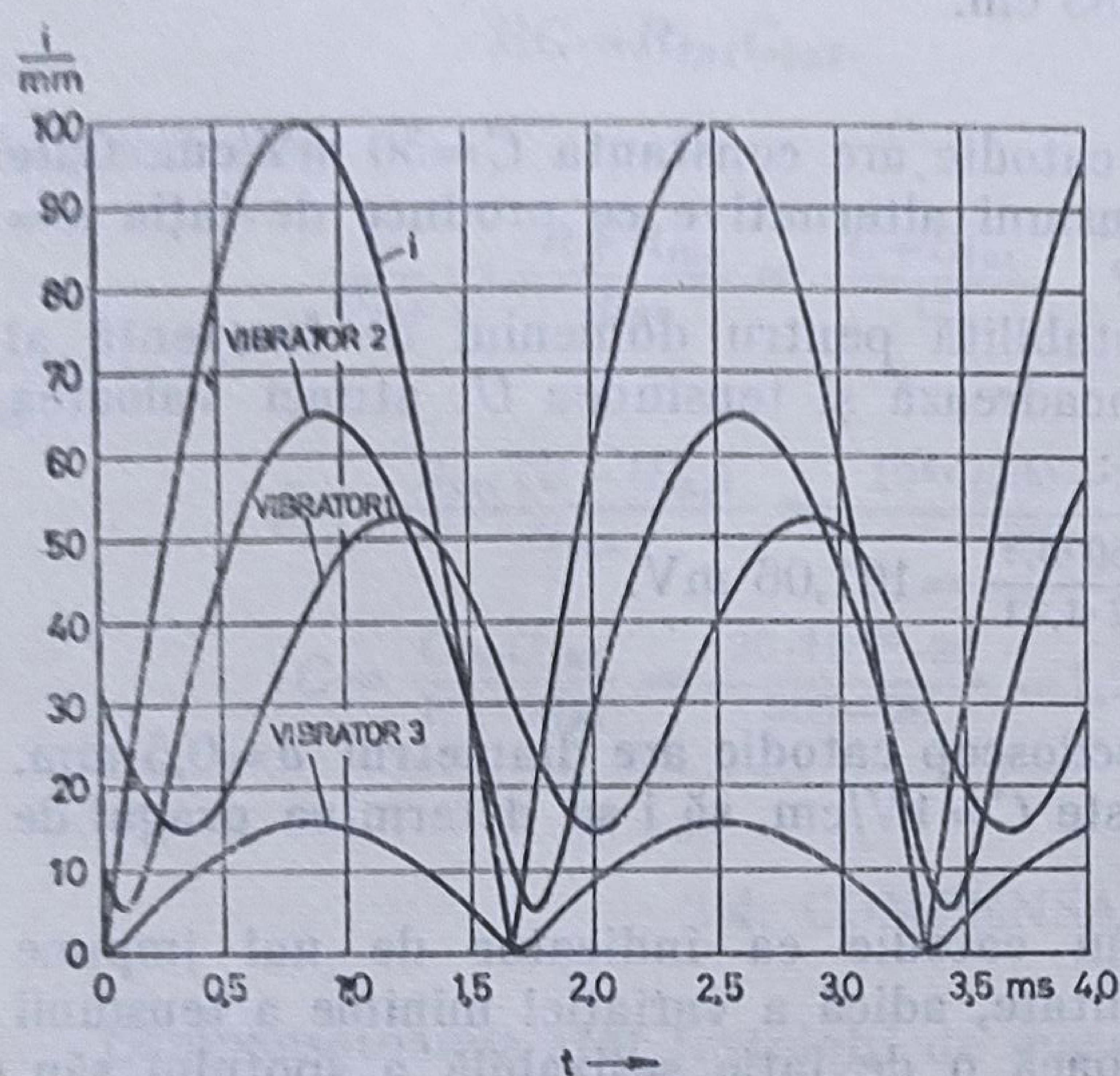


Fig. 2.3.1.

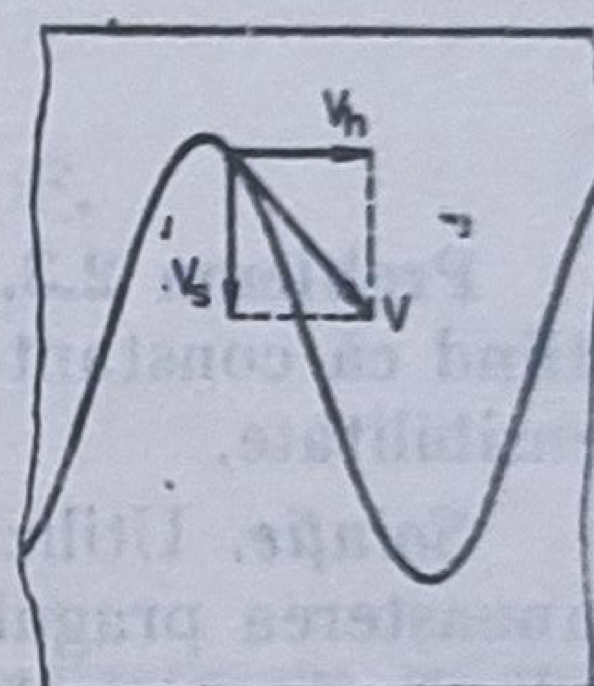


Fig. 2.3.2.

Viteza rezultantă este:

$$v=\sqrt{v_h^2+v_s^2}=\sqrt{2^2+8^2 \cos^2 314t}=2\sqrt{1+16 \cos^2 314t}, \quad \text{[m/s ; s]},$$

cu valoarea minimă

$$v_{min}=v_h=2 \text{ m/s} \quad \text{la} \quad t=(2k+1)\cdot 5\cdot 10^{-3} \text{ s}$$

și cea maximă

$$v_{max}=8{,}25 \text{ m/s} \quad \text{la} \quad t=k\cdot 10^{-2} \text{ s},$$

k fiind un număr întreg.

Viteza de deplasare a spotului luminos nefiind constantă, expunerea hîrtiei fotosensibile nu este uniformă de-a lungul traiectoriei spotului luminos. Ca urmare grosimea liniei sinusoidale de pe oscilogramă este neuniformă.

În general cunoașterea vitezei de deplasare a spotului luminos față de hîrtia fotosensibilă este necesară pentru ajustarea corectă a intensității luminoase în așa fel încît linia oscilogramei să fie vizibilă, dar nu prea groasă.

Problema 2.3.3. Aplicînd tensiunea alternativă cu valoarea efectivă $U=2$ V unui osciloscop catodic, spotul acestuia deviază cu $a=1{,}8$ cm.

1. Știind că în regimul de mai sus neliniaritatea osciloscopului este neglijabilă, să se determine constanta sa C.

2. Admițînd că constanta C a osciloscopului nu depinde de frecvența tensiunii aplicate, să se determine deviația a_c a spotului său sub acțiunea tensiunii continue $U_c=12$ V

Soluție. 1. $C=\frac{2\sqrt{2}U}{a}=\frac{2\cdot 1,41\cdot 2}{1,8}=3,13$ V/cm.

2. $a_c=\frac{U_c}{C}=\frac{12}{3,13}=3,83$ cm.

Problema 2.3.4. Un osciloscop catodic are constanta $C=50$ mV/cm. Care este valoarea efectivă U a unei tensiuni alternative ce produce deviația $a=5,7$ cm a spotului osciloscopului?

Soluție. Dacă constanta este stabilită pentru domeniul de frecvență al tensiunilor alternative în care se încadrează și tensiunea U, atunci valoarea efectivă a tensiunii alternative este:

$$U=\frac{Ca}{2\sqrt{2}}=\frac{50\cdot 5,7}{2\cdot 1,41}=101,06 \text{ mV}.$$

Problema 2.3.5. Spotul unui osciloscop catodic are diametrul $d=0,5$ mm. Știind că constanta osciloscopului este $C=1$V/cm, să i se determine pragul de sensibilitate.

Soluție. Utilizarea osciloscopului catodic ca indicator de nul impune cunoașterea pragului său de sensibilitate, adică a variației minime a tensiunii aplicate la bornele sale, care provoacă o deviație sesizabilă a spotului său. Această deviație sesizabilă este egală în cazul cel mai defavorabil cu diametrul spotului. Prin urmare pragul de sensibilitate este:

$$U_{min}=C_d=1\cdot 0,05=0,05 \text{ V}.$$

Problema 2.3.6. Un osciloscop catodic are rezistența de intrare $R_{int}=2,1$ MΩ și capacitatea de intrare $C_{int}=5$ pF. Cît este impedanța de intrare Z_{int} a osciloscopului la frecvențele $f_1=50$ Hz și $f_2=1$ MHz?

Soluție. Rezistența și capacitatea fiind în paralel rezultă

$$Z_{int_1}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_{int}^2}+(2\pi f_1 C_{int})^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2,1\cdot 10^6)^2}+(2\cdot 3,14\cdot 50\cdot 5\cdot 10^{-12})^2}}=$$

$$=2,1\cdot 10^6\ \Omega=2,1\ \text{M}\Omega,$$

$$Z_{int_2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_{int}^2}+(2\pi f_2 C_{int})^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(2,1\cdot 10^6)^2}+(2\cdot 3,14\cdot 10^6\cdot 5\cdot 10^{-12})^2}}=$$

$$=3,18\cdot 10^4\Omega=31,8\ \text{k}\Omega.$$

Problema 2.3.7. Un osciloscop catodic are rezistența de intrare $R_{int}=1$ MΩ și capacitatea de intrare $C_{int}=30$ pF. Știind că constanta osciloseo-

pului este 20 V/cm, să se calculeze rezistența și capacitatea necesare pentru a mări constanta osciloscopului la 500 V/cm.

Soluție. Pentru a lărgi intervalul de măsurare al osciloscopului se leagă în serie cu acesta o impedanță alcătuită dintr-o rezistență R și o capacitate C (fig. 2.3.3). Constanta osciloscopului catodic nu depinde de frecvență, dacă este îndeplinită condiția

$$RC=R_{int}C_{int}.$$

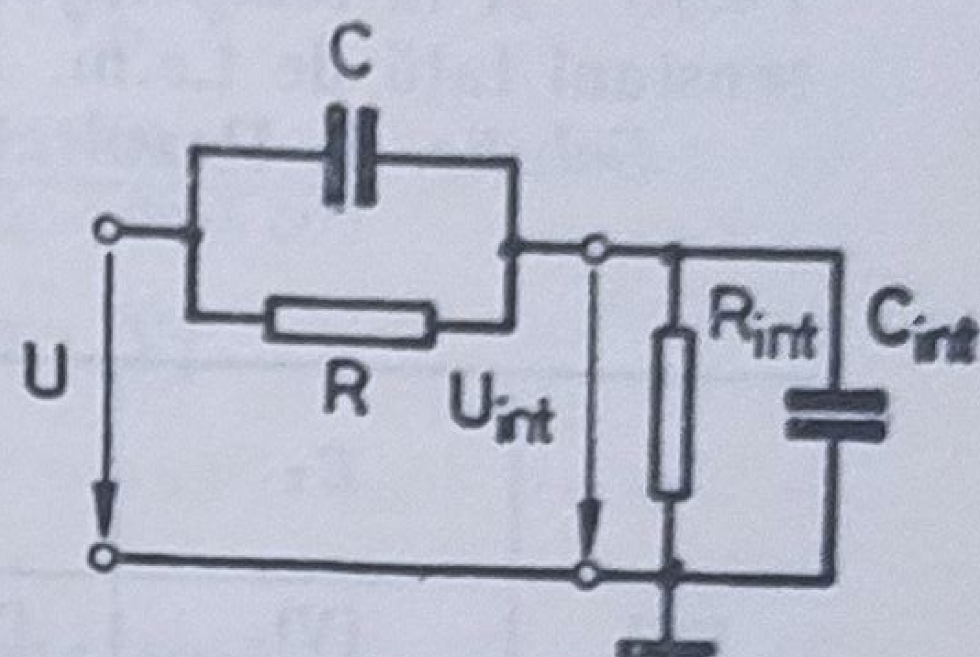


Fig. 2.3.3.

În acest caz,

$$\frac{U}{U_{int}}=\frac{R+R_{int}}{R_{int}}=\frac{C+C_{int}}{C}$$

și

$$R=\frac{R_{int}(U-U_{int})}{U_{int}}=\frac{10^6\cdot(500-20)}{20}=24\cdot10^6\Omega=24\ \text{M}\Omega,$$

$$C=\frac{C_{int}U_{int}}{U-U_{int}}=\frac{30\cdot10^{-12}\cdot20}{500-20}=1{,}25\cdot10^{-12}\ \text{F}=1{,}25\ \text{pF}.$$

2.4. COMPENSATOARE

Compensatoarele sînt instalații de măsură de comparație destinate măsurării tensiunii electrice. Există compensatoare de tensiune continuă și compensatoare de tensiune alternativă.

La compensatoarele de tensiune continuă măsurarea are loc prin compararea tensiunii, ce se măscară, cu tensiunea care provine de la un etalon de tensiune : element normal sau stabilizator cu diode Zener. Compensatoarele de tensiune continuă se compun din rezistoare etalon variabile, adeseori în decade, cărora li se adaugă etaloane de tensiune și indicatoare de nul. Datorită preciziei mari a rezistoarelor variabile și a etaloanelor de tensiune, precum și sensibilității mari a indicatoarelor de nul, precizia de măsurare a tensiunii continue cu compensatoarele este mare, ea depășind cu mult pe cea corespunzătoare măsurării tensiunii continue cu aparate de măsură cu citire directă.

Compensatoarele de tensiune alternativă permit măsurarea amplitudinii și fazei tensiunii alternative și – prin intermediul lor – a altor mărimi (de ex. componentele impedanței, erorile transformatoarelor de măsură). Din cauza inexistenței unor etaloane de tensiune alternativă, precizia de măsurare a tensiunii alternative cu compensatoarele nu este mai mare decît cea corespunzătoare măsurării tensiunii alternative cu aparate de măsură cu citire directă.

La măsurări cu compensatoarele, operația de compensare are loc manual sau automat. În primul caz rezultatul măsurării se prezintă de obicei sub formă numerică, în cel de al doilea sub formă analogică sau numerică.

Problema 2.4.1. T.e.m. E_τ a elementului normal depinde de temperatura τ conform relației

$$E_\tau=1{,}018646-4{,}06\cdot10^{-5}(\tau-20)-9{,}5\cdot10^{-7}(\tau-20)^2+10^{-8}(\tau-20)^3,\quad [\text{V}\ ;\ ^\circ\text{C}].$$

1. Să se calculeze t.e.m. a elementului normal pentru fiecare valoare întreagă a temperaturii τ cuprinsă între 10 °C şi 29 °C.

2. Ştiind că rezistenţa interioară a elementului normal este $R_i=770\ \Omega$, să se determine tensiunea U la bornele elementului străbătut de curentul $I=10^{-6}$ A la temperatura $\tau=22$ °C şi eroarea relativă procentuală E_r a acestei tensiuni faţă de t.e.m. E_{22}.

Soluţie. 1. Rezultatele s-au redat în tabelul 2.4.1.

Tabelul 2.4.1

τ [°C]	E_τ [V]	τ [°C]	E_τ [V]	τ [°C]	E_τ [V]	τ [°C]	E_τ [V]
10	1,018947	15	1,018824	20	1,018646	25	1,018421
11	1,018927	16	1,018793	21	1,018604	26	1,018370
12	1,018905	17	1,018759	22	1,018561	27	0,018319
13	1,018880	18	1,018723	23	1,018516	28	1,018266
14	1,018853	19	1,018686	24	1,018469	29	1,018211

2. $U=E_{22}-IR_i=1{,}018561-10^{-6}\cdot 770=1{,}017791$ V.

$$E_r=\frac{100\,(U-E_{22})}{E_{22}}=-\frac{100\,IR_i}{E_{22}}=-0{,}0756\%.$$

Deoarece clasa de precizie a elementului normal este de ordinul (0,001–0,01), eroarea relativă procentuală E_r are o valoare importantă. Folosind scheme de compensare curentul prin elementul normal este nul, iar eroarea relativă procentuală E_r nu apare.

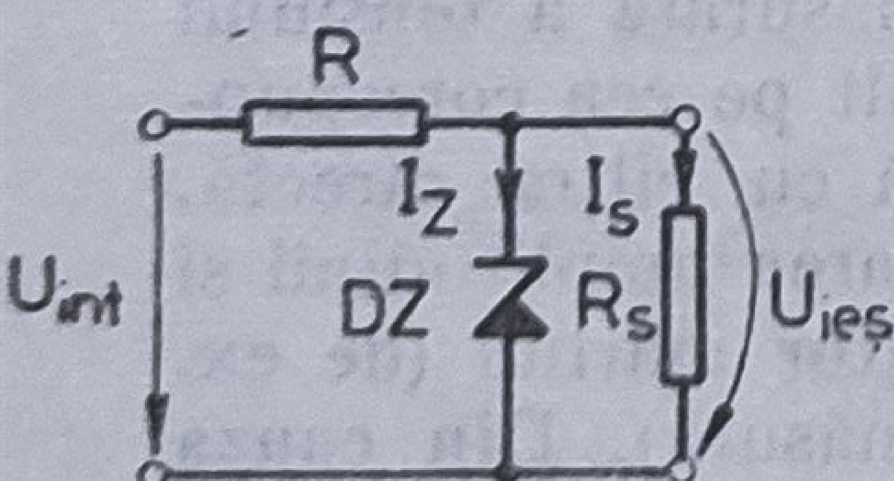


Fig. 2.4.1.

Problema 2.4.2. Stabilizatorul de tensiune continuă din fig. 2.4.1 este alcătuit din dioda Zener DZ cu caracteristica

$$U_Z=U_{Z0}+R_ZI_Z=12{,}4+20I_Z,\ [\text{V}\ ;\ \text{A}]$$

şi rezistenţa $R=5\,000\ \Omega$. Rezistenţa de sarcină are valoarea $R_s=2\,000\ \Omega$. Presupunînd că rezistenţa interioară a sursei de alimentare este neglijabilă, să se determine dependenţa curentului I_Z prin dioda Zener, a curentului de sarcină I_s şi a tensiunii $U_{ieş}$ la ieşirea stabilizatorului faţă de tensiunea U_{int} de la intrarea sa.

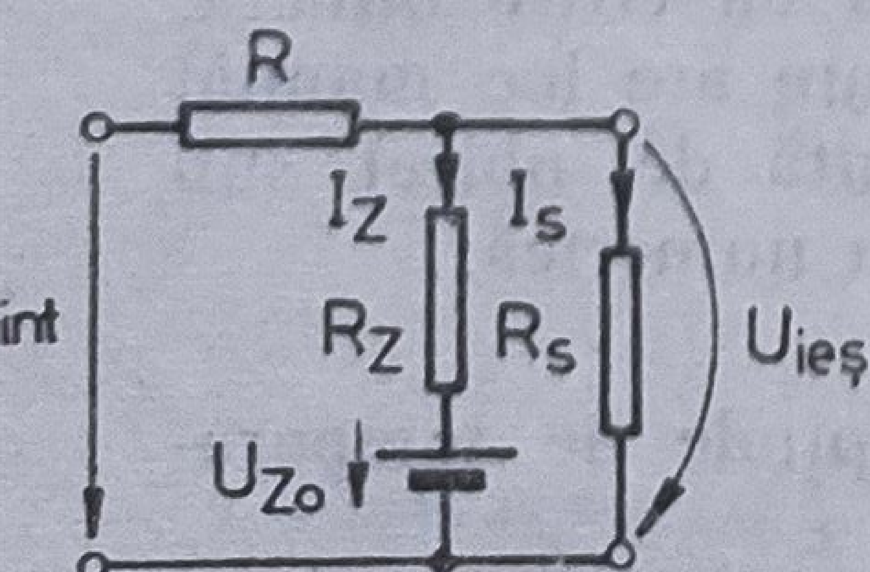


Fig. 2.4.2.

Soluţie. Dacă

$$U_{int}>U_{Z0}\left(1+\frac{R}{R_s}\right)=12{,}4\left(1+\frac{5\,000}{2\,000}\right)=43{,}4\ \text{V},$$

atunci schema din fig. 2.4.1 este echivalentă cu cea din fig. 2.4.2. Aplicînd în această ultimă schemă principiul suprapunerii efectelor, se obţine :

$$I_Z=\frac{U_{int}R_s-U_{Z0}\,(R+R_s)}{RR_s+R_sR_Z+R_ZR}=\frac{2\,000\,U_{int}-12{,}4\,(5\,000+2\,000)}{5\,000\cdot 2\,000+2\,000\cdot 20+20\cdot 5\,000}=$$

$$=1{,}972\cdot 10^{-4}\,U_{int}-8{,}56\cdot 10^{-3},\ [\mathrm{A}\ ;\ \mathrm{V}],$$

$$I_s=\frac{U_{int}R_Z+U_{Z0}R}{RR_s+R_sR_Z+R_ZR}=\frac{20\,U_{int}+12{,}4\cdot 5\,000}{5\,000\cdot 2\,000+2\,000\cdot 20+20\cdot 5\,000}=$$

$$=1{,}972\cdot 10^{-6}\,U_{int}+6{,}114\cdot 10^{-3},\quad [\mathrm{A}\ ;\ \mathrm{V}]$$

şi

$$U_{ieş}=\frac{U_{int}+U_{Z0}\dfrac{R}{R_Z}}{1+\dfrac{R}{R_s}+\dfrac{R}{R_Z}}=\frac{U_{int}+12{,}4\cdot\dfrac{5\,000}{20}}{1+\dfrac{5\,000}{2\,000}+\dfrac{5\,000}{20}}=3{,}944\cdot 10^{-3}\,U_{int}+$$

$$+12{,}228,\ [\mathrm{V}\ ;\ \mathrm{V}].$$

Se constată că tensiunea de ieşire $U_{ieş}$ nu depinde pronunţat de cea de intrare U_{int}. Acest fapt se evidenţiază prin factorul de stabilizare

$$F_s=\frac{\mathrm{d}U_{int}}{\mathrm{d}U_{ieş}}=1+\frac{R}{R_s}+\frac{R}{R_Z}=1+\frac{5\,000}{2\,000}+\frac{5\,000}{20}=253{,}5.$$

O modificare cu 1 V a tensiunii de intrare U_{int} are ca urmare modificarea cu $(1/253{,}5)\approx 4\cdot 10^{-3}$ V$=4$ mV a tensiunii de ieşire. Ca urmare, schema din figura 2.4.1 se utilizează la realizarea etaloanelor de tensiune.

Problema 2.4.3. Stabilizatorul de tensiune continuă din fig. 2.4.3 conţine diodele Zener DZ_1 şi DZ_2 cu caracteristica :

$$U_Z=U_{Z0}+R_ZI_Z=10{,}5+28I_Z,\quad [\mathrm{V}\ ;\ \mathrm{A}]$$

şi rezistenţele $R_1=R_2=R_Z=R=28\ \Omega$. Rezistenţa de sarcină are valoarea $R_s=5\,000\ \Omega$. Ştiind că rezistenţa interioară a sursei de alimentare este neglijabilă, să se determine dependenţa curenţilor I_{Z1} şi I_{Z2} prin diodele Zener, a curentului de sarcină I_s şi a tensiunii $U_{ieş}$ la ieşirea stabilizatorului faţă de tensiunea U_{int} de la intrarea sa.

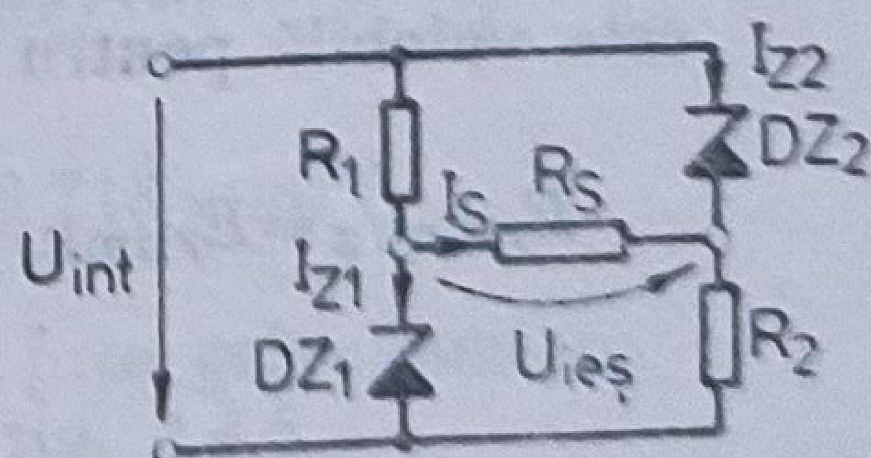


Fig. 2.4.3.

Soluţie. Dacă

$$U_{int}>U_{Z0}\frac{2R+R_s}{R+R_s}=10{,}5\,\frac{2\cdot 28+5\,000}{28+5\,000}=10{,}56\ \mathrm{V},$$

atunci schema din fig. 2.4.3 este echivalentă cu cea din fig. 2.4.4. Aplicînd în această ultimă schemă principiul suprapunerii efectelor, rezultă :

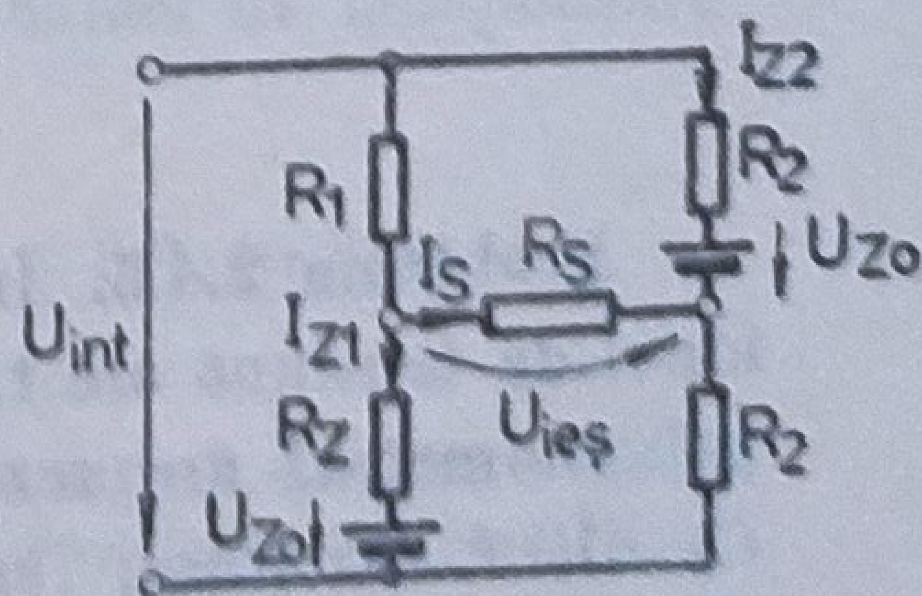


Fig. 4.4.4.

$$I_{Z1}=I_{Z2}=\frac{1}{2R}\left(U_{int}-U_{Z0}\frac{2R+R_s}{R+R_s}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 28}\left(U_{int}-10{,}5\cdot\frac{2\cdot 28+5\,000}{28+5\,000}\right)=$$

$$=0{,}0179\cdot(U_{int}-10{,}56),\quad [\mathrm{A}\ ;\ \mathrm{V}],$$

$$I_s=\frac{U_{Z0}}{R+R_s}=\frac{10,5}{28+5\,000}=0,00209\text{ A}=2,09\text{ mA}$$

și

$$U_{ieş}=U_{Z0}\frac{R_s}{R+R_s}=10,5\cdot\frac{5\,000}{28+5\,000}=10,44\text{ V}.$$

Se remarcă faptul că tensiunea $U_{ieş}$ de la ieșirea stabilizatorului nu depinde de tensiunea U_{int} de la intrarea sa. Acest lucru permite folosirea ca etalon de tensiune a schemei din fig. 2.4.3. În realitate rezistența dinamică R_Z a diodei Zener depinde întrucîtva de curentul I_Z prin diodă, deci și de tensiunea de intrare U_{int}. Pentru a obține totuși calitățile necesare unui etalon de tensiune se stabilizează și tensiunea U_{int}, realizîndu-se un stabilizator de tensiune cu două sau mai multe etaje, primele etaje fiind realizate conform celui din problema 2.4.2, iar ultimul ca cel din fig. 2.4.3.

Problema 2.4.4. Schema de compensare Poggendorf din fig. 2.4.5 conține t.e.m. etalon $E_e=1,01865$ V, ce se încadrează în clasa de precizie 0,01, rezistențele de contact fiind neglijabile.

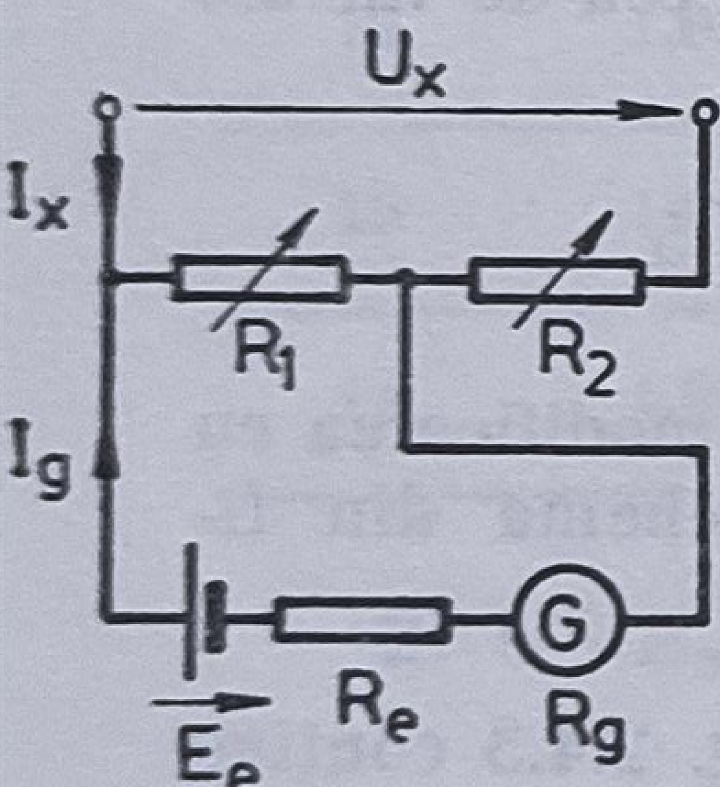


Fig. 2.4.5.

1. Să se determine valoarea tensiunii U_x, știind că în momentul în care curentul I_g prin galvanometru este nul rezistențele au valorile $R_1=10\,000\ \Omega$ și $R_2=15\,732\ \Omega$.

2. Clasa de precizie a rezistențelor R_1 și R_2 fiind 0,01, iar sensibilitatea galvanometrului foarte mare, să se calculeze eroarea relativă procentuală limită $E_{r\lim Ux}$ de măsurare a tensiunii U_x.

3. Care este valoarea minimă a tensiunii U_x, care se poate măsura cu schema din fig. 2.4.5?

Soluție. 1. Dacă $I_g=0$, atunci:

$$U_x=E_e\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)=1,01865\left(1+\frac{15\,732}{10\,000}\right)=2,62119\text{ V}.$$

2. Elementul normal fiind de clasă de precizie 0,01, t.e.m. E_e se cunoaște cu eroarea relativă procentuală limită $E_{r\lim Ee}=\pm0,01\%$; aceeași observație este valabilă pentru rezistențele R_1 și R_2. Conform relației (1.7),

$$E_{r\lim Ux}=E_{r\lim Ee}+\frac{2R_2}{R_1+R_2}E_{r\lim R}=(\pm0,01)+\frac{2\cdot15\,732}{10\,000+15\,732}(\pm0,01)=$$

$$=\pm0,0222\%.$$

3. Cînd $R_2=0$, se obține valoarea minimă măsurabilă

$$U_{x\min}=E_e=1,01865\text{ V}.$$

Problema 2.4.5. În schema de compensare Poggendorf din fig. 2.4.5 etalonul de tensiune are t.e.m. $E_e=1,01865$ V și rezistența interioară $R_e=500\ \Omega$, galvanometrul are rezistența interioară $R_g=3\,600\ \Omega$ și constanta de curent $C_I=10^{-8}$ Am/mm, iar rezistoarele care alcătuiesc divizorul de tensiune au rezistențele $R_1=12\,000\ \Omega$ și $R_2=20\,000\ \Omega$.

1. Să se determine curentul I_g prin galvanometru în funcție de tensiunea U_x. La ce valoare a tensiunii U_x curentul I_g este nul?

2. Să se afle dependența sensibilității schemei de compensare față de tensiunea U_x, distanța dintre scara și oglinda indicatorului luminos al galvanometrului fiind $l=1,15$ m. Ce valoare are sensibilitatea cînd curentul I_g prin galvanometru este nul?

3. Să se calculeze eroarea relativă procentuală limită determinată de pragul de sensibilitate al schemei cînd curentul I_g prin galvanometru este nul, știind că deviația minimă sesizabilă la galvanometru este $a_{min}=\pm 0,1$ mm.

Soluție. 1. Conform teoremelor lui Kirchhoff,

$$F_e=I_g(R_e+R_g)+(I_x+I_g)R_1,$$

$$E_e=I_g\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_e+R_g\right)+U_x\frac{R_1}{R_1+R_2},$$

$$I_g=\frac{E_e}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_e+R_g}-\frac{U_x}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_e+R_g}\cdot\frac{R_1}{R_1+R_2}=\frac{1,01865}{7\,500+500+3\,600}-$$

$$-\frac{U_x}{7\,500+500+3\,600}\cdot\frac{12\,000}{12\,000+20\,000}=(87,8-32,3\,U_x)\cdot 10^{-6},\ [\text{A};\ \text{V}].$$

Cînd

$$I_g=(87,8-32,3\,U_x)\cdot 10^{-6}=0,$$

atunci

$$U_x=\frac{63,2}{23,3}=2,718\ \text{V}.$$

2. Notînd cu a indicația galvanometrului, sensibilitatea schemei de compensare este:

$$S=\frac{da}{dU_x}=\frac{da}{dI_g}\cdot\frac{dI_g}{dU_x}=\frac{l}{C_I}\cdot\left[-\frac{R_1}{\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_e+R_g\right)(R_1+R_2)}\right]=$$

$$=-\frac{1,15}{10^{-8}}\cdot\frac{12\,000}{(7\,500+500+3\,600)(12\,000+20\,000)}=-3\,718\ \text{mm/V}.$$

Sensibilitatea este independentă de valoarea curentului I_g prin galvanometru. Ea este negativă datorită sensurilor pozitive adoptate în fig. 2.4.5.

3. Cînd curentul I_g prin galvanometru este nul, eroarea relativă procentuală limită determinată de pragul de sensibilitate al schemei de compensare este:

$$\delta_{min}=\frac{100\,U_{x\,min}}{U_x}=\frac{100\,a_{min}}{SU_x}=\frac{100\cdot(\pm 0,1)}{-3\,718\cdot 2,718}=\mp 9,9\cdot 10^{-4}\%.$$

Problema 2.4.6. Schema de compensare Feussner din fig. 2.4.6 are valoarea de lucru a curentului auxiliar $I_a=0,1$ mA, sursa de tensiune etalon fiind un element normal cu t.e.m. E_e dependentă de temperatură (vezi problema

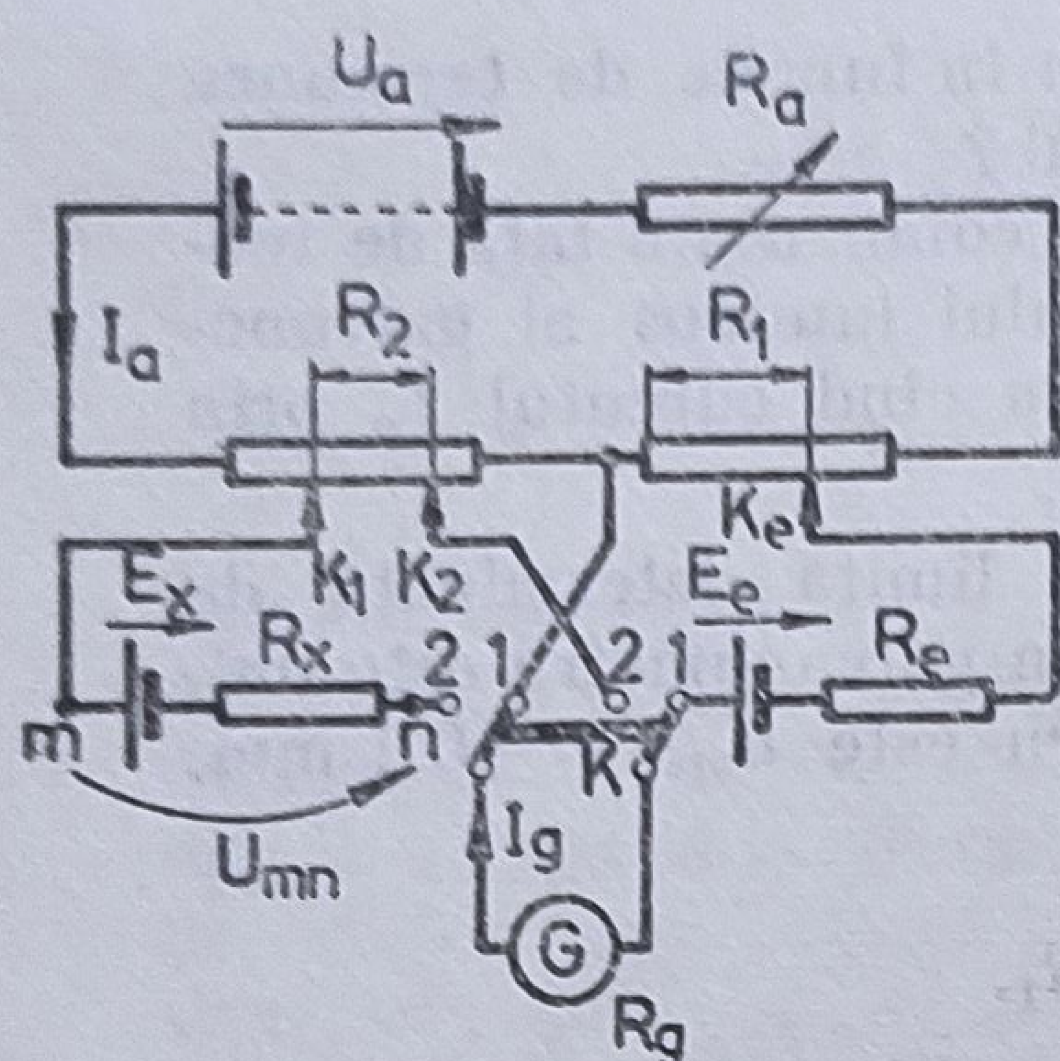


Fig. 2.4.6.

2.4.1), rezistența interioară R_e=700 Ω și clasa de precizie 0,001. Rezistoarele R_1 și R_2 au clasa de precizie 0,002 în timp ce galvanometrul are rezistența interioară R_g=1 000 Ω și constanta de curent C_I=8·10⁻¹⁰ A/div.

1. Știind că se lucrează într-o încăpere cu temperatura τ=22 °C, să se determine valoarea rezistenței R_1.

2. Presupunînd că s-a asigurat valoarea de lucru a curentului auxiliar I_a=0,1 mA și galvanometrul nu deviază cînd comutatorul K este în poziția 2, să se calculeze valoarea t.e.m. E_x, știind că rezistența R_2=15537,2 Ω.

3. Care este eroarea relativă procentuală limită $E_{r\lim Ex}$ de măsurare a t.em. E_x a sursei cu rezistența interioară R_x=330 Ω, deviația minimă sesizabilă la galvanometru fiind $a_{min}=\pm 0{,}2$ diviziuni ?

4. Să se determine rezistența echivalentă R_{mn} a schemei de compensare între punctele m, n în funcție de indicația a a galvanometrului, comutatorul K aflîndu-se în poziția 2. Cît este această rezistență cînd compensarea a avut loc ?

Soluție. 1. Pe baza tabelului 2.4.1 de la problema 2.4.1, la temperatura τ=22 °C elementul normal are t.em. E_e=1,018561 V. Ținînd seama de clasa de precizie $E_{r\lim Ee}$ a elementului normal rezultă că este rațional să se opereze cu primele șase cifre semnificative. Deci

$$R_1=\frac{E_e}{I_a}=\frac{1{,}01856}{0{,}0001}=10185{,}6\ \Omega.$$

2. $E_x=I_a\cdot R_2=0{,}0001\cdot 15537{,}2=1{,}55372$ V.

3. Notînd cu $E_{r\lim Ee}$ și $E_{r\lim R}$ erorile relative procentuale limită a t.e.m. E_e și respectiv a rezistențelor R_1 și R_2, se scrie :

$$E_{r\lim Ex}=E_{r\lim Ee}+2E_{r\lim R}+\delta_{1min}+\delta_{2min}$$

În această expresie,

$$\delta_{1min}=\frac{100\,C_I\,a_{min}}{E_e}(R_e+R_g+R_1)=\frac{100\cdot 8\cdot 10^{-10}(\pm 0{,}2)}{1{,}01856}(700+1\,000+$$
$$+10\,185{,}6)=\pm 1{,}87\cdot 10^{-4}\%$$

și

$$\delta_{2min}=\frac{100\,C_I\,a_{min}}{E_x}(R_x+R_g+R_2)=\frac{100\cdot 8\cdot 10^{-10}(\pm 0{,}2)}{1{,}55372}(330+1\,000+$$
$$+15\,537{,}2)=\pm 1{,}74\cdot 10^{-4}\%$$

reprezintă erorile relative procentuale limită determinate de pragul de sensibilitate al schemei de compensare în poziția 1 și în poziția 2 a comutatorului K. Rezultă :

$$E_{r\lim Ex}=(\pm 10^{-3})+2(\pm 2\cdot 10^{-3})+(\pm 0{,}187\cdot 10^{-3})+(\pm 0{,}174\cdot 10^{-3})=$$
$$=\pm 5{,}361\cdot 10^{-3}\%.$$

4.

$$R_{mn}=\frac{U_{mn}}{I_g}=\frac{E_x-I_gR_x}{I_g}=\frac{I_a}{I_g}\cdot R_2-R_x=\frac{I_a}{C_I\cdot a}\cdot R_2-R_x=$$

$$=\frac{10^{-4}}{8\cdot 10^{-10}\cdot a}\cdot 15\,537{,}2-330=\frac{1{,}942\cdot 10^9}{a}-330,\ [\Omega\ ;\ \text{div}].$$

Cînd compensarea a avut loc galvanometrul indică $a\leqslant |a_{min}|=0{,}2$ diviziuni și

$$R_{mn}\geqslant\frac{1{,}942\cdot 10^9}{0{,}2}-330=9{,}71\cdot 10^9\ \Omega=9{,}71\ \text{G}\Omega.$$

Schema de compensare se comportă în această împrejurare ca un voltmetru cu rezistență interioară deosebit de mare.

Problema 2.4.7. Rezistoarele în decadă ale unui compensator Feussner de precizie sînt realizate conform schemei din fig. 2.4.7. Să se stabilească relația dintre rezistențele R_1, R_2, ..., R_{n-1}, R_n în așa fel încît între punctul K_1' și cursorul K_{n+1} să se poată obține în sistemul zecimal orice tensiune multiplu de $U_1/10^n$, n fiind un număr întreg.

Soluție. Pentru a obține în sistemul zecimal orice tensiune multiplu de $U_1/10^n$, n fiind un număr întreg, este necesar ca

$$\frac{U_1}{10^n}=\frac{U_2}{10^{n-1}}=\ldots=\frac{U_{n-2}}{10^3}=\frac{U_{n-1}}{10^2}=\frac{U_n}{10}=U_{n+1}.$$

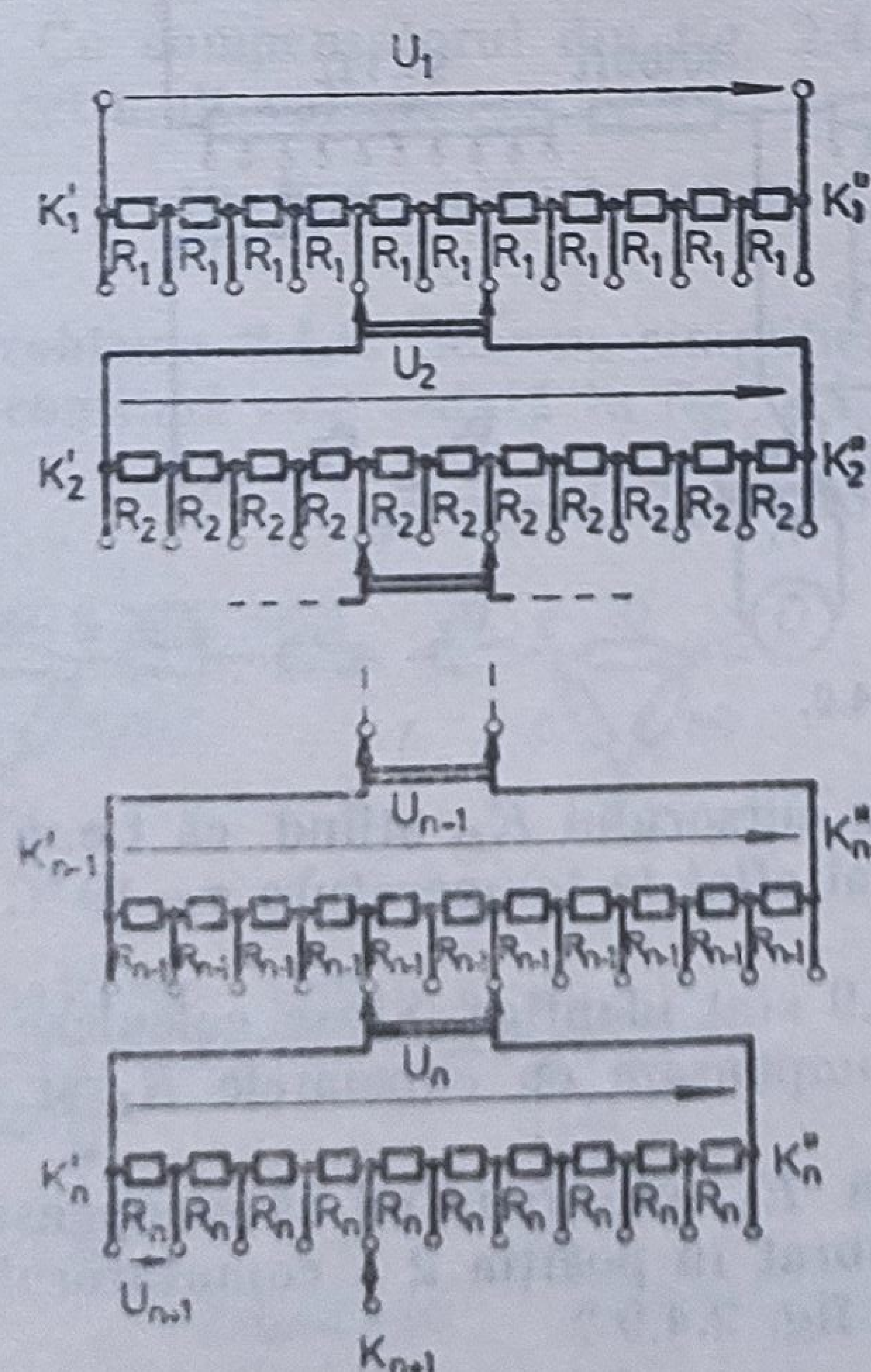


Fig. 2.4.7.

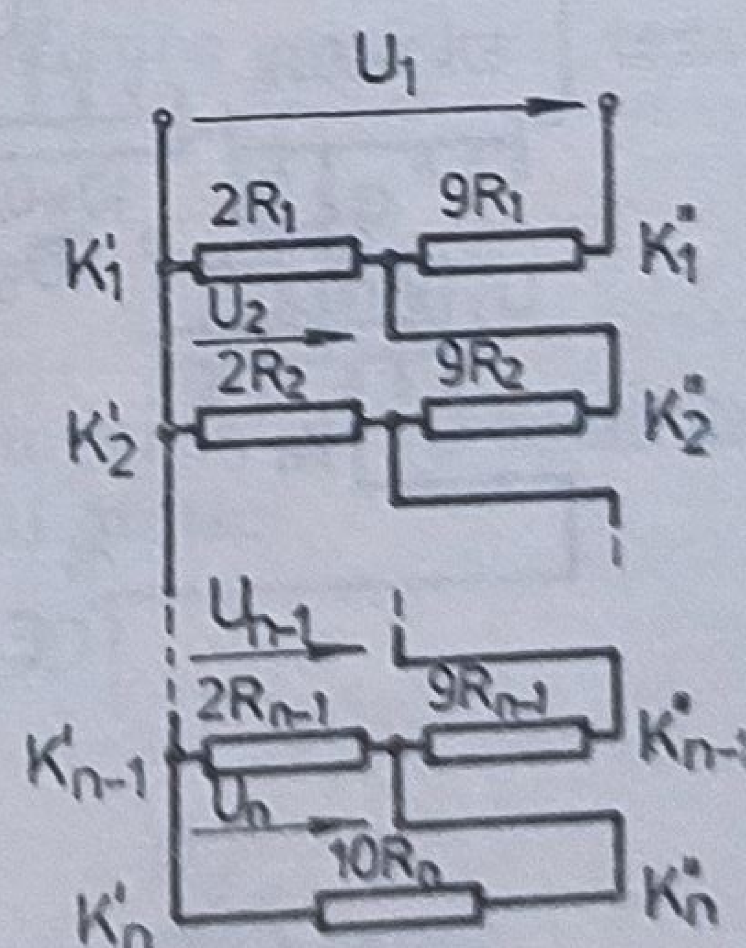


Fig. 2.4.8.

Ultima egalitate este satisfăcută de schema din fig. 2.4.7 pentru orice valoare a rezistenței R_n. Presupunînd punctele $K'_1, K'_2, \ldots, K'_{n-2}, K'_{n-1}$ și K_n echipotențiale se obține schema echivalentă din fig. 2.4.8, din care rezultă :

$$\frac{U_n}{U_{n-1}}=\frac{\dfrac{10R_n\cdot 2R_{n-1}}{10R_n+2R_{n-1}}}{9R_{n-1}+\dfrac{10R_n\cdot 2R_{n-1}}{10R_n+2R_{n-1}}}=\frac{1}{10}$$

și

$$R_{n-1}=5R_n.$$

Apoi :

$$\frac{U_{n-1}}{U_{n-2}}=\frac{\dfrac{10R_{n-1}\cdot 2R_{n-2}}{10R_{n-1}+2R_{n-2}}}{9R_{n-2}+\dfrac{10R_{n-1}\cdot 2R_{n-2}}{10R_{n-1}+2R_{n-2}}}=\frac{1}{10}$$

și

$$R_{n-2}=5R_{n-1}.$$

În general,

$$R_1=5R_2=\ldots=5^{n-3}R_{n-2}=5^{n-2}R_{n-1}=5^{n-1}R_n.$$

Problema 2.4.8. Valoarea de lucru a curentului auxiliar al compensatorului Feussner din fig. 2.4.9 este $I_a=0{,}1$ mA.

1. Să se precizeze polaritatea bornelor e_1, e_2, x_1 și x_2.

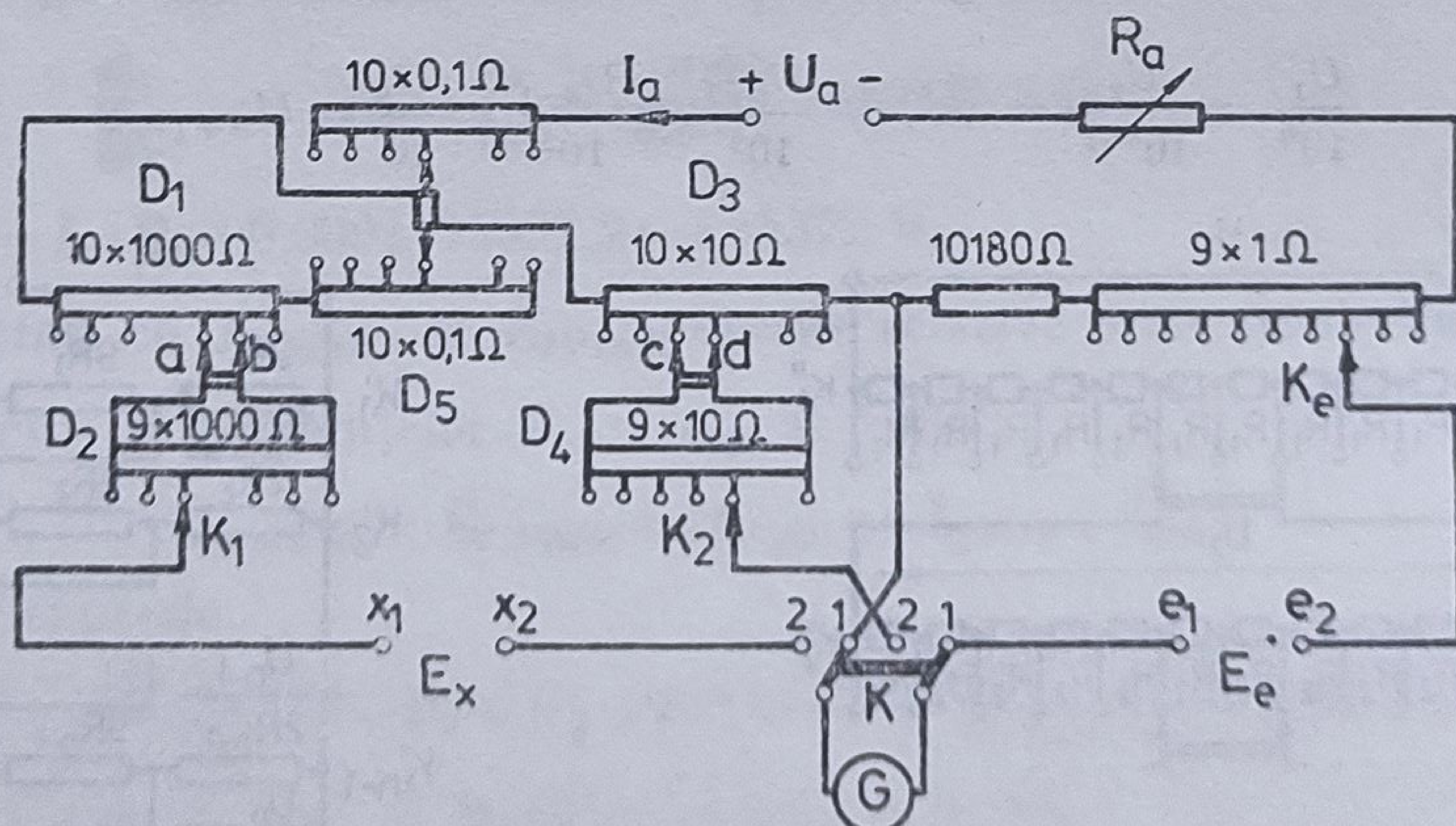


Fig. 2.4.9.

2. Să se stabilească poziția corectă a cursorului K_e, știind că t.e.m. etalon E_e este produsă de un element normal aflat la temperatura $\tau=19$ °C (vezi problema 2.4.1).
3. Schemele din fig. 2.4.6 și fig. 2.4.9 sînt identice. Să se calculeze rezistența R_2 corespunzătoare schemei de compensare cu cursoarele K_1 și K_2 în poziția din fig. 2.4.9.
4. Ce valoare are t.e.m. necunoscută E_x, presupunînd că compensatorul a fost etalonat în poziția 1 și apoi echilibrat în poziția 2 a comutatorului K, cursoarele K_1 și K_2 fiind în pozițiile din fig. 2.4.9 ?

5. Să se calculeze limita maximă de măsurare a acestui compensator.

Soluție. 1. Bornele e_1 și x_1 sînt pozitive (+). iar e_2 și x_2 negative (–).

2. Pe baza tabelului 2.4.1 de la problema 2.4.1 la temperatura $\tau=19\ °C$ rezultă t. e. m. $E_e=1{,}018686\ V\approx 1{,}0187\ V$. Rezistența necesară asigurării valorii de lucru a curentului auxiliar este

$$\frac{E_e}{I_a}=\frac{1{,}0187}{10^{-4}}=10\ 187\ \Omega.$$

Cursorul K_e se află pe al optulea plot dinspre stînga.

3. Din fig. 2.4.9 se obțin schemele echivalente din fig. 2.4.10 în care valorile numerice sînt rezistențele exprimate în Ω. Triunghiurile abK_1 și cdK_2 se transformă în stele echivalente, în momentul în care compensarea a avut loc, rezistența corespunzînd celei dintre punctele K_1' și K_2'. Deci $R_2=1\ 724{,}3\ \Omega$.

4. Cunoscînd rezistența R_2, rezultă:

$$E_x=I_aR_2=10^{-4}\cdot 1\ 724{,}3=0{,}17243\ V.$$

La compensatoare se obișnuiește ca în dreptul ploturilor rezistoarelor în decade să se înscrie valorile căderilor de tensiune provocate de valoarea de lucru a curentului auxiliar I_a. În cazul compensatorului din fig. 2.4.9 ploturile rezistoarelor în decade sînt notate astfel: D_1 – de la dreapta spre stînga – $(0, 1, 2, \ldots, 10)\cdot 10^{-1}$ V, D_2 – de la dreapta spre stînga – $(0, 1, 2, \ldots, 9)\cdot 10^{-2}$ V, D_3 – de la stînga spre dreapta – $(0, 1, 2, \ldots, 10)\cdot 10^{-3}$ V, D_4 – de la stînga spre dreapta – $(0, 1, 2, \ldots, 9)\cdot 10^{-4}$ V și D_5 – de la stînga spre dreapta – $(0, 1, 2, \ldots, 10)\cdot 10^{5}$ V. Cercetînd poziția cursoarelor compensatorului, se constată că între punctele K_1 și K_2 are loc căderea de tensiune

$$1\cdot 10^{-1}+7\cdot 10^{-2}+2\cdot 10^{-3}+4\cdot 10^{-4}+3\cdot 10^{-5}=0{,}17243\ V,$$

rezultat care concordă cu cel anterior.

5. Cu compensatorul din fig. 2.4.9 se poate măsura nemijlocit tensiunea avînd cel mult valoarea:

$$10\cdot 10^{-1}+9\cdot 10^{-2}+10\cdot 10^{-3}+9\cdot 10^{-4}+10\cdot 10^{-5}=1{,}101\ V.$$

Problema 2.4.9. Schema simplificată a unui compensator automat de tensiune continuă este redată în fig. 2.4.11. În regimul static,

$$u_x=I_aR_x=1{,}25\cdot 10^{-4}R_x,\ [V;\ \Omega].$$

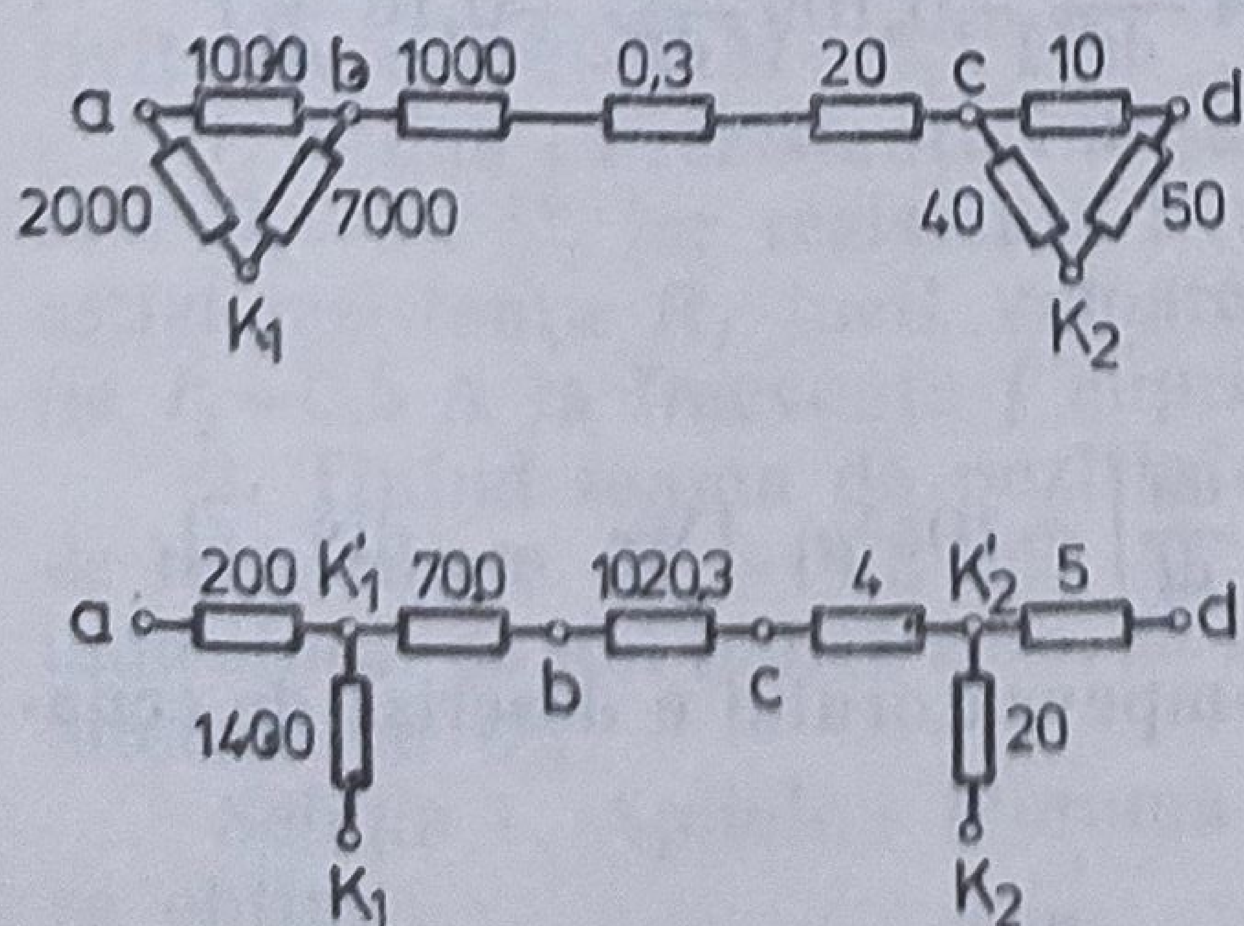


Fig. 2.4.10.

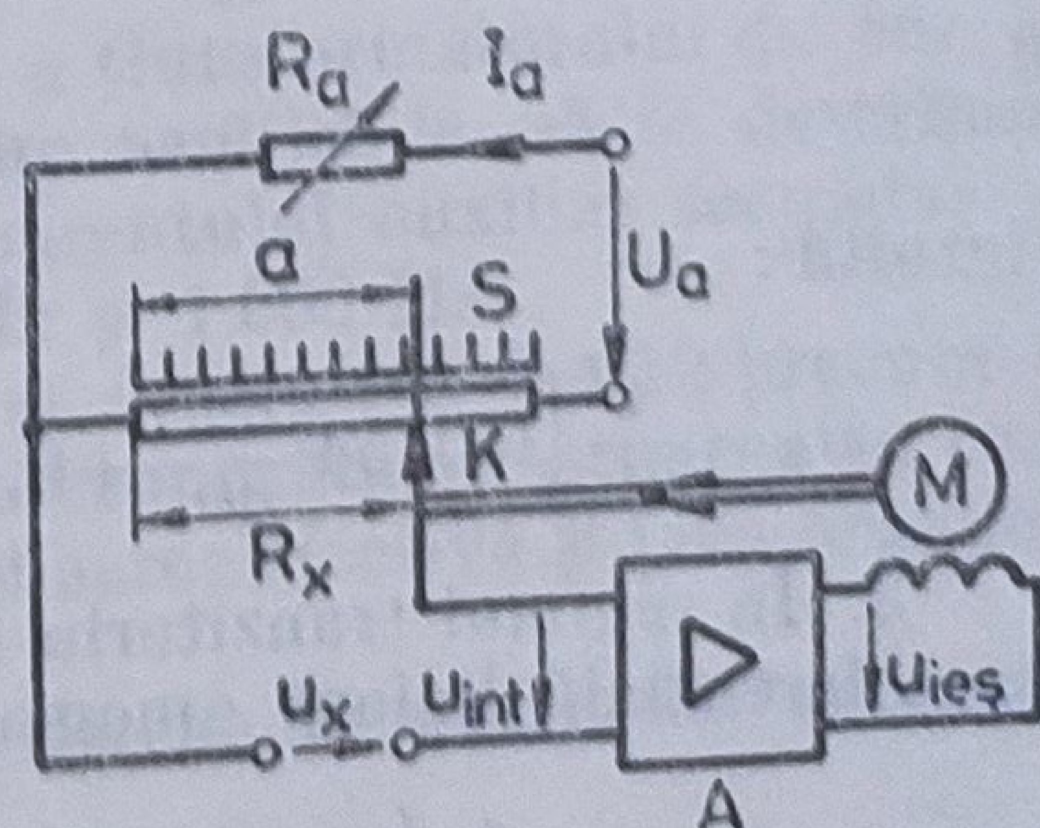


Fig. 2.4.11.

Dacă tensiunea necunoscută u_x se modifică, atunci la intrarea amplificatorului A apare tensiunea :

$$u_{int}=u_x-1{,}25\cdot10^{-4}R_x, \ [\mathrm{V};\ \mathrm{V},\ \Omega],$$

iar la ieşirea sa se obţine tensiunea $u_{ieş}$ determinată de expresia :

$$0{,}2\frac{\mathrm{d}\,u_{ieş}}{\mathrm{d}t}+u_{ieş}=Au_{int}, \ [\mathrm{V},\ \mathrm{s};\ -,\ \mathrm{V}].$$

Tensiunea $u_{ieş}$ se aplică servomotorului M, care deplasează cursorul C conform ecuaţiei :

$$0{,}077\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2}+0{,}16\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=u_{ieş}, \ [\mathrm{div},\ \mathrm{s};\ \mathrm{V}].$$

a fiind numărul de diviziuni citite pe scara gradată S în dreptul cursorului K. Între numărul de diviziuni a şi rezistenţa R_x există relaţia :

$$R_x=8a, \ [\Omega;\ \mathrm{div}].$$

1. Ştiind că scara are $a_{max}=100$ diviziuni, să se calculeze valoarea maximă u_{xmax} a tensiunii, care se poate măsura cu acest compensator precum şi constanta C a compensatorului.

2. Să se determine legătura dintre tensiunea u_x şi numărul de diviziuni a în regimul dinamic.

3. La ce valoare a factorului de amplificare A funcţionarea compensatorului este stabilă ?

Soluţie. 1. $u_{max}=1{,}25\cdot10^{-4}\cdot R_{xmax}=1{,}25\cdot10^{-4}\cdot8a_{max}=1{,}25\cdot10^{-4}\cdot$

$$\cdot8\cdot100=0{,}1\ \mathrm{V}$$

$$C=\frac{u_{xmax}}{a_{max}}=\frac{0{,}1}{100}=10^{-3}\ \mathrm{V/div}.$$

2. În expresia :

$$u_x=u_{int}+1{,}25\cdot10^{-4}R_x$$

se înlocuiesc

$$u_{int}=\frac{1}{A}\left(0{,}2\frac{\mathrm{d}u_{ieş}}{\mathrm{d}t}+u_{ieş}\right)=\frac{1}{A}\left(0{,}0154\frac{\mathrm{d}^3a}{\mathrm{d}t^3}+0{,}109\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2}+0{,}16\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)$$

şi

$$R_x=8a.$$

Rezultă :

$$u_x=\frac{1}{A}\left(0{,}0154\frac{\mathrm{d}^3a}{\mathrm{d}t^3}+0{,}109\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2}+0{,}16\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)+10^{-3}a, \ [\mathrm{V};\ -,\ \mathrm{div},\ \mathrm{s}].$$

3. În regimul tranzitoriu funcţionarea compensatorului e descrisă de ecuaţia diferenţială liniară omogenă :

$$\frac{1}{A}\left(0{,}0154\frac{\mathrm{d}^3a}{\mathrm{d}t^3}+0{,}109\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2}+0{,}16\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)+10^{-3}a=0$$

sau

$$\frac{d^3a}{dt^3}+7{,}08\frac{d^2a}{dt^2}+10{,}39\frac{da}{dt}+6{,}49\cdot10^{-2}Aa=0,\ [\text{div},\ -,\ \text{s}].$$

Conform criteriului de stabilitate al lui Routh-Hurwitz, compensatorul descris de această ecuație diferențială funcționează stabil cînd $A>0$ și

$$7{,}08\cdot10{,}39-6{,}49\cdot10^{-2}\cdot A>0$$

sau

$$A<1131{,}7.$$

Prin urmare, dacă se constată că funcționarea compensatorului este instabilă, atunci se recurge la micșorarea factorului de amplificare A pînă ce funcționarea compensatorului devine stabilă.

Se menționează că pentru cercetarea stabilității compensatoarelor automate de tensiune continuă există și alte criterii, unele mai avantajoase decît criteriul Routh-Hurwitz.

Problema 2.4.10. Cu ajutorul schemei de compensare Geyger din fig. 2.4.12 se măsoară tensiunea alternativă U_x. Valoarea de lucru a curentului auxiliar

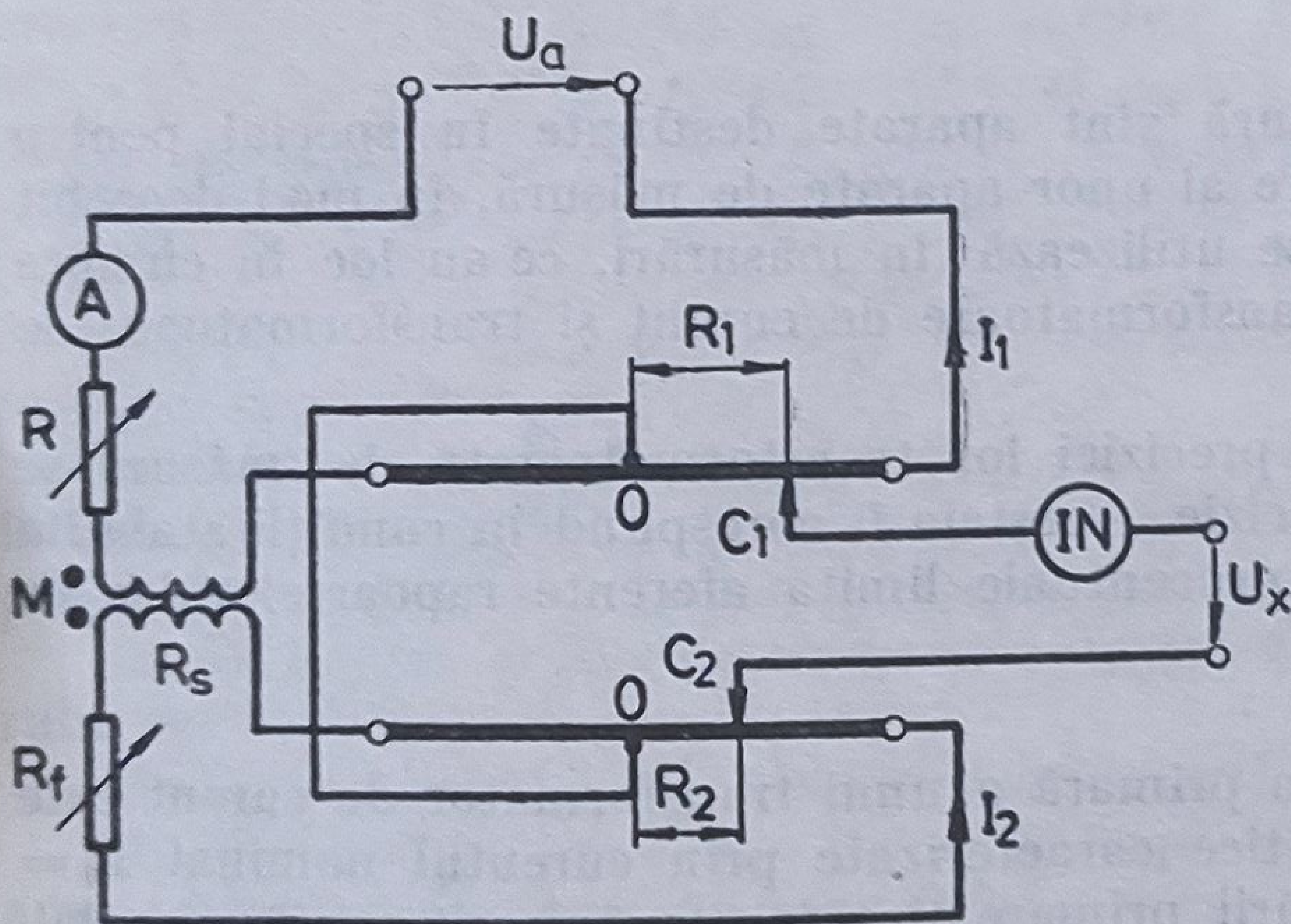


Fig. 2.4.12

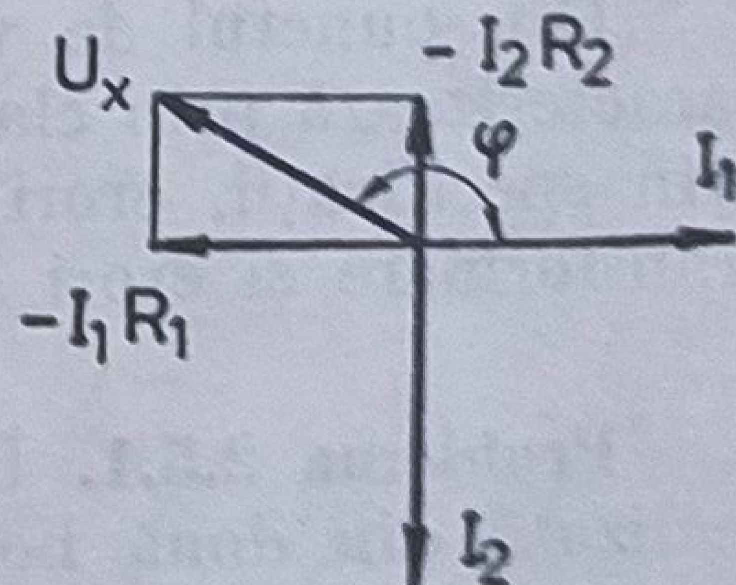


Fig. 2.4.13.

primar este $I_1=0{,}5$ A, iar transformatorul de curent fără miez de fier are inductivitatea mutuală $M=0{,}1$ H.

1. Știind că rezistența înfășurării secundare a transformatorului de curent este $R_s=3{,}7\ \Omega$, iar rezistența firului calibrat este neglijabilă, să se determine astfel rezistența R_f încît valoarea de lucru a curentului auxiliar secundar să fie $I_2=0{,}5$ A la frecvența f cuprinsă între 15 Hz și 1 000 Hz.

2. Ținînd seama de poziția cursoarelor C_1 și C_2 din fig. 2.4.12 precum și de rezistențele $R_1=14{,}8\ \text{m}\Omega$ și $R_2=9{,}2\ \text{m}\Omega$ corespunzătoare situației în care indicatorul de nul indică zero, să se stabilească valoarea efectivă și faza tensiunii alternative U_x.

Soluție 1. Aplicînd teorema a doua a lui Kirchhoff circuitului secundar se obține:

$$j.\,2\pi f\,M=\underline{I}_2\,(R_s+R_f).$$

Prin urmare,

$$R_f = \frac{2\pi f M}{I_2} - R_s.$$

La $f=15$ Hz rezultă $R_f=15{,}14\ \Omega$, iar la $f=1\,000$ Hz se obține $R_f=1252{,}3\ \Omega$.

2. Conform diagramei din fig. 2.4.13 valoarea efectivă a tensiunii este:

$$U_x = \sqrt{(-I_1R_1^2)+(-I_2R_2)^2} = \sqrt{(-0{,}5\cdot 14{,}8\cdot 10^{-3})^2+(-0{,}5\cdot 9{,}2\cdot 10^{-3})^2} = 8{,}713\cdot 10^{-3}\ \text{V} = 8{,}713\ \text{mV},$$

iar faza

$$\varphi = \pi - \text{arctg}\left(\frac{I_2R_2}{I_1R_1}\right) = 3{,}14 - \text{arctg}\left(\frac{0{,}5\cdot 9{,}2\cdot 10^{-3}}{0{,}5\cdot 14{,}8\cdot 10^{-3}}\right) = 2{,}584\ \text{rad}.$$

2.5. TRANSFORMATOARE DE MĂSURĂ

Transformatoarele de măsură sînt aparate destinate în special pentru lărgirea intervalului de măsurare al unor aparate de măsură, în mod deosebit al celor cu citire directă. Ele se utilizează în măsurări, ce au loc în circuite de curent alternativ. Există transformatoare de curent și transformatoare de tensiune.

Din punctul de vedere al preciziei lor transformatoarele de măsură se caracterizează prin clasa de precizie. Acesteia îi corespund în condiții stabilite prin specificații, erori relative procentuale limită aferente rapoartelor lor de transformare și erori de unghi.

Problema 2.5.1. Înfășurarea primară a unui transformator de curent este realizată din două bobine identice caracterizate prin curentul nominal $I_n=100$ A. Dacă bobinele înfășurării primare sînt legate în serie sau în paralel, curentul secundar nominal este $I_{2n}=5$ A. Să se determine raportul de transformare nominal al transformatorului de curent cînd cele două bobine ale înfășurării primare sînt legate în serie și atunci cînd ele sînt legate în paralel.

Soluție. Deoarece curentul secundar nominal este același indiferent de legarea bobinelor înfășurării primare, t.m.m. creeată de înfășurarea primară este aceeași în ambele situații; cu alte cuvinte, în fiecare caz bobinele înfășurării primare sînt parcurse de curentul $I_n=100$ A. Rezultă că în cazul legării în serie raportul de transformare este

$$K_{ns} = \frac{I_n}{I_{2n}} = \frac{100}{5} = 20,$$

iar la legarea în paralel

$$K_{np} = \frac{2I_n}{I_{2n}} = \frac{2\cdot 100}{5} = 40.$$

Problema 2.5.2. Două transformatoare de curent identice au curentul primar nominal $I_{1n}=600$ A și curentul secundar nominal $I_{2n}=5$ A. Atît înfășurările primare cît și cele secundare se pot lega în serie sau în paralel. Să se determine curenții nominali și rapoartele de transformare nominale, care se pot obține prin diferitele legări ale înfășurărilor celor două transformatoare de curent.

Soluție. Tabelul 2.5.1.

Tabelul 2.5.1

Legarea înfășurărilor primare	Legarea înfășurărilor secundare	Curentul primar nominal [A]	Curentul secundar nominal [A]	Raportul de transformare nominal
serie	serie	600	5	120
serie	paralel	600	10	60
paralel	serie	1 200	5	240
paralel	paralel	1 200	10	120

Problema 2.5.3. Pe un transformator de curent portabil sînt înscrise următoarele date: curentul primar nominal $I_{1n}=(15; 50; 100; 150; 200; 300; 600)$ A, curentul secundar nominal $I_{2n}=5$ A, clasa de precizie 0,2, impedanța secundară nominală $Z_{2n}=0{,}2\Omega$. Înfășurările corespunzătoare curenților primari nominali $I_{1n}=15; 50$ A sînt incluse în carcasa transformatorului. Pentru măsurarea curenților mai mari se trece un conductor de secțiune corespunzătoare printr-un orificiu al transformatorului de curent, obținîndu-se în acest fel înfășurarea primară.

1. Știind că curentul primar nominal de 600 A îi corespunde o înfășurare formată dintr-o spiră, să se determine numărul de spire al înfășurărilor corespunzătoare celorlalte valori ale curentului primar nominal.

2. Să se calculeze rapoartele de transformare nominale ale transformatorului de curent.

3. Să se afle puterea secundară nominală a transformatorului de curent.

4. În circuitul secundar al transformatorului de curent se conectează un ampermetru avînd intervalul de măsurare $I_n=5$ A și clasa de precizie 0,5. Să se calculeze eroarea relativă procentuală limită de măsurare a curenților cuprinși între 5 și 600 A.

Soluție. 1, 2. Rezultatele s-au trecut în tabelul 2.5.2, în care cu N_1 s-a notat numărul de spire al înfășurării primare, iar cu K_n raportul de transformare nominal.

Tabelul 2.5.2

I_{1n}	[A]	15	50	100	150	200	300	600
$N_1=\frac{600}{I_{1n}}$		40	12	6	4	3	2	1
$K_n=\frac{I_{1n}}{I_{2n}}$		3	10	20	30	40	60	120

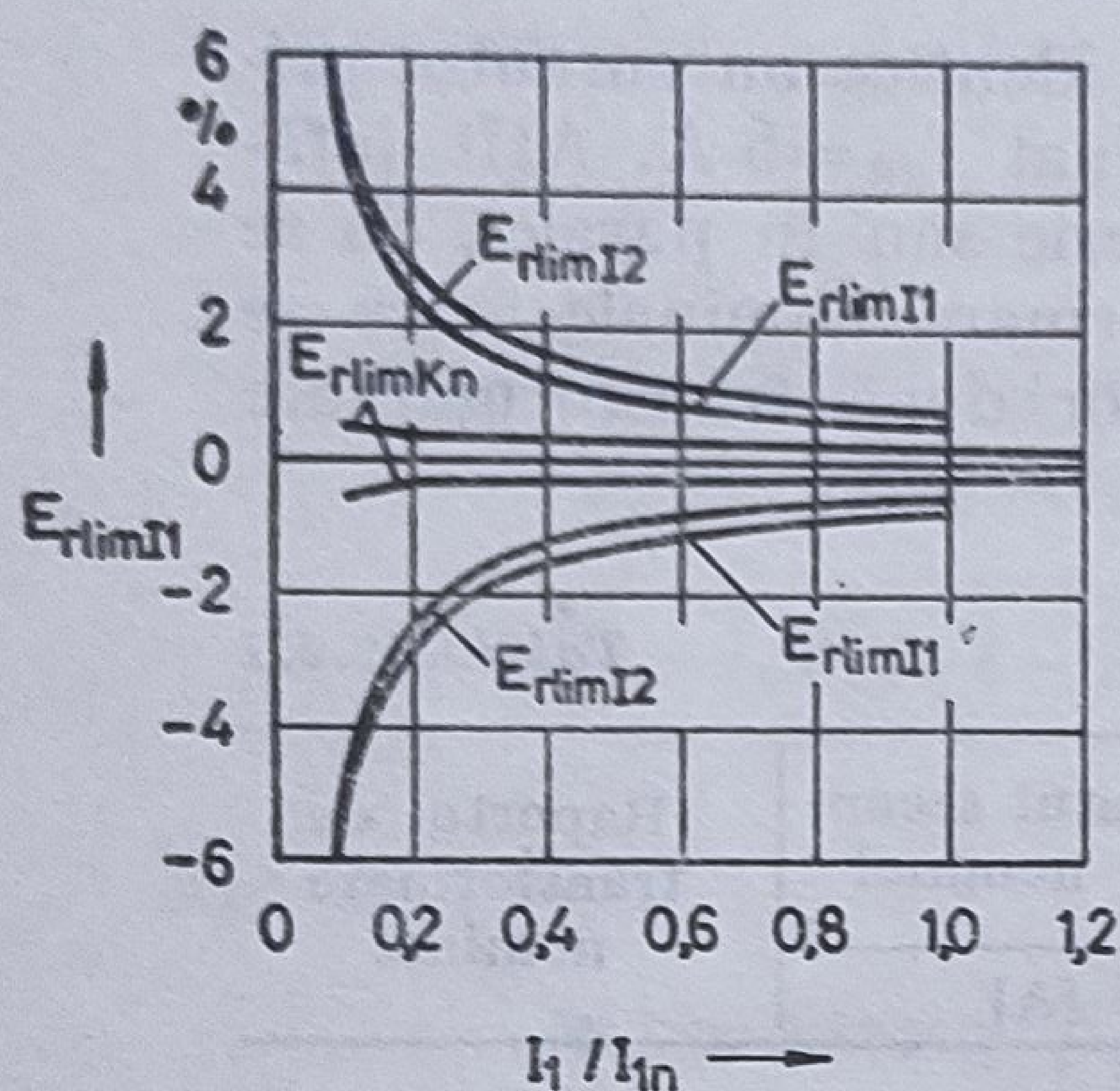


Fig. 2.5.1.

3. Puterea secundară nominală a transformatorului de curent este

$$S_{2n}=I_{2n}^2 \cdot Z_{2n}=5^2 \cdot 0,2=5 \text{ VA}.$$

4. Curentul primar

$$I_1=K_n I_2$$

se măsoară cu eroarea relativă procentuală limită

$$E_{r\lim I_1}=E_{r\lim Kn}+E_{r\lim I_2}.$$

Conform standardelor eroarea relativă procentuală limită $E_{r\lim Kn}$ are pentru un transformator de curent cu clasa de precizie 0,2 valorile redate în fig. 2.5.1. Eroarea relativă procentuală limită de măsurare cu ampermetrul a curentului secundar I_2 este :

$$E_{r\lim I_2}=(\pm 0,5) \cdot \frac{I_{1n}}{I_1}=\frac{(\pm 0,5)}{\frac{I_n}{I_{1n}}},$$

reprezentată în aceeași figură împreună cu eroarea relativă procentuală limită $E_{r\lim I_1}$.

Problema 2.5.4. La bornele secundare ale unui transformator de curent, avînd curentul secundar nominal $I_{2n}=5$ A și sarcina secundară nominală $S_{2n}=25$ VA, se leagă la distanța $l=87$ m un ampermetru cu rezistența interioară $R_a=5$ mΩ și inductivitatea $L_a=2,3$ μH. Să se determine secțiunea minimă S_{min} admisibilă a conductorului de legătură din cupru, știind că transformatorul este alimentat în c. a. de frecvență industrială $f=50$ Hz.

Soluție. Impedanța secundară nominală este :

$$Z_{2n}=\frac{S_{2n}}{I_{2n}^2}=\frac{25}{5^2}=1\Omega.$$

Notînd cu $\rho_{cu}=0,0175$ Ωmm²/m rezistivitatea cuprului, rezultă :

$$\sqrt{\left(\frac{2\rho_{cu} l}{S_{min}}+R_a\right)^2+(2\pi f L_a)^2}=Z_{2n}$$

și apoi

$$\sqrt{\left(\frac{2 \cdot 0,0175 \cdot 87}{S_{min}}+5 \cdot 10^{-3}\right)^2+(2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 2,3 \cdot 10^{-6})^2}=1.$$

Se obține $S_{min}=3,06$ mm² care se majorează cu 10% pentru a ține seama de rezistențele de contact și reactanța conductoarelor de legătură. Conform standardelor conductorul cu secțiunea imediat superioară lui 1,1 $S_{min}=3,37$ mm² are 4 mm².

Problema 2.5.5. Înfășurarea primară a unui transformator de curent este parcursă de un c.a. sinusoidal, avînd valoarea efectivă I_1 și frecvența f. Caracteristica magnetică (fig. 2.5.2) a miezului de fier al transformatorului de curent se aproximează prin segmente de dreaptă, avînd ecuațiile

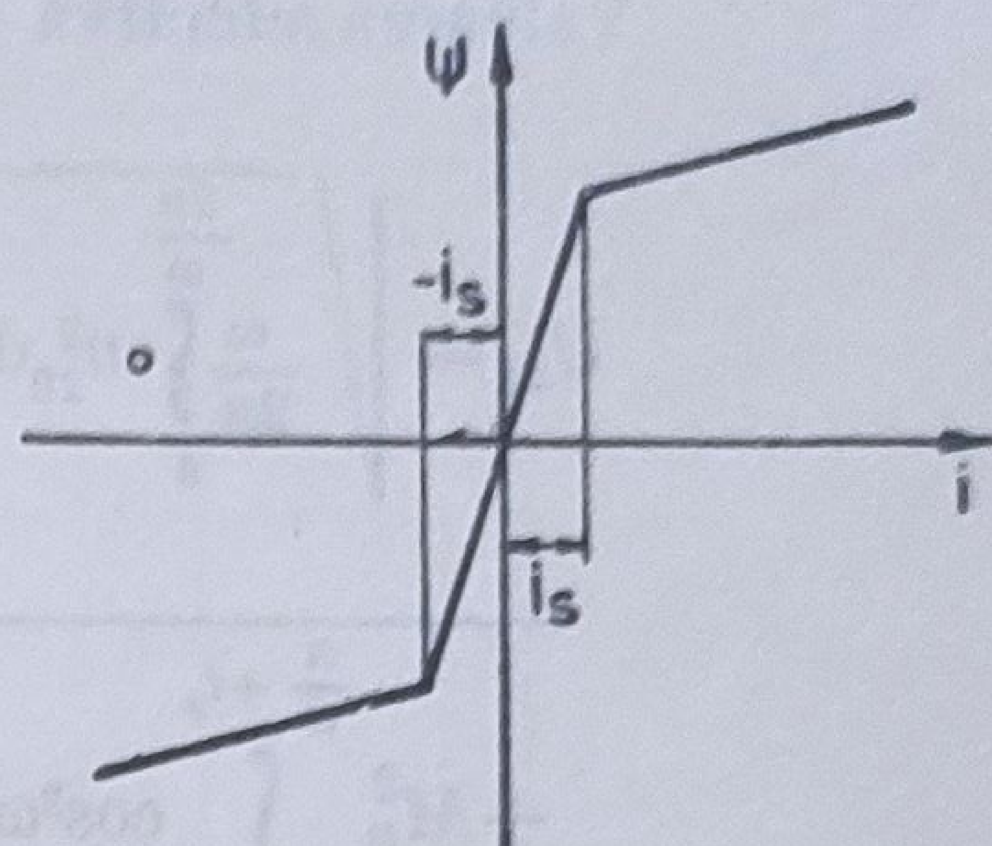


Fig. 2.5.2.

$$\Psi(i) = \begin{cases} M_s i + (M_n - M_s)\, i_s, & (i > i_s), \\ M_n i, & (-i_s < i < i_s), \\ M_n i - (M_n - M_s)\, i_s, & (i < -i_s), \end{cases}$$

i fiind curentul de magnetizare raportat la înfășurarea primară, Ψ înlănțuirea magnetică a înfășurării secundare de către fluxul util ce are loc în miez, iar M_n și M_s inductivitatea mutuală dintre înfășurările transformatorului cînd miezul e nesaturat și saturat. Datorită unei defecțiuni se întrerupe circuitul secundar al acestui transformator de curent.

1. Să se determine valoarea momentană u_{20}, valoarea efectivă U_{20} și valoarea maximă U_{20m} a tensiunii la bornele secundare ale transformatorului de curent cu circuitul secundar întrerupt.

2. Să se reprezinte grafic funcțiile $U_{20}(I_1)$ și $U_{20m}(I_1)$ pentru un transformator de curent, avînd curentul primar nominal $I_{1n}=15$ A, frecvența nominală $f_n=50$ Hz și caracteristica magnetică a miezului de fier aproximată prin segmente de dreaptă cu $i_s=0{,}03$ A, $M_n=0{,}4$ H și $M_s=0{,}4$ mH.

Soluție 1. Tensiunea la bornele secundare ale transformatorului de curent cu circuitul secundar întrerupt este egală cu t.e.m. indusă în înfășurarea secundară de către fluxul magnetic produs de curentul primar. Se notează valoarea momentană a curentului primar cu:

$$i_1 = \sqrt{2} I_1 \sin \omega t,$$

în care $\omega = 2\pi f$. Din

$$i_s = \sqrt{2} I_1 \sin \omega t_s,$$

rezultă momentul

$$t_s = \frac{1}{\omega} \cdot \arcsin\left(\frac{i_s}{\sqrt{2} I_1}\right),$$

la care miezul de fier se saturează. În decursul unei perioade a curentului primar i_1, valoarea momentană a tensiunii la bornele secundare este:

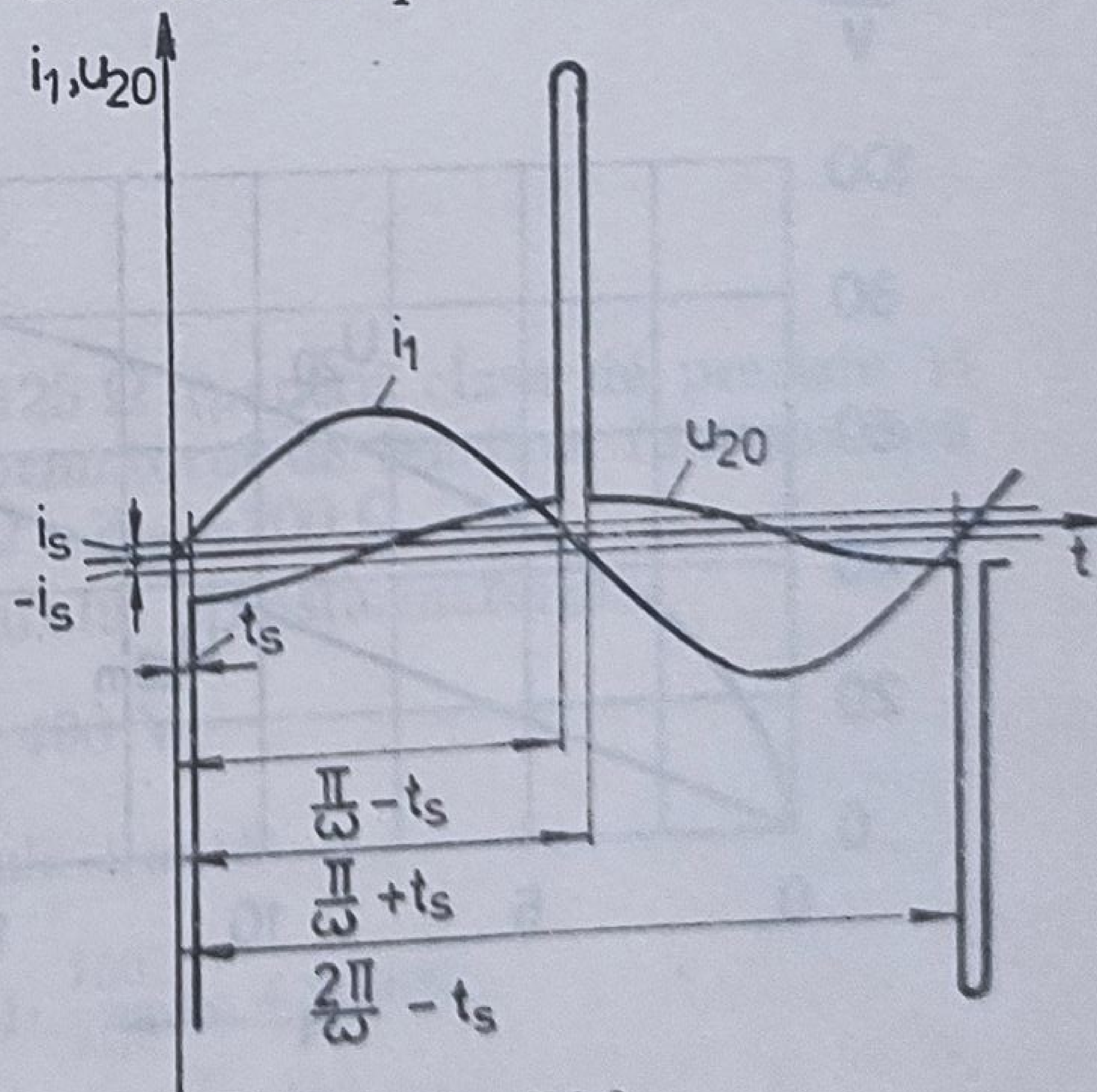


Fig. 2.5.3.

$$u_{20} = -\sqrt{2} I_1 M_n \omega \cos \omega t,$$

$$\left(0 \leq t \leq t_s;\ \frac{\pi}{\omega} - t_s \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} + t_s;\ \frac{2\pi}{\omega} - t_s \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}\right).$$

și

$$u_{20} = -\sqrt{2} I_1 M_s \omega \cos \omega t, \quad \left(t_s \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} - t_s;\ \frac{\pi}{\omega} + t_s \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega} - t_s\right)$$

Forma de variație în timp a tensiunii u_{20} s-a redat grafic în fig. 2.5.3.

Valoarea efectivă a tensiunii la bornele secundare este

$$U_{20}=\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_{0}^{\frac{2\pi}{\omega}} u_{20}^{2}dt}=\sqrt{\frac{I_1^2\omega^3}{\pi}\left(M_n^2\int_{0}^{t_s}\cos^2\omega t\,dt+M_s^2\int_{t_s}^{\frac{\pi}{\omega}-t_s}\cos^2\omega t\,dt+\right.}$$

$$\overline{\left.+M_n^2\int_{\frac{\pi}{\omega}-t_s}^{\frac{\pi}{\omega}+t_s}\cos^2\omega t\,dt+M_s^2\int_{\frac{\pi}{\omega}-t_s}^{\frac{2\pi}{\omega}-t_s}\cos^2\omega t\,dt+M_n^2\int_{\frac{2\pi}{\omega}-t_s}^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos^2\omega t\,dt\right)}=$$

$$=I_1\omega\sqrt{\frac{1}{\pi}\left(M_n^2-M_s^2\right)\left(2\omega t_s+\sin 2\omega t_s\right)+M_s^2}.$$

La $t=\pi/\omega$ se determină valoarea maximă a tensiunii la bornele secundare

$$U_{20m}=-\sqrt{2}I_1M_n\,\omega\cos\omega\cdot\frac{\pi}{\omega}=\sqrt{2}I_1M_n\omega.$$

2. Reprezentările grafice ale funcţiilor $U_{20}(I_1)$ şi $U_{20m}(I_1)$ s-au redat în fig. 2.5.4. Se observă că valoarea maximă a tensiunii la bornele secundare ale transformatorului de curent cu circuitul secundar întrerupt este mult mai mare decît valoarea sa efectivă.

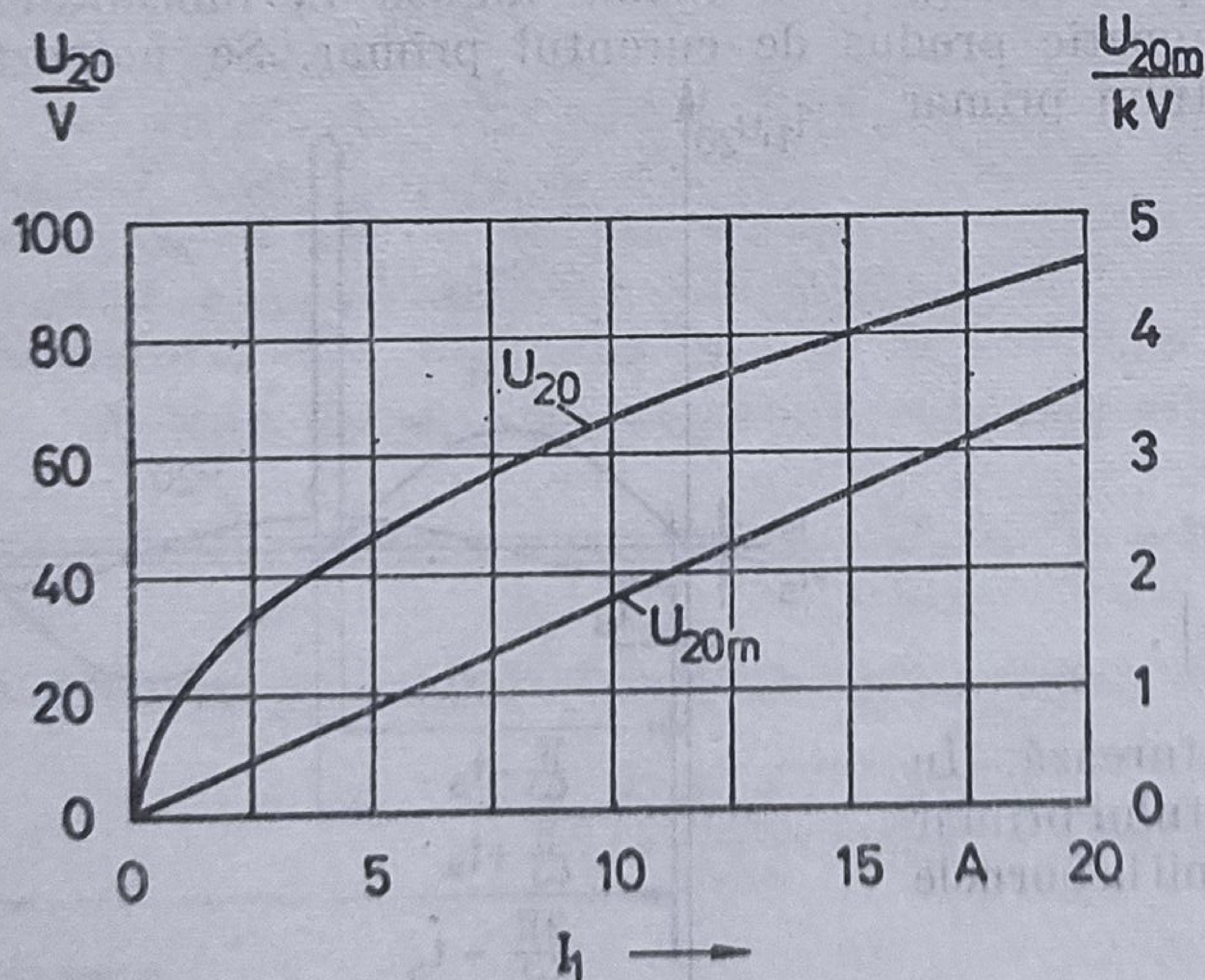


Fig. 2.5.4.

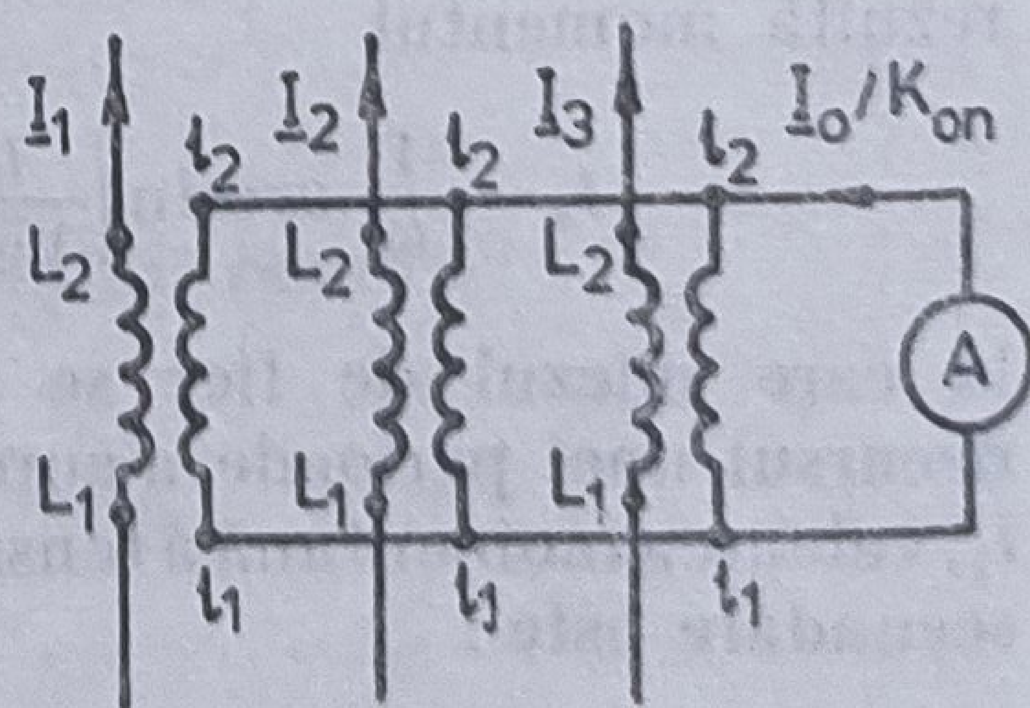


Fig. 2.5.5.

Problema 2.5.6. Schema din fig. 2.5.5 serveşte la măsurarea componentei de succesiune omopolară a curenţilor $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ şi $\underline{I}_3$ ai unei linii electrice de c. a. trifazat. Cele trei transformatoare de curent sînt identice şi au raportul de transformare nominal $K_n=150/5$. Să se calculeze raportul de transformare nominal K_{on} al schemei faţă de componenta de succesiune omopolară.

Soluție. Componenta de succesiune omopolară are valoarea

$$\underline{I}_0=\frac{1}{3}(\underline{I}_1+\underline{I}_2+\underline{I}_3)$$

Ampermetrul fiind parcurs de curentul

$$\frac{\underline{I}_0}{K_{on}}=\frac{1}{3}\left(\frac{\underline{I}_1}{K_n}+\frac{\underline{I}_2}{K_n}+\frac{\underline{I}_3}{K_n}\right),$$

rezultă

$$K_{on}=K_n=150/5.$$

Problema 2.5.7. Un transformator de tensiune are următoarele caracteristici : tensiunea primară nominală $U_{1n}=6$ kV, tensiunea secundară nominală $U_{2n}=100$ V, puterea secundară nominală P_{2n}, clasa de precizie 0,5 (la $S_{2n}=50$ VA), 1 (la $S_{2n}=80$ VA) și 3 (la $S_{2n}=200$ VA). La bornele înfășurării sale secundare se leagă un voltmetru feromagnetic, avînd intervalul de măsurare $U_n=150$ V, rezistența interioară $R=15\,000\ \Omega$ și clasa de precizie 1,5. Măsurîndu-se două tensiuni cu această schemă, voltmetrul indică 91,5 V și 73 V. Să se calculeze valorile tensiunilor din primarul transformatorului de tensiune și erorile relative procentuale limită de măsurare ale lor.

Soluție. Raportul de transformare nominal al transformatorului de tensiune este

$$K_n=\frac{U_{1n}}{U_{2n}}=\frac{6\,000}{100}=60,$$

iar impedanța sa secundară nominală

$$Z_{2n}=\frac{U_{2n}^2}{S_{2n}}$$

este 200 Ω (pentru clasa de precizie 0,5), 125 Ω (pentru clasa de precizie 1) și 50 H (pentru clasa de precizie 3). Transformatorul de tensiune funcționează în clasa de precizie 0,5 întrucît $R=15\,000\ \Omega>Z_{2n}=200\ \Omega$.

In primul caz tensiunea aplicată primarului transformatorului

$$U_1'=60\cdot 91{,}5=5\,490\ \text{V},$$

este măsurată cu eroarea relativă procentuală limită

$$E_{r\,\text{lim}\,U_1'}=(\pm 0{,}5)+(\pm 1{,}5)\cdot\frac{150}{91{,}5}=\pm 2{,}96\%.$$

În al doilea caz se măsoară tensiunea

$$U_1''=60\cdot 73=4\,380\ \text{V}.$$

Conform standardelor nu se precizează eroarea relativă procentuală limită de măsurare cu transformatoare de tensiune alimentate cu tensiune avînd valoarea sub 80% din tensiunea primară.

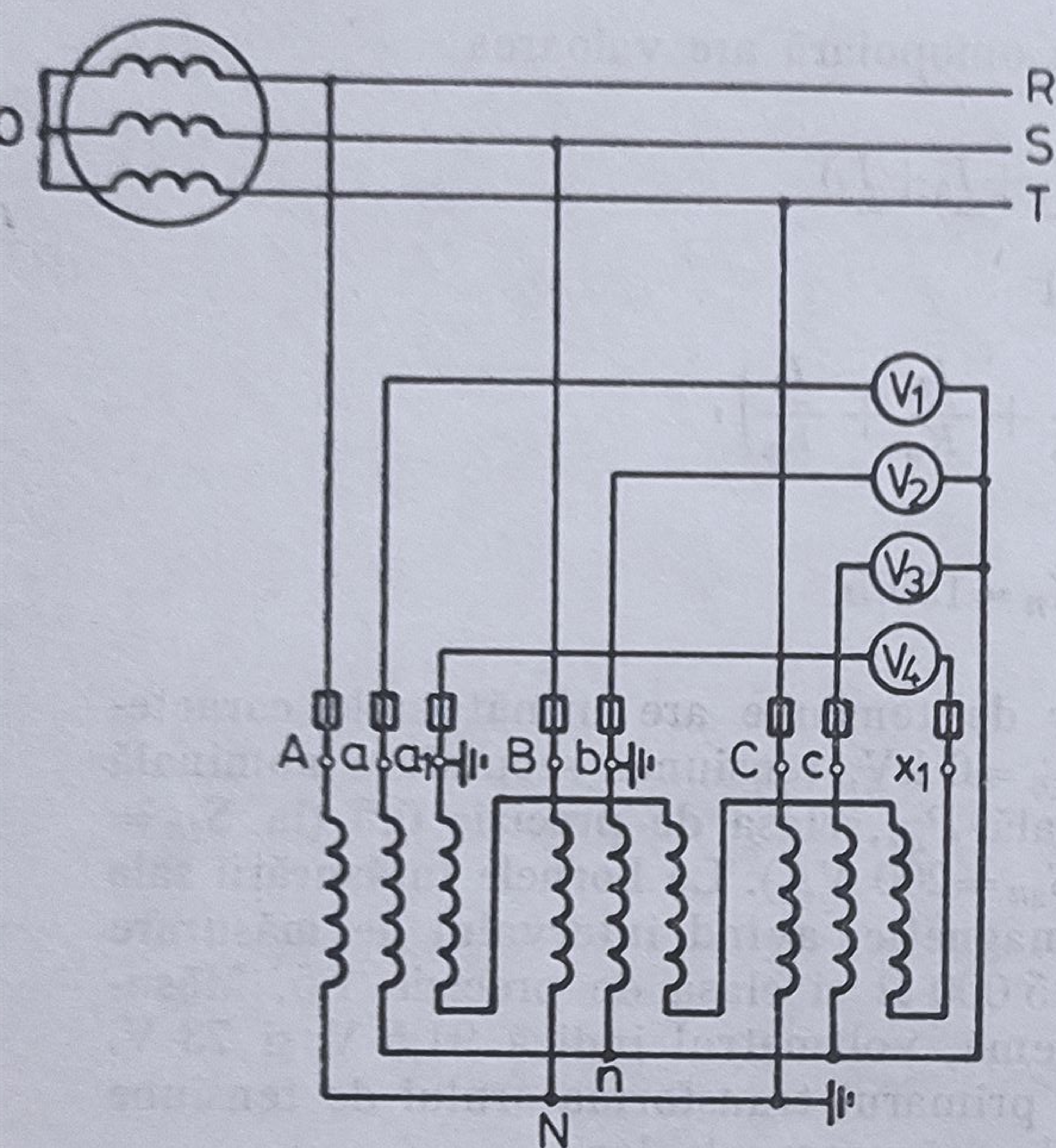


Fig. 2.5.6.

Problema 2.5.8. Tensiunile la bornele unui generator de c. a. trifazat se măsoară prin intermediul schemei din fig. 2.5.6. Caracteristicile transformatorului de tensiune se indică în tabelul 2.5.3. Cele patru voltmetre au intervalul de măsurare 150 V și clasa de precizie 1,5.

1. Știind că în regimul normal de funcționare potențialul punctului N este identic cu cel al punctului O, să se determine limitele între care se încadrează indicațiile voltmetrelor cînd tensiunea la bornele generatorului este 10 kV.

2. Între ce limite se află indicațiile voltmetrelor cînd faza T este pusă la pămînt, tensiunile între faze fiind 10 kV ? Dar cînd siguranța din dreptul bornei C este arsă, tensiunile între faze fiind 10 kV ?

Datorită nesimetriilor care apar în realitate între înfășurările celor trei faze ale transformatorului de tensiune, tensiunea la bornele a_1x_1 poate diferi cu ± 10 V față de valoarea determinată teoretic. De acest fapt se ține seama în situațiile de la punctele 1, 2.

Tabelul 2.5.3

Înfășurarea	Notația bornelor (fig. 2.5.6)	Tensiunea nominală [kV]	Tensiunea de izolație [kV]	Clasa de precizie
primară	$ABCN$	$10/\sqrt{3}$	10	0,5
secundară	$abcn$	$0,1/\sqrt{3}$	0,1	
secundară	a_1x_1	0,1/3	0,1	–

Soluție. 1. Datorită erorilor de măsurare ale transformatorului de tensiune și ale voltmetrelor V_1, V_2 și V_3, indicațiile acestora sînt cuprinse între

$$\frac{100}{\sqrt{3}} \pm \frac{0,5}{100} \cdot \frac{100}{\sqrt{3}} \pm \frac{1,5}{100} \cdot 150 = (57,74 \pm 2,54)\ \text{V}.$$

Voltmetrul V_4 indică

$$\pm 10 \pm \frac{1,5}{100} \cdot 150 = \pm\ (10 + 2,25)\ \text{V}.$$

2. În cazul punerii la pămînt a fazei T tensiunile la bornele AN și BN cresc, eroarea transformatorului de tensiune nemaifiind precizată. Indicațiile voltmetrelor V_1 și V_2 sînt în jur de 100 V, a voltmetrului V_3 este nulă, iar a voltmetrului V_4 cuprinsă între :

$$100 \pm 10 \pm \frac{1,5}{100} \cdot 150 = (100 \pm 12,25)\ \mathrm{V}.$$

La arderea siguranței din dreptul bornei C voltmetrele V_1 și V_2 indică :

$$\frac{100}{\sqrt{3}} \pm \frac{1,5}{100} \cdot \frac{100}{\sqrt{3}} \pm \frac{1,5}{100} \cdot 150 = (57,74 + 2,54)\ \mathrm{V}.$$

În același timp indicația voltmetrului V_3 este nulă, iar a voltmetrului V_4 cuprinsă între :

$$\frac{100}{\sqrt{3}} \pm 10 \pm \frac{1,5}{100} \cdot 150 = (57,74 \pm 12,25)\ \mathrm{V}.$$

Indicația voltmetrului V_4 este suficientă pentru evidențierea unei puneri la pămînt în instalația de înaltă tensiune.

Problema 2.5.9. Prin intermediul unui transformator de tensiune de c. a. trifazat, avînd înfășurările secundare conectate în triunghi deschis, raportul de transformare nominal al tensiunilor de fază $K_n = (110/\sqrt{3})\ /0,1$ și erori neglijabile, se măsoară componenta de succesiune omopolară a sistemului de tensiuni într-un punct al unei rețele de c. a. trifazat de 110 kV cu neutrul legat direct la pămînt (fig. 2.5.7).

1. Să se determine tensiunea $\underline{U}_0$ la bornele secundare a_1x_1 cînd tensiunile corespunzătoare fazelor R, S și T sînt simetrice.

2. Cît este tensiunea $\underline{U}_0$ la bornele a_1x_1 în cazul unui scurtcircuit între bornele B și C? Dar în cazul punerii bornei A la pămînt?

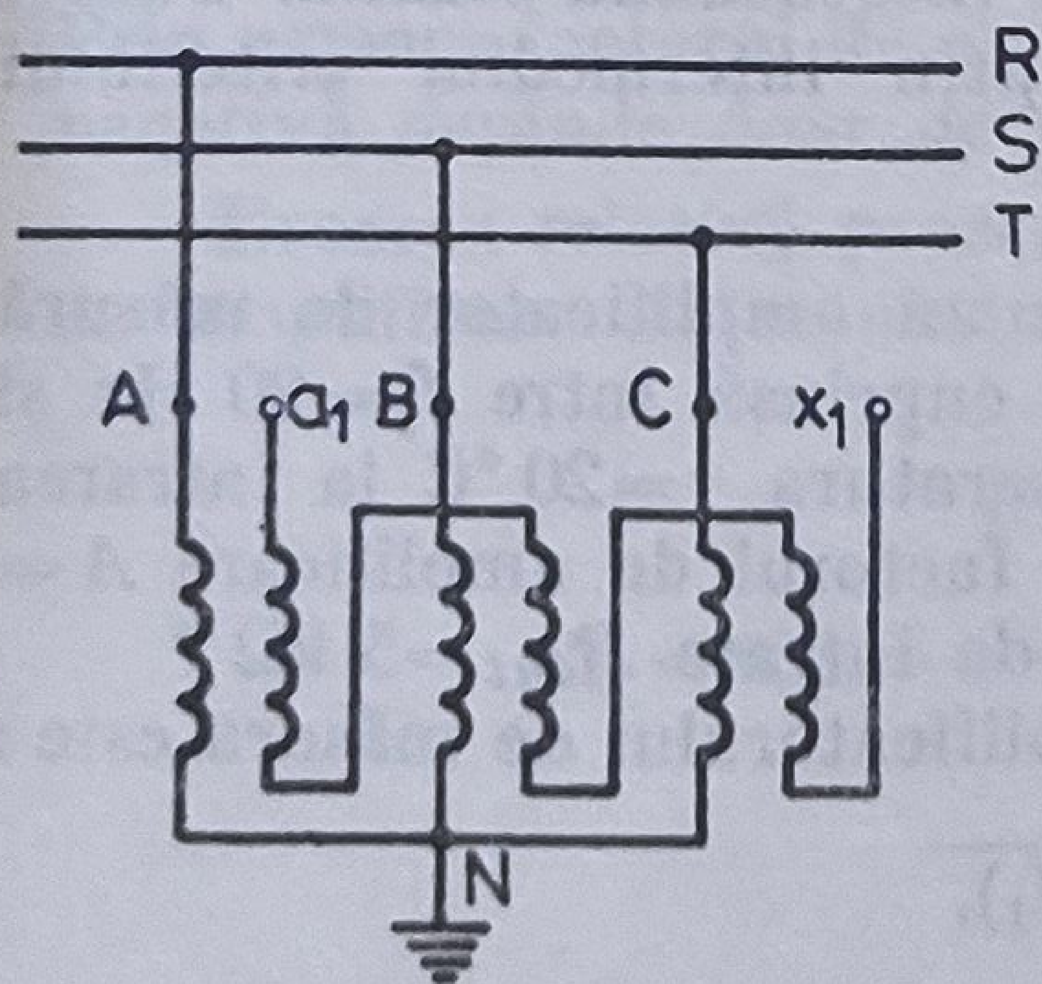


Fig. 2.5.7.

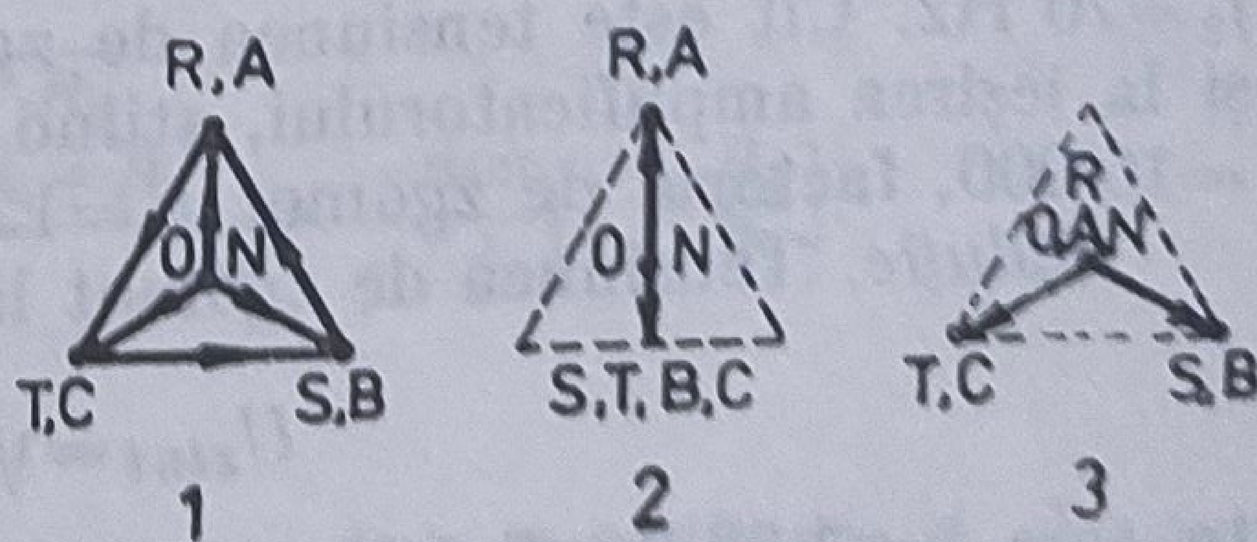


Fig. 2.5.8.

Soluție. 1. Pe baza diagramei tensiunilor complexe din fig. 2.5.8.1 rezultă :

$$\underline{U}_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{\underline{U}_{RO}}{K_n} + \frac{\underline{U}_{SO}}{K_n} + \frac{\underline{U}_{TO}}{K_n}\right) = 0.$$

2. În cazul unui scurtcircuit între bornele B și C se ajunge la sistemul de tensiuni din fig. 2.5.8.2. Ca urmare,

$$\underline{U}_0=\frac{1}{3}\left(\frac{\underline{U}_{RO}}{K_n}+\frac{\underline{U}_{SO}}{K_n}+\frac{\underline{U}_{TO}}{K_n}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\underline{U}_{RO}}{K_n}-\frac{1}{2}\frac{\underline{U}_{RO}}{K_n}-\frac{1}{2}\frac{\underline{U}_{RO}}{K_n}\right)=0.$$

În urma punerii la pămînt a bornei A se obține diagrama tensiunilor complexe din fig. 2.5.8.3. De aici,

$$\underline{U}_0=\frac{1}{3}\left(\frac{\underline{U}_{SO}}{K_n}+\frac{\underline{U}_{TO}}{K_n}\right)=\frac{\underline{U}_{SO}}{K_n}\exp\left(-j\frac{\pi}{3}\right)\frac{\underline{U}_{SO}}{1\,100\sqrt{3}}\exp\left(-j\frac{\pi}{3}\right).$$

2.6. AMPLIFICATOARE DE MĂSURĂ

Amplificatoarele de măsură sînt dispozitive destinate pentru mărirea sensibilității, micșorarea consumului și lărgirea intervalului de măsurare ale unor aparate de măsură, în special ale celor cu citire directă. Se disting amplificatoare de măsură fără reacție și amplificatoare de măsură cu reacție negativă.

Amplificatoarele de măsură fără reacție se utilizează la realizarea indicatoarelor de nul. Factorul lor de amplificare este mare, dar pronunțat dependent de mărimi de influență (de ex. temperatura mediului, tensiunea de alimentare). Modificarea oricărei mărimi de influență atrage după sine variații ale factorului de amplificare.

Amplificatoarele de măsură cu reacție negativă se folosesc în scopuri diverse. Consumul lor din circuitul, în care se efectuează măsurarea, este mic, iar factorul de amplificare – de obicei nu prea mare – este aproape independent de mărimi de influență. Reacția negativă se realizează în moduri diferite, conducînd uneori la însușiri speciale (de ex. de integrare). Funcționarea amplificatoarelor de măsură cu reacție negativă nu este întotdeauna stabilă. Uneori este indicată cercetarea stabilității lor (de ex. prin intermediul criteriului Routh-Hurwitz sau a diagramei Bode).

Problema 2.6.1. Un indicator de nul conține un amplificator de măsură selectiv pentru tensiuni alternative cu frecvența cuprinsă între $f_1=20$ Hz și $f_2=70$ Hz. Cît este tensiunea de zgomot la temperatura $\tau=20$ °C la intrarea și la ieșirea amplificatorului, știind că acesta are factorul de amplificare $A=10\,000$, factorul de zgomot $F=12$ și rezistența de intrare $R_{int}=5$ kΩ ?

Soluție. Tensiunea de zgomot la intrarea amplificatorului de măsură este :

$$U_{zint}=\sqrt{4kR_{int}T\,(f_2-f_1)},$$

în care $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ J/K reprezintă constanta lui Boltzmann, iar

$$T=273+\tau=273+20=293\ \text{K}$$

este temperatura absolută. Prin înlocuire se obține

$$U_{zint}=\sqrt{4\cdot1{,}38\cdot10^{-23}\cdot5\cdot10^{3}\cdot293\cdot(70-20)}=6{,}359\cdot10^{-8}\ \text{V}.$$

Tensiunea de zgomot la ieşirea amplificatorului de măsură este :

$$U_{zieş}=A\sqrt{F}\,U_{zint}=10\,000\cdot\sqrt{12}\cdot 6{,}359\cdot 10^{-8}=2{,}203\cdot 10^{-3}\ \text{V}=2{,}203\ \text{mV}.$$

Cunoaşterea acestei tensiuni de zgomot la ieşirea amplificatorului de măsură permite aprecierea pragului de sensibilitate al indicatorului de nul.

Problema 2.6.2. Un amplificator de măsură invertor fără reacţie are factorul de amplificare $A=-800$ şi rezistenţa de intrare $R_{int}=50$ kΩ. Prin intermediul unui divizor de tensiune alcătuit din rezistoarele cu rezistenţele $R_1=90$ kΩ şi $R_2=10$ kΩ s-a realizat o reacţie negativă de tensiune (fig. 2.6.1).

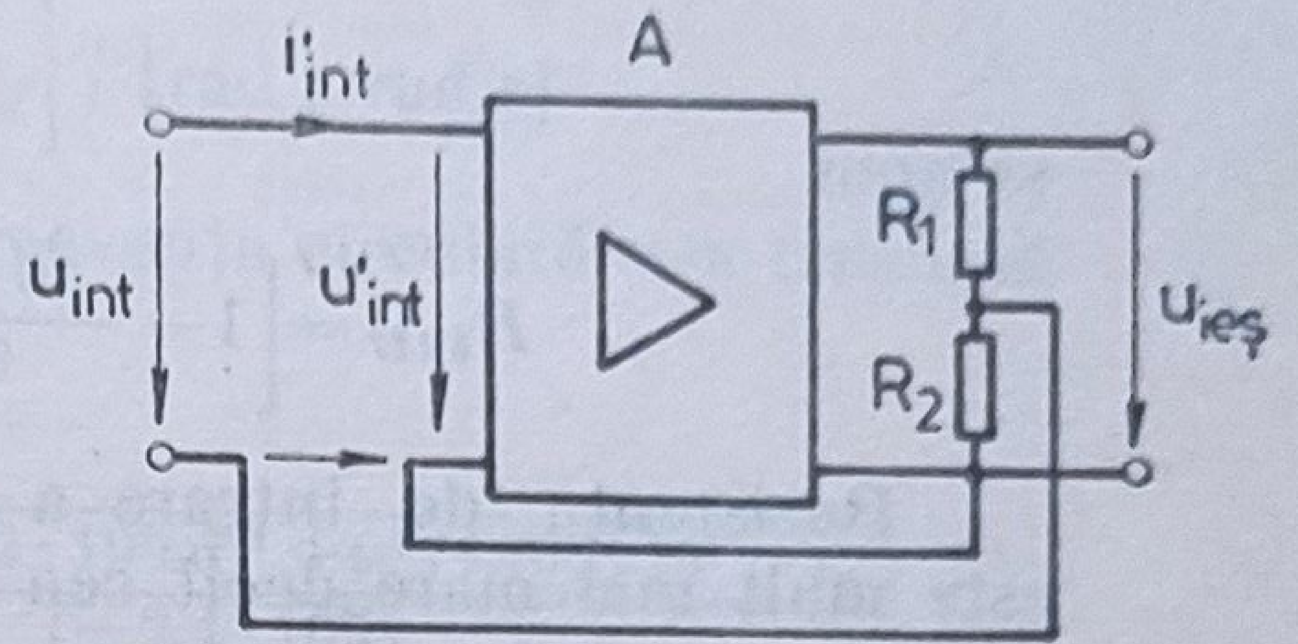


Fig. 2.6.1.

1. Să se stabilească factorul de amplificare A_r al amplificatorului de măsură cu reacţie negativă.

2. Să se determine rezistenţa de intrare R_{intr} a amplificatorului de măsură cu reacţie negativă.

Soluţie. 1. Din fig. 2.6.1. rezultă :

$$A_r=\frac{u_{ieş}}{u_{int}}=\frac{u_{ieş}}{u'_{int}-\dfrac{R_2 u_{ieş}}{R_1+R_2}}=\frac{u_{ieş}}{\dfrac{u_{ieş}}{A}-\dfrac{R_2 u_{ieş}}{R_1+R_2}}=\frac{1}{\dfrac{1}{A}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2}}\approx-\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)$$

şi apoi

$$A_r=\frac{1}{\dfrac{1}{(-800)}-\dfrac{10}{90+10}}=-9{,}9\approx-\left(1+\frac{90}{10}\right)=-10.$$

Dacă factorul de amplificare A al amplificatorului de măsură fără reacţie este suficient de mare în valoare absolută, atunci el influenţează foarte puţin factorul de amplificare A_r al amplificatorului de măsură cu reacţie negativă. Prin urmare factorul de amplificare A_r al amplificatorului de măsură cu reacţie negativă depinde doar de raportul rezistenţelor R_1 şi R_2.

Eroarea relativă procentuală, care apare la neglijarea influenţei factorului de amplificare A, se obţine din :

$$E_r=100\,\frac{-\left(1+\dfrac{R_1}{R_2}\right)-\dfrac{1}{\dfrac{1}{A}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2}}}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{A}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2}}}=-\frac{100}{A}\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right).$$

Această eroare este invers proporţională cu factorul de amplificare A al amplificatorului de măsură fără reacţie şi cu factorul de reacţie $R_2/(R_1+R_2)$. După înlocuire se ajunge la

$$E_r=-\frac{100}{(-800)}\left(1+\frac{90}{10}\right)=1{,}25\%.$$

2. Din fig. 2.6.1. rezultă:

$$R_{intr}=\frac{u_{int}}{i_{int}}=\frac{u'_{int}-\frac{R_2 u_{ieş}}{R_1+R_2}}{i_{int}}=\frac{u'_{nt}-\frac{R_2 A u'_{int}}{R_1+R_2}}{i_{int}}=R_{int}-\frac{R_2 A}{R_1+R_2}R_{int}=$$

$$=\left(1-\frac{R_2 A}{R_1+R_2}\right)R_{int}$$

şi apoi

$$R_{intr}=\left[1-\frac{10\cdot(-800)}{90+10}\right]\cdot 50=4\,050\ \text{k}\Omega=4{,}05\ \text{M}\Omega.$$

Rezistenţa de intrare a amplificatorului de măsură cu reacţie negativă este mult mai mare decît cea a amplificatorului fără reacţie. Din acest motiv amplificatorul de măsură cu reacţie negativă se utilizează în construcţia voltmetrelor la care se cere o rezistenţă interioară foarte mare (de ex. voltmetre numerice).

Problema 2.6.3. Tensiunea de ieşire $u_{ieş}$ a unui amplificator de măsură invertor fără reacţie depinde de tensiunea sa de intrare u'_{int} conform relaţiei:

$$\frac{d^3u_{ieş}}{dt^3}+6{,}82\cdot 10^7\frac{d^2u_{ieş}}{dt^2}+4{,}936\cdot 10^{14}\frac{du_{ieş}}{dt}+9{,}6\cdot 10^{19}u_{ieş}=2{,}4\cdot 10^{24}u'_{int},$$

[V, s; V].

Realizînd o reacţie negativă de tensiune printr-un divizor de tensiune format din rezistoarele cu rezistenţele R_1 şi R_2, s-a obţinut amplificatorul de măsură cu schema din fig. 2.6.1.

1. Să se stabilească dependenţa factorului de amplificare A al amplificatorului de măsură fără reacţie faţă de frecvenţa circulară ω a tensiunii sale de intrare u'_{int}.

2. Să se determine dependenţa defazajului φ introdus de amplificatorul de măsură fără reacţie faţă de frecvenţa circulară ω.

3. Să se determine eroarea relativă procentuală E_r, care apare la neglijarea influenţei factorului de amplificare A şi dependenţa ei faţă de frecvenţa circulară ω la factorul de amplificare A_r al amplificatorului de măsură cu reacţie.

4. Să se cerceteze stabilitatea amplificatorului de măsură fără reacţie negativă şi cea a amplificatorului de măsură cu reacţie negativă.

Soluţie. 1, 2. Introducînd mărimile complexe:

$$\underline{U}_{ieş}=U_{ieş}\exp[j(\omega t+\varphi)]$$

şi

$$\underline{U}'_{int}=U'_{int}\exp(j\omega t),$$

se obţine factorul de amplificare complex

$$\underline{A}=\frac{\underline{U}_{ieş}}{\underline{U}'_{int}}=-\frac{2{,}4\cdot 10^{24}}{9{,}6\cdot 10^{-19}-6{,}82\cdot 10^7\omega^2+j\omega(4{,}936\cdot 10^{14}-\omega^2)}.$$

Rezultă dependența factorului de amplificare

$$A(\omega)=-\frac{2{,}4\cdot 10^{24}}{\sqrt{(9{,}6\cdot 10^{19}-6{,}82\cdot 10^{7}\omega^{2})^{2}+\omega^{2}(4{,}936\cdot 10^{14}-\omega^{2})^{2}}},\ [-\ ;\ \mathrm{rad/s}]$$

și a defazajului

$$\varphi(\omega)=-\mathrm{arctg}\left[\frac{\omega(4{,}936\cdot 10^{14}-\omega^{2})}{9{,}6\cdot 10^{19}-6{,}82\cdot 10^{7}\omega^{2}}\right],\ [\mathrm{rad}\ ;\ \mathrm{rad/s}]$$

amplificatorului de măsură fără reacție față de frecvența circulară ω a tensiunii sale de intrare u'_{int}.

3. Pe baza soluției problemei 2.6.2. rezultă :

$$E_r(\omega)=-\frac{100}{A(\omega)}\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)=-\frac{\sqrt{(9{,}6\cdot 10^{19}-6{,}82\cdot 10^{7}\omega^{2})^{2}+\omega^{2}(4{,}936\cdot 10^{14}-\omega^{2})}}{(-2{,}4\cdot 10^{22})}\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right),\ [\%\ ;\ \mathrm{rad/s}].$$

Dependența erorii relative procentuale față de frecvența circulară ω la diferite valori ale factorului de reacție $R_2/(R_1+R_2)$ s-a reprezentat grafic la scară logaritmică în fig. 2.6.2. Se constată că eroarea crește pe măsură ce frecvența circulară ω crește și factorul de reacție $R_2/(R_1+R_2)$ scade.

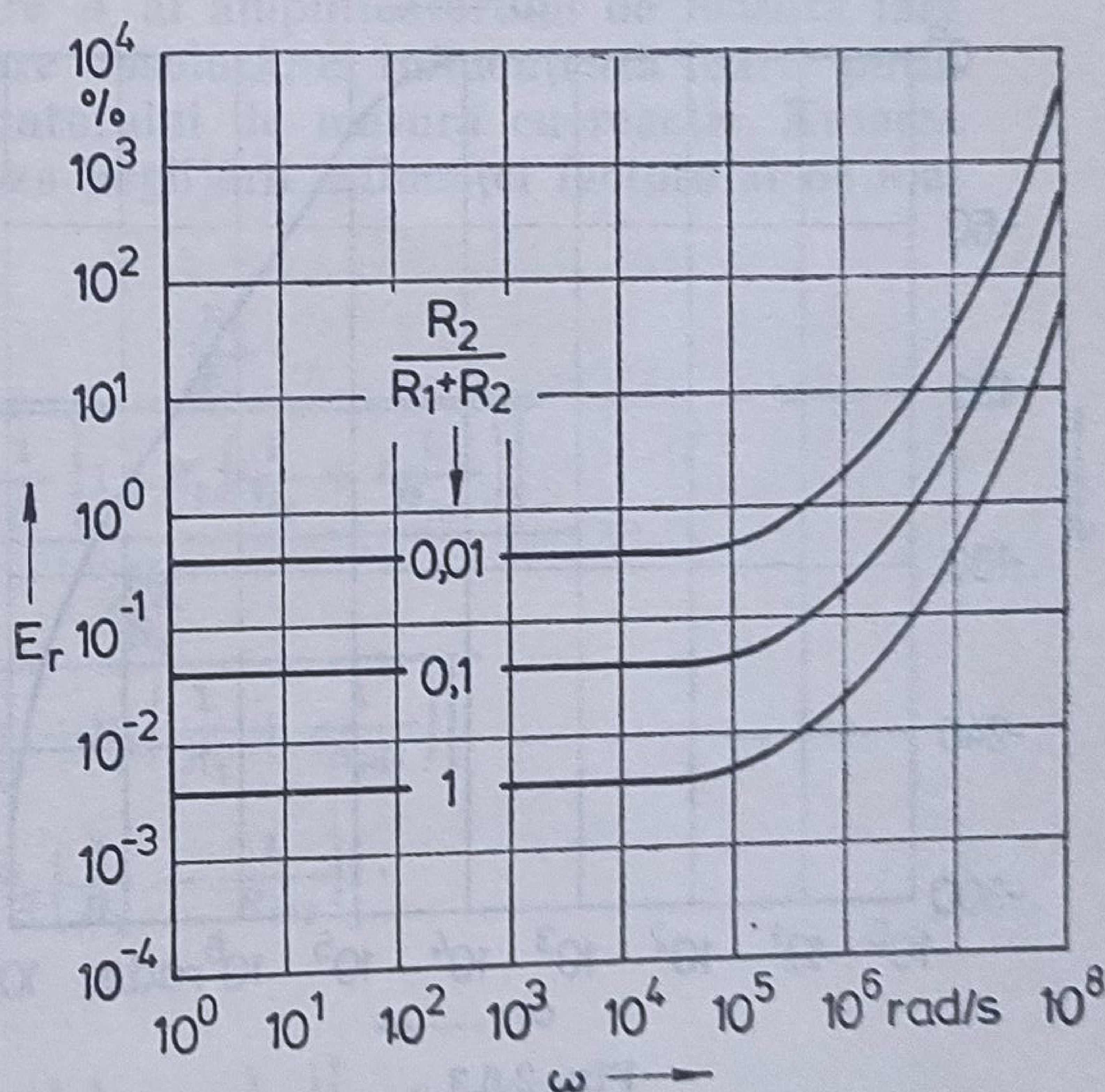


Fig. 2.6.2.

4. Aplicînd criteriul Routh-Hurwitz amplificatorului de măsură fără reacție, se constată că $6{,}82\cdot 10^7>0$ $4{,}936\cdot 10^{14}>0$ și $6{,}82\cdot 10^7\cdot 4{,}936\cdot 10^{14}-9{,}6\cdot 10^{19}>0$; prin urmare acesta este stabil.

În cazul amplificatorului de măsură cu reacție negativă criteriul Routh-Hurwitz arată că acesta este stabil dacă $6{,}82\cdot 10^7>0$ $4{,}936\cdot 10^{14}>0$ și

$$6{,}82\cdot 10^{7}\cdot 4{,}936\cdot 10^{14}-9{,}6\cdot 10^{19}-\frac{2{,}4\cdot 10^{24}\cdot R_2}{R_1+R_2}>0,$$

ceea ce are loc pentru factorul de reacție

$$\frac{R_2}{R_1+R_2}<0{,}014.$$

Aceeași concluzie referitoare la stabilitatea amplificatorului de măsură cu reacție negativă rezultă și din diagramele Bode reprezentate grafic la scară logaritmică în fig. 2.6.3. În aceste diagrame se observă că la valori ale factorului de reacție $R_2/(R_1+R_2)<0{,}014$, defazajul introdus la amplificarea uni-

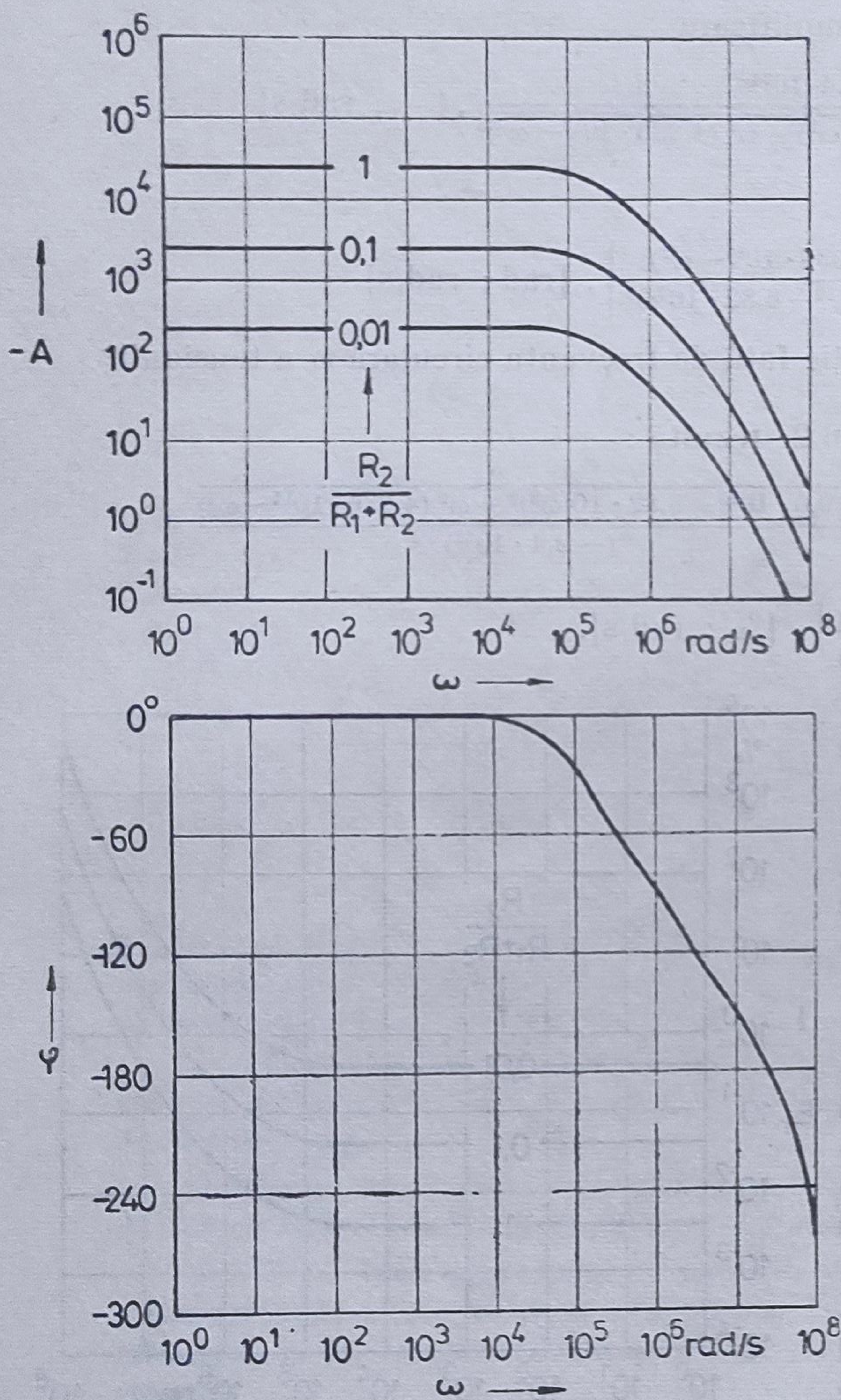


Fig. 2.6.3.

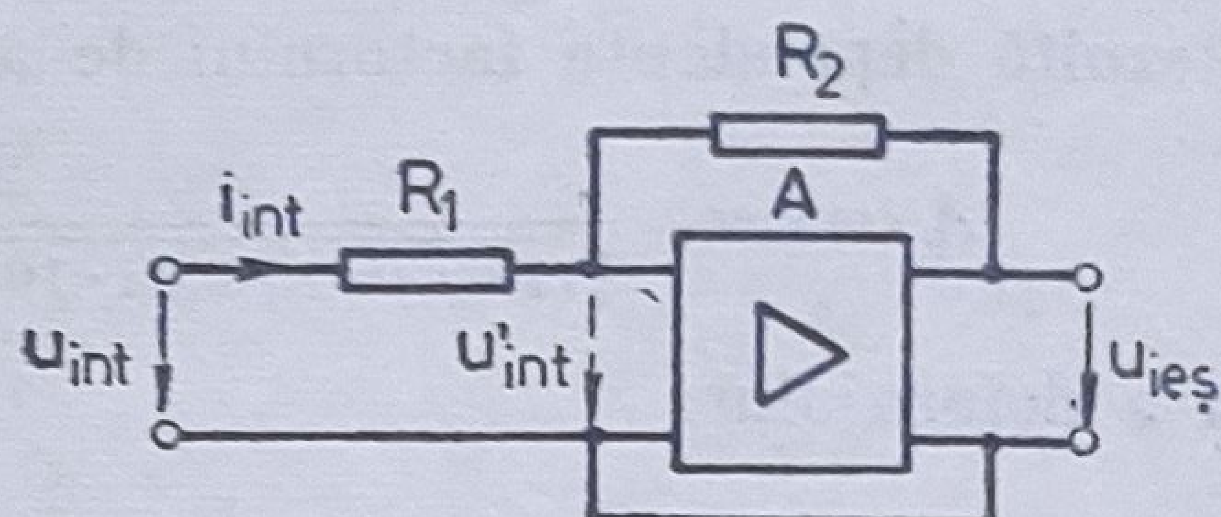


Fig. 2.6.4.

tară în buclă deschisă nu depășește $-\pi$ rad.

Comparînd însușirile referitoare la eroarea relativă procentuală E_r (fig. 2.6.2) cu cele referitoare la stabilitate (fig. 2.6.3) se constată că ele sînt contradictorii : creșterea factorului de reacție $R_2/(R_1+R_2)$ conduce la creșterea preciziei de măsurare, dar și la instabilitate, deci între aceste două cerințe trebuie căutat întotdeauna un compromis rezonabil.

Problema 2.6.4. Un amplificator de măsură invertor fără reacție are factorul de amplificare $A=-15\,000$ și rezistența de intrare $R_{int}=500$ kΩ. Prin intermediul unor rezistoare cu rezistențele $R_1=25$ kΩ și $R_2=50$ kΩ s-a realizat o reacție negativă de curent (fig. 2.6.4).

1. Să se stabilească factorul de amplificare A_r al amplificatorului de măsură cu reacție negativă.

2. Să se determine eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,\lim A_r}$ corespunzătoare factorului de amplificare A_r, știind că se neglijează influența factorului de amplificare A al amplificatorului de măsură fără reacție, iar rezistențele R_1 și R_2 se cunosc cu eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,\lim R}=\pm0{,}5\%$.

3. Să se determine rezistența de intrare R_{intr} a amplificatorului de măsură cu reacție.

Soluție. 1. Conform teoremelor lui Kirchhoff rezultă :

$$\frac{u_{int}-u'_{int}}{R_1}+\frac{u_{ieș}-u'_{int}}{R_2}=\frac{u'_{int}}{R_{int}}.$$

În continuare, ţinînd seama de factorul de amplificare A al amplificatorului de măsură fără reacţie, se obţine:

$$\frac{u_{int}}{R_1}+\frac{u_{ieş}}{R_2}=\frac{u_{ieş}}{A}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_{int}}\right)$$

şi apoi

$$A_r=\frac{u_{ieş}}{u_{int}}=-\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1-\frac{1}{A}\left[1+R_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_{int}}\right)\right]}\approx-\frac{R_2}{R_1},$$

astfel încît

$$A_r=-\frac{\frac{50}{20}}{1-\frac{1}{(-15\,000)}\left[1+50\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{500}\right)\right]}=-1{,}9983\approx-2.$$

2. Deoarece factorul de amplificare A al amplificatorului de măsură fără reacţie este suficient de mare în valoare absolută, el influenţează foarte puţin factorul de amplificare A_r al amplificatorului de măsură cu reacţie. Eroarea relativă procentuală, ce apare din cauza neglijării influenţei factorului de amplificare A se determină din:

$$E_{rA}=100\frac{-\frac{R_2}{R_1}+\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1-\frac{1}{A}\left[1+R_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_{int}}\right)\right]}}{-\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1-\frac{1}{A}\left[1+R_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_{int}}\right)\right]}}=$$

$$=-\frac{100}{A}\left[1+R_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_{int}}\right)\right].$$

După înlocuire se ajunge la:

$$E_{rA}=-\frac{100}{(-15\,000)}\left[1+50\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{500}\right)\right]=0{,}0207\%.$$

Ţinînd seama de relaţia (1.7), eroarea relativă procentuală limită corespunzătoare factorului de amplificare A_r al amplificatorului de măsură cu reacţie este:

$$E_{r\lim Ar}=E_{rA}+2E_{r\lim R}=0.0207+2\cdot(\pm0{,}5)=0{,}0207\pm1,$$

sau

$$0{,}9793\%\leqslant E_{r\lim Ar}\leqslant1{,}0207\%.$$

3. Conform teoremelor lui Kirchhoff rezultă:

$$i_{int}=\frac{u_{int}-u'_{int}}{R_1}.$$

Dar:

$$u'_{int} = \frac{u_{ieş}}{A} = \frac{A_r u_{int}}{A},$$

astfel încît

$$R_{intr} = \frac{u_{int}}{i_{int}} = R_1 + \frac{R_2 R_{int}}{R_2 + R_{int}\,(1-A)}.$$

După înlocuire se obține:

$$R_{intr} = 25 + \frac{50\,500}{50+500\,[1-(-15\,000)]} = 25{,}0033\ \mathrm{k\Omega}.$$

Problema 2.6.5. Printr-un rezistor cu rezistența $R=100\ \mathrm{k\Omega}$ și un condensator cu capacitatea $C=0{,}5\ \mu F$ s-a realizat reacția negativă de curent a unui amplificator de măsură invertor, care are fără reacție, factorul de amplificare foarte mare în valoare absolută ($A=-\infty$).

1. Știind că curentul de intrare i'_{int} este neglijabil, să se determine relația dintre tensiunea de intrare u_{int} și cea de ieșire $u_{ieş}$ a amplificatorului de măsură cu reacție.

2. Care este influența unui curent de intrare i'_{int} constant în funcție de timp asupra amplificatorului de măsură cu reacție?

Soluție. Deoarece curentul de intrare i'_{int} este neglijabil, conform teoremelor lui Kirchhoff rezultă:

$$i_R + i_C = 0$$

sau

$$\frac{u_{int} - u'_{int}}{R} + C\frac{\mathrm{d}\,(u_{ieş} - u'_{int})}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Dar

$$u'_{int} = \frac{u_{ieş}}{A},$$

astfel încît

$$-CR\frac{\mathrm{d}u_{ieş}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{A}\left(CR\frac{\mathrm{d}u_{ieş}}{\mathrm{d}t} + u_{ieş}\right) = u_{int}.$$

Factorul de amplificare A al amplificatorului de măsură fără reacție fiind foarte mare în valoare absolută ($A=-\infty$), se obține:

$$-CR\frac{\mathrm{d}u_{ieş}}{\mathrm{d}t} = u_{int}$$

sau

$$u_{ieş} = -\frac{1}{CR}\int u_{int}\,\mathrm{d}t + u_0 = -\frac{1}{0{,}5\cdot 10^{-6}\cdot 100\cdot 10^3}\int u_{int}\,\mathrm{d}t + u_0 = -20\int u_{int}\,\mathrm{d}t + u_0,$$

unde u_0 este o tensiune constantă. Prin urmare amplificatorul de măsură cu reacție negativă din fig. 2.6.5 este un amplificator de măsură integrator.

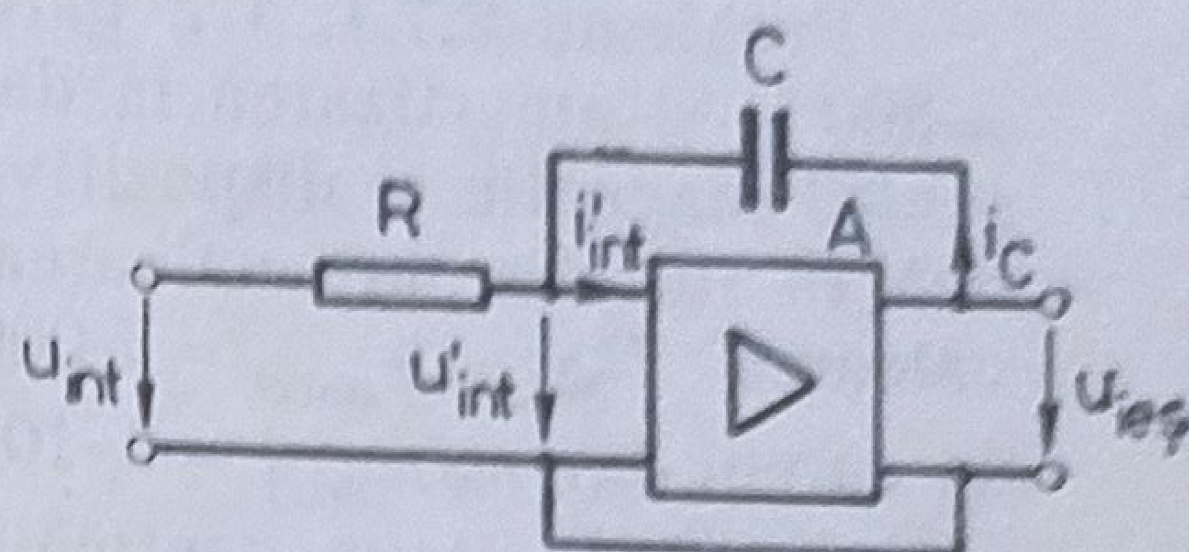


Fig. 2.6.5.

2. Dacă curentul de intrare i'_{nt} este constant în funcție de timp, atunci :

$$i_R + i_C = i'_{nt}$$

și

$$\frac{u_{int} - u'_{int}}{R} + C\frac{d(u_{ieș} - u'_{int})}{dt} = i'_{int}.$$

Ținînd seama de factorul de amplificare A al amplificatorului de măsură fără reacție, rezultă

$$u_{ieș} = -\frac{1}{CR}\int u_{int}dt + R\int i'_{int}dt + u_0 =$$

$$= -\frac{1}{0,5\cdot 10^{-6}\cdot 100\cdot 10^3}\int u_{int}dt + 100\cdot 10^3\int i'_{int}dt + u_0 =$$

$$= -20\int u_{int}dt + 10^5\int i'_{int}dt + u_0.$$

Sub acțiunea curentului de intrare i'_{int} constant în funcție de timp tensiunea de ieșire $u_{ieș}$ crește neîntrerupt, depășind chiar valoarea sa maximă admisibilă. Admițînd de pildă că $u_{int}=0$, $u_0=0$ și $i'_{int}=1\ \mu A$, tensiunea de ieșire atinge valoarea $u_{ieș}=10$ V în intervalul de timp $t=100$ s. Întrucît amplificatoarele de măsură prezintă curent de intrare i'_{int} constant în funcție de timp (curent de offset), se recomandă contracararea acțiunii acestuia.

2.7. GALVANOMETRE BALISTICE ȘI CONTOARE DE SARCINĂ ELECTRICĂ

Galvanometrele balistice sînt aparate de măsură magnetoelectrice cu sensibilitate deosebit de mare și avînd echipaje mobile cu inerție mare. Ele se utilizează la măsurarea sarcinii electrice corespunzătoare impulsurilor de curent electric de scurtă durată. Pentru protejarea sau micșorarea sensibilității galvanometrelor balistice se utilizează șunturi multiple obișnuite sau speciale. Galvanometrele balistice nu au clasă de precizie, ca urmare constantele și sensibilitățile lor se cunosc cu aproximație. La nevoie aceste constante și sensibilități se determină mai precis, erorile lor de determinare depinzînd de erorile aferente mijloacelor de măsurare folosite.

Contoarele de sarcină electrică sînt aparate de măsură integratoare destinate măsurării sarcinii electrice corespunzătoare curentului electric continuu de durată relativ mare. Se disting contoare de sarcină electrică magnetoelectrice și contoare de sarcină electrică electrolitice. Lărgirea intervalului de măsurare al acestor contoare se face prin șunturi.

Problema 2.7.1. Un galvanometru balistic are rezistenţa interioară $R_g = 800\ \Omega$ şi amortizarea la deconectarea din circuitul exterior neglijabilă. Cînd şuntul magnetic al dispozitivului de măsură este deschis (deci inducţia magnetică în întrefier are valoarea maximă B_{max}) rezistenţa exterioară critică are valoarea $R_{ek(B=B_{max})} = 7\,000\ \Omega$, iar constanta balistică faţă de impulsul de curent $C_{Q(B=B_{max})} = 6 \cdot 10^{-9}$ Cm/mm. Prin închiderea completă a şuntului magnetic inducţia magnetică în întrefier atinge valoarea minimă $B_{min} = B_{max}/2$.

1. Să se reprezinte grafic variaţia rezistenţei exterioare critice R_{ek} în funcţie de valoarea relativă B/B_{max} $(B_{min} \leqslant B \leqslant B_{max})$ a inducţiei magnetice în întrefier.

2. Ştiind că rezistenţa exterioară galvanometrului balistic are valoarea $R_e = 7\,000\ \Omega$, iar inducţia magnetică B în întrefier se modifică între limitele B_{min} şi B_{max}, să se reprezinte grafic dependenţa constantei balistice faţă de impulsul de curent C_Q în funcţie de gradul de amortizare β. Să se gradeze curba obţinută în valori ale raportului B/B_{max}.

Soluţie.1. Reprezentarea grafică din fig. 2.7.1 s-a obţinut pe baza relaţiei :

$$R_{ek} = \frac{B^2}{B^2_{max}}\,[R_g + R_{ek(B=B_{max})}] - R_g.$$

2. Funcţionarea la amortizare critică a galvanometrului balistic are loc pentru $B = B_{max}$ şi $R_e = R_{ek(B=B_{max})} = 7\,000\ \Omega$. În această situaţie constanta balistică faţă de impulsul de curent este :

$$C_{Q(B=B_{max})} = \frac{K}{B_{max}} - e,$$

unde K este o mărime constantă ce depinde de galvanometru. La alte valori ale inducţiei magnetice B în întrefier, dar aceeaşi valoare $R_e = 7\,000\ \Omega$ a rezistenţei exterioare galvanometrului balistic, gradul de amortizare este :

$$\beta = \left(\frac{B}{B_{max}}\right)^2,$$

iar constanta balistică faţă de impulsul de curent

$$C_Q = \frac{K}{B}\exp\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\ \arccos\beta\right).$$

Rezultă :

$$C_Q = \frac{C_{Q(B=B_{max})}}{\sqrt{\beta}}\exp\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\ \arccos\beta - 1\right).$$

Această dependenţă s-a redat grafic în fig. 2.7.2. Se constată că pentru rezistenţa exterioară galvanometrului balistic $R_e = 7\,000\ \Omega$, constanta balistică faţă de impulsul de curent este minimă pentru gradul de amortizare $\beta = 0{,}55$.

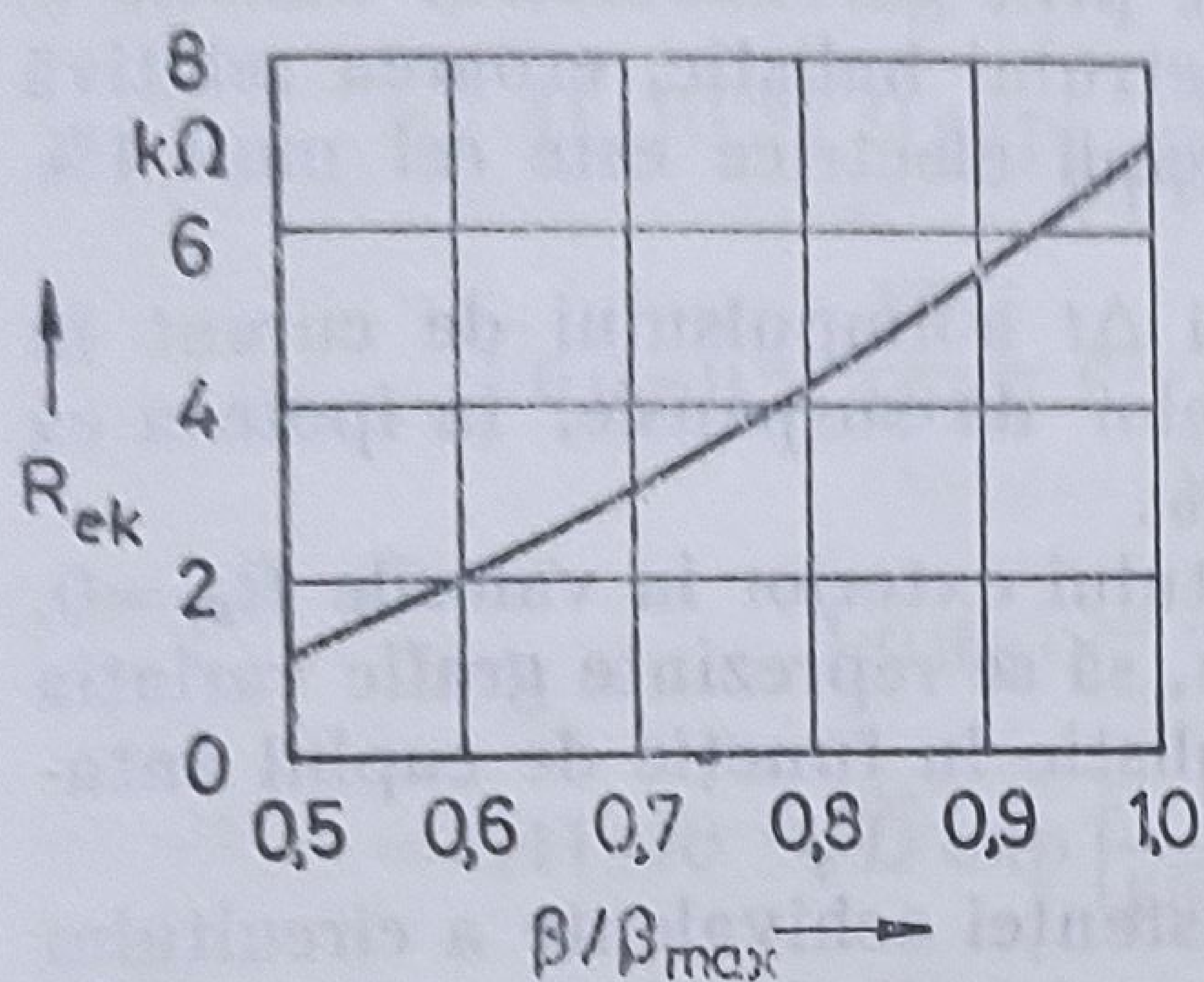


Fig. 2.7.1.

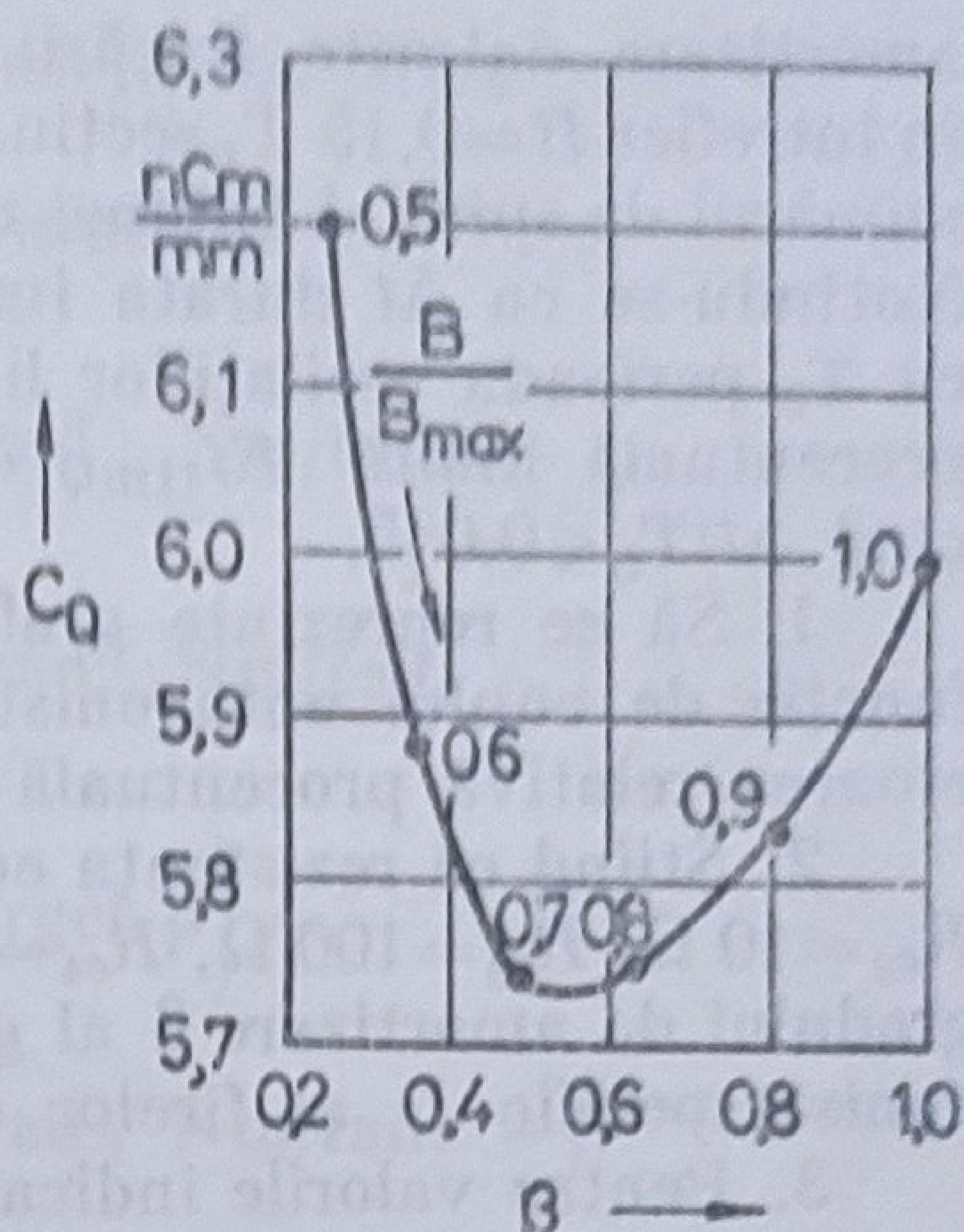


Fig. 2.7.2.

Problema 2.7.2. Dispozitivul de măsură al unui galvanometru balistic este caracterizat prin inducția magnetică în întrefier $B=0{,}2$ T, momentul de inerție al echipajului mobil față de axa de rotație $J=1{,}35\cdot10^{-7}$ kgm², secțiunea medie a ferestrei bobinei mobile $S=1{,}1\cdot10^{-3}$ m², numărul de spire al bobinei mobile $N=100$ spire, rezistența interioară $R_g=300\ \Omega$ și amortizarea datorită frecării cu aerul neglijabilă.

1. Să se determine cuplul antagonist specific D al firului de suspensie pentru ca galvanometrul să aibă constanta de curent $C_I=2{,}5\cdot10^{-10}$ Am/mm.

2. Să se afle perioada T_0 a oscilațiilor libere și rezistența exterioară critică R_{ek} a galvanometrului.

3. Să se determine constanta balistică față de impulsul de curent C_Q a galvanometrului neamortizat și a galvanometrului amortizat critic.

Soluție. 1. Întrucît $C_I=2{,}5\cdot10^{-7}$ A/rad, rezultă:

$$D=2BSN\,C_I=2\cdot0{,}2\cdot1{,}1\cdot10^{-3}\cdot100\cdot2{,}5\cdot10^{-7}=1{,}1\cdot10^{-8}\ \text{Nm/rad}.$$

2. $$T_0=2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}=2\cdot3{,}14\sqrt{\frac{1{,}35\cdot10^{-7}}{1{,}1\cdot10^{-8}}}=22\ \text{s},$$

$$R_{ek}=\frac{(BSN)^2}{2\sqrt{JD}}-R_g=\frac{(0{,}2\cdot1{,}1\cdot10^{-3}\cdot100)^2}{2\sqrt{1{,}35\cdot10^{-7}\cdot1{,}1\cdot10^{-8}}}-300=5\,980\ \Omega.$$

3. Cînd gradul de amortizare $\beta=0$,

$$C_{Q(\beta=0)}=\frac{C_I T_0}{2\pi}=\frac{2{,}5\cdot10^{-10}\cdot22}{2\cdot3{,}14}=8{,}76\cdot10^{-10}\ \text{Cm/mm},$$

iar cînd $\beta=1$,

$$C_{Q(\beta=1)}=e\cdot C_{Q(\beta=0)}=2{,}718\cdot8{,}76\cdot10^{-10}=2{,}38\cdot10^{-9}\ \text{Cm/mm}.$$

Problema 2.7.3. Un galvanometru balistic are momentul de inerție al echipajului mobil față de axa de rotație $J=4\cdot10^{-10}$ kgm², coeficientul de

amortizare datorită frecării cu aerul $A_1=10^{-10}$ Nms/rad, inducția magnetică în întrefier $B=0,15$ T, secțiunea medie a ferestrei bobinei mobile $S=4,5\cdot10^{-4}$ m², numărul de spire al bobinei mobile $N=20$ spire, rezistența interioară $R_g=5\ \Omega$. Notîndu-se cu Δt durata impulsului de curent prin galvanometrul balistic și cu T_0 perioada oscilațiilor libere ale galvanometrului balistic, eroarea relativă procentuală limită $E_{r1\lim Q}$ de măsurare a sarcinii electrice este cel mult 1% cînd $\Delta t/T_0\leqslant 0,045$.

1. Să se reprezinte grafic variația duratei Δt a impulsului de curent în funcție de cuplul antagonist specific D al firelor de suspensie, în ipoteza că eroarea relativă procentuală limită $E_{r1\lim Q}=1\%$.

2. Știind că rezistența echivalentă a circuitului exterior ia valorile $R_{e1}=0$, $R_{e2}=10\ \Omega$, $R_{e3}=100\ \Omega$, $R_{e4}=1\,000\ \Omega$ și $R_{e5}=\infty$, să se reprezinte grafic variația gradului de amortizare β al galvanometrului balistic în funcție de cuplul antagonist specific D al firelor de suspensie.

3. Pentru valorile indicate mai sus ale rezistenței echivalente a circuitului exterior, să se reprezinte grafic variația constantei balistice față de impulsul de curent C_Q în funcție de cuplul antagonist specific D al firelor de suspensie.

Soluție.

1. $$\Delta t=0,045\ T_0=0,045\cdot2\cdot\pi\sqrt{\frac{J}{D}}=0,45\cdot2\cdot3,14\sqrt{\frac{4\cdot10^{-10}}{D}}=\frac{5,65\cdot10^{-6}}{\sqrt{D}},$$

[s ; Nm/rad].

Reprezentarea grafică s-a redat la scară logaritmică în fig. 2.7.3.

2. $$\beta=\frac{1}{2\sqrt{DJ}}\left(A_1+\frac{B^2S^2N^2}{R_g+R_e}\right)=\frac{1}{2\sqrt{D\cdot4\cdot10^{-10}}}\left[10^{-10}+\frac{(0,15\cdot4,5\cdot10^{-4}\cdot20)^2}{5+R_e}\right]=$$

$$=\frac{2,5\cdot10^4}{\sqrt{D}}\left(10^{-10}+\frac{1,82\cdot10^{-6}}{5+R_e}\right),\ [-\ ;\ \text{Nm/rad},\ \Omega].$$

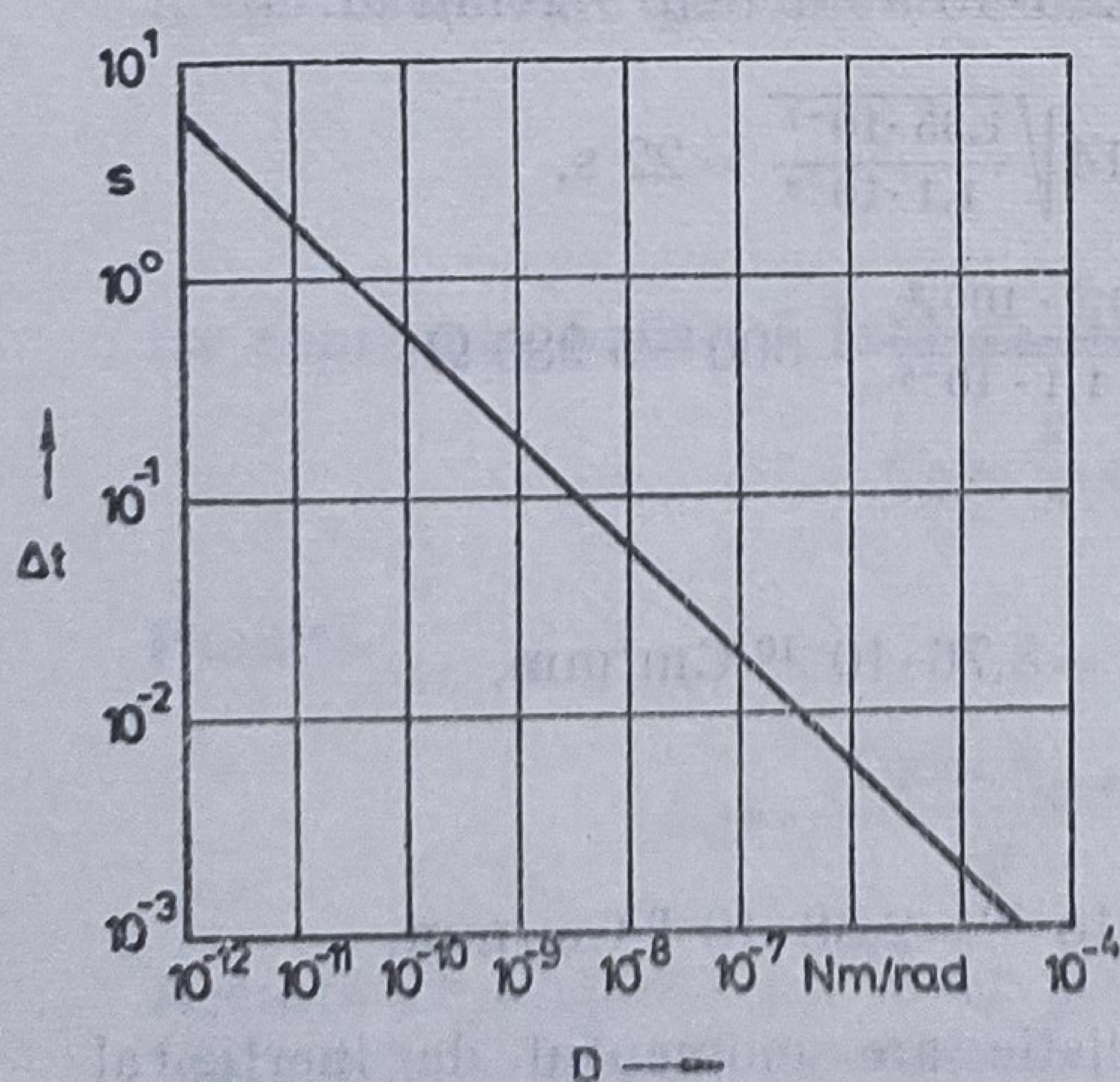


Fig. 2.7.3.

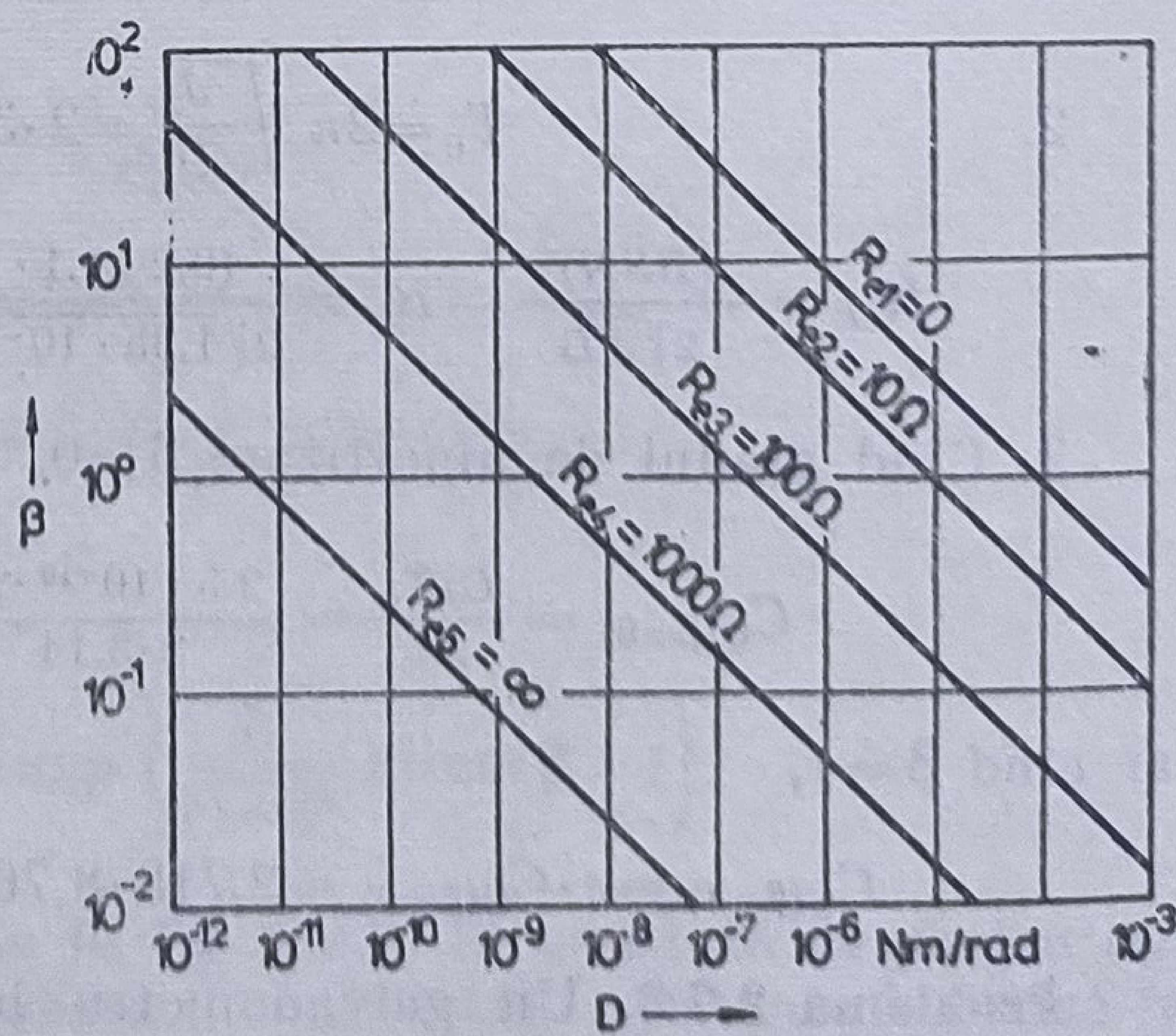


Fig. 2.7.4.

Reprezentarea grafică s-a redat la scară logaritmică în fig. 2.7.4.

3. $$C_{Q\,(\beta<1)}=\frac{\sqrt{DJ}}{2BSN}\exp\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\arccos\beta\right)=$$

$$=7{,}41\cdot10^{-3}\sqrt{D}\exp\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\arccos\beta\right),\ [\text{C/rad};\ \text{Nm/rad},\ -],$$

$$C_{Q\,(\beta=1)}=\frac{\sqrt{DJ}}{2BSN}\,e=7{,}41\cdot10^{-3}\sqrt{D}e,\ [\text{C/rad};\ \text{Nm/rad},\ -],$$

$$C_{Q\,(\beta>1)}=\frac{\sqrt{DJ}}{2BSN}\exp\left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}\operatorname{argch}\beta\right)=$$

$$=7{,}41\cdot10^{-3}\sqrt{D}\exp\left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}\operatorname{argch}\beta\right),\ [\text{C/rad};\ \text{Nm/rad},\ -].$$

La reprezentarea grafică redată la scară logaritmică în fig. 2.7.5 s-a ţinut seama de faptul că β depinde de D, conform relaţiei de la punctul 2.

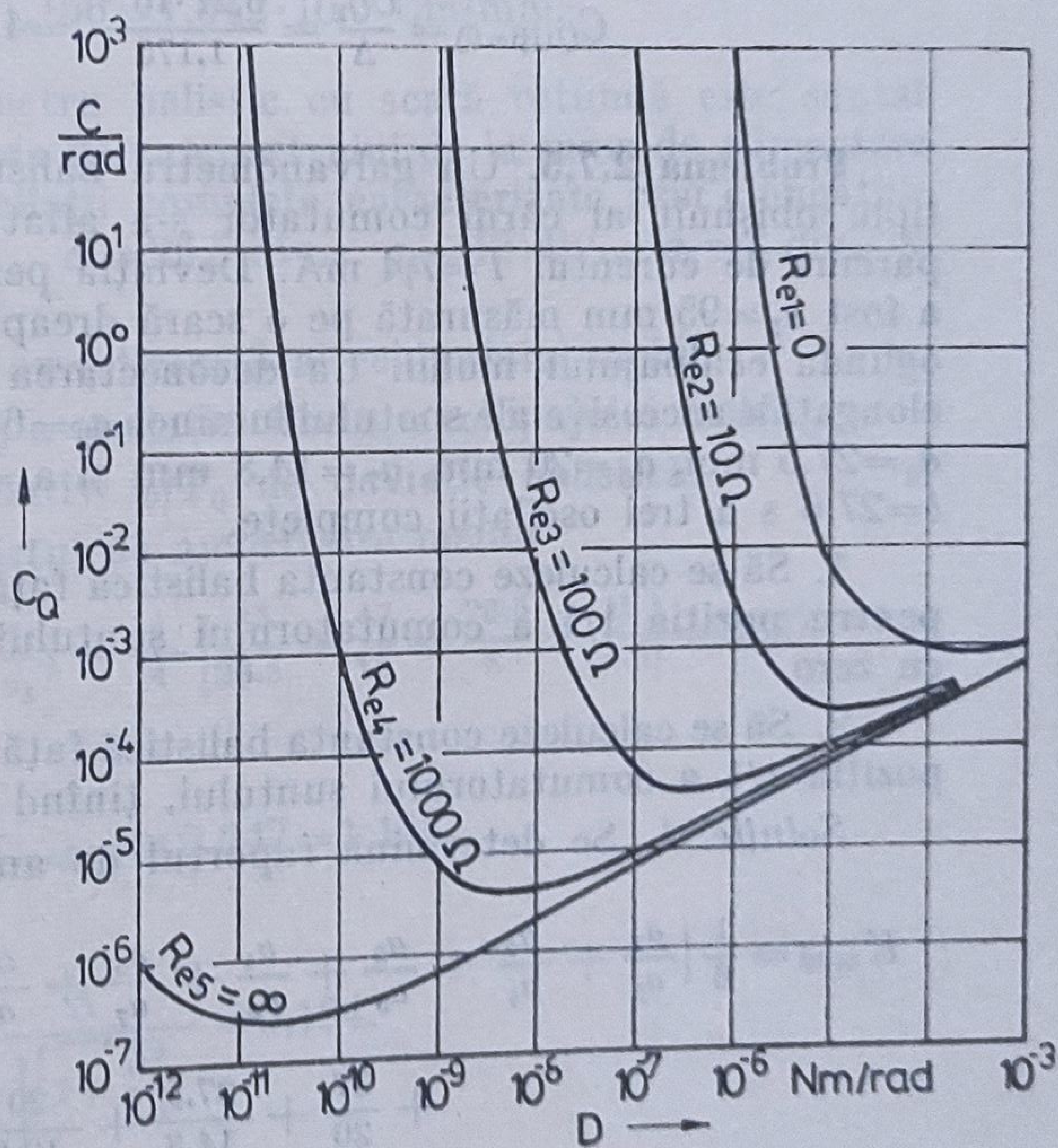


Fig. 2.7.5.

Problema 2.7.4. Tensiunea între armăturile unui condensator, avînd capacitatea $C=1\ \mu F$ este $U=20$ V. Acest condensator s-a descărcat peste un galvanometru balistic şuntat cu un şunt multiplu obişnuit al cărui comutator s-a aflat pe poziţia $1/n=1/5$. Elongaţiile succesive ale spotului luminos citite pe o scară dreaptă aflată la distanţa $l=1{,}1$ m de oglinda echipajului mobil au fost $a_1=84{,}5$ mm, $a_2=60{,}4$ mm, $a_3=42{,}2$ mm, $a_4=31$ mm, $a_5=21{,}4$ mm, $a_6=15{,}3$ mm, $a_7=10{,}4$ mm şi $a_8=7{,}5$ mm.

1. Să se calculeze constanta balistică faţă de impulsul de curent C_{Q1} a galvanometrului balistic şuntat pentru poziţia 1/1 a comutatorului şuntului.

2. Să se calculeze constanta balistică faţă de impulsul de curent $C_{Q1(\beta=0)}$ a galvanometrului balistic şuntat pentru poziţia 1/1 a comutatorului şuntului şi amortizarea egală cu zero.

Soluţie.

1. $$C_{Q1}=\frac{CUl}{a_{1n}}=\frac{1\cdot10^{-6}\cdot20\cdot1{,}1}{84{,}5\cdot5}=5{,}21\cdot10^{-8}\ \text{Cm/mm}.$$

2. Se calculează raportul de amortizare mediu :

$$K_{med}=\frac{1}{6}\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_2}{a_4}+\frac{a_3}{a_5}+\frac{a_4}{a_6}+\frac{a_5}{a_7}+\frac{a_6}{a_8}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{84,5}{42,2}+\frac{60,4}{31}+\right.$$

$$\left.+\frac{42,2}{21,4}+\frac{31}{15,3}+\frac{21,4}{10,4}+\frac{15,3}{7,6}\right)=2,003$$

şi decrementul logaritmic

$$\Lambda=\ln K_{med}=\ln 2,003=0,695.$$

Apoi se determină :

$$\Delta=K_{med}^{\frac{1}{2\pi}\ \mathrm{arctg}\frac{2\pi}{\Lambda}}=2,003^{\frac{1}{2\cdot 3,14}\ \mathrm{arctg}\frac{2\cdot 3,14}{0,695}}=1,175.$$

Constanta balistică faţă de impulsul de curent pentru amortizare egală cu zero este :

$$C_{Q1(\beta=0)}=\frac{C_{Q1}}{\Delta}=\frac{5,21\cdot 10^{-8}}{1,175}=4,43\cdot 10^{-8}\ \mathrm{Cm/mm}.$$

Problema 2.7.5. Un galvanometru balistic împreună cu şuntul său multiplu obişnuit al cărui comutator s-a aflat pe poziţia $1/n=1/10\,000$ a fost parcurs de curentul $I=7,4$ mA. Deviaţia permanentă a acestui galvanometru a fost $a_1=95$ mm măsurată pe o scară dreaptă aflată la distanţa $l=1,25$ m de oglinda echipajului mobil. La deconectarea sursei de alimentare s-au notat elongaţiile succesive ale spotului luminos $a_2=68,7$ mm, $a_3=51,3$ mm, $a_4=37$ mm, $a_5=27,5$ mm, $a_6=20$ mm, $a_7=14,8$ mm şi $a_8=10,8$ mm şi s-a măsurat durata $t=27,6$ s a trei oscilaţii complete.

1. Să se calculeze constanta balistică faţă de impulsul de curent $C_{Q1(\beta=0)}$ pentru poziţia 1/1 a comutatorului şuntului, presupunînd amortizarea egală cu zero.

2. Să se calculeze constanta balistică faţă de impulsul de curent C_{Q1} pentru poziţia 1/1 a comutatorului şuntului, ţinînd seama de amortizare.

Soluţie. 1. Se determină raportul de amortizare mediu :

$$K_{med}=\frac{1}{6}\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_2}{a_4}+\frac{a_3}{a_5}+\frac{a_4}{a_6}+\frac{a_5}{a_7}+\frac{a_6}{a_8}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{95}{51,3}+\frac{68,7}{37}+\frac{51,3}{27,5}+\right.$$

$$\left.+\frac{37}{20}+\frac{27,5}{14,8}+\frac{20}{10.8}\right)=1,856$$

şi decrementul logaritmic

$$\Lambda=\ln K_{med}=\ln 1,856=0,618.$$

Perioada oscilaţiilor amortizate este :

$$T=\frac{t}{3}=\frac{27.6}{23}=9,2\ \mathrm{s},$$

iar perioada oscilațiilor libere

$$T_0 = \frac{T}{\sqrt{1+\frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}} = \frac{9,2}{\sqrt{1+\frac{0,618^2}{4\cdot 3,14^2}}} = 9,156 \text{ s.}$$

La amortizare egală cu zero constanta balistică față de impulsul de curent este :

$$C_{Q(\beta=0)} = \frac{I}{n}\frac{l}{a}\cdot\frac{T_0}{2\pi} = \frac{7,4\cdot 10^{-3}}{10\,000}\,\frac{1,25}{95}\cdot\frac{9,156}{2\cdot 3,14} = 1,42\cdot 10^{-8} \text{ Cm/mm.}$$

2. Dacă se ține seama de amortizare, atunci :

$$C_{Q1} = C_{Q1(\beta=0)}\cdot\Delta,$$

în care

$$\Delta = K_{med}^{\frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\pi}{\Lambda}} = 1,856^{\frac{1}{2\cdot 3,14}\operatorname{arctg}\frac{2\cdot 3,14}{0,618}} = 1,156.$$

Rezultă :

$$C_{Q1} = 1,42\cdot 10^{-8}\cdot 1,156 = 1,642\cdot 10^{-8} \text{ Cm/mm.}$$

Problema 2.7.6. Un galvanometru balistic cu scară rotundă este șuntat cu un șunt multiplu. La deconectarea galvanometrului de la sursa de alimentare au avut loc în $t=29,7$ s trei oscilații complete caracterizate prin elongațiile succesive $a_1=85$ div., $a_2=47$ div., $a_3=26,5$ div., $a_4=15$ div., $a_5=8$ div. și $a_6=4,5$ div.

1. Să se determine gradul de amortizare β al echipajului mobil.
2. Să se calculeze perioada T_0 a oscilației libere a echipajului mobil.
3. Să se calculeze timpul relativ t_b/T_0 de deviație balistică.

Soluție. 1. Se determină raportul de amortizare mediu

$$K_{med} = \frac{1}{4}\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_2}{a_4}+\frac{a_3}{a_5}+\frac{a_4}{a_6}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{85}{26,5}+\frac{47}{15}+\frac{26,5}{8}+\frac{15}{4,5}\right) = 3,247$$

și decrementul logaritmic

$$\Lambda = \ln K_{med} = \ln 3,247 = 1,178.$$

Gradul de amortizare este :

$$\beta = \frac{\Lambda}{2\pi\sqrt{1+\frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}} = 0,184.$$

2. Perioada oscilației amortizate este :

$$T = \frac{t}{3} = \frac{29,7}{3} = 9,9 \text{ s,}$$

iar perioada oscilației libere

$$T_0 = T\sqrt{1-\beta^2} = 9,9\cdot\sqrt{1-0,184^2} = 9,73 \text{ s.}$$

3. Pentru $\beta<1$ timpul relativ de deviație balistică este:

$$\frac{t_b}{T_0}=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\beta^2}}\arccos\beta=\frac{1}{2\cdot 3{,}14\sqrt{1-0{,}184^2}}\arccos 0{,}184=0{,}224.$$

Problema 2.7.7. Pentru un galvanometru balistic, avînd rezistența interioară $R_g=500\ \Omega$, se realizează un șunt conform fig. 2.7.6. Se impune ca:

1. Raportul de șuntare să aibă valorile $n=1$, 10, 100, 1 000, 10 000;
2. Rezistența echivalentă exterioară galvanometrului balistic să fie $R_1=3\,000\ \Omega$;
3. Rezistența echivalentă a galvanometrului balistic șuntat să fie $R_2=1\,000\ \Omega$.

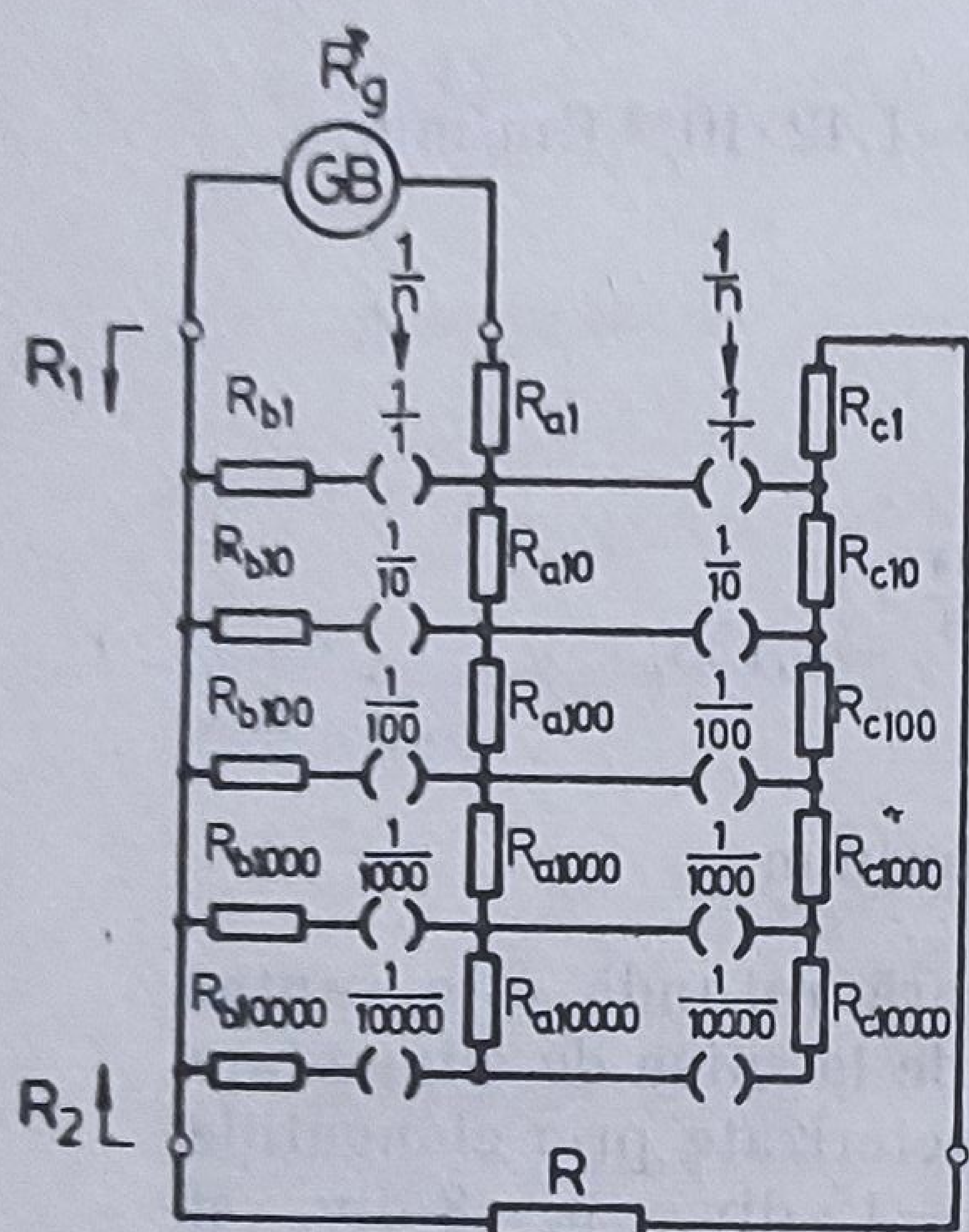


Fig. 2.7.6.

Să se determine rezistența R a circuitului exterior și rezistențele R_{an}, R_{bn} și R_{cn} corespunzătoare tuturor rapoartelor de șuntare n, care să satisfacă cele trei condiții impuse.

Soluție. Din condițiile impuse rezultă:

$$\frac{R_{a1}+\ldots+R_{an}+R_{bn}+R_g}{R_{bn}}=n$$

$$R_{a1}+\ldots+R_{an}+\frac{R_{bn}(R_{c1}+\ldots+R_{cn}+R)}{R_{bn}+R_{c1}+\ldots+R_{cn}+R}=R_1$$

$$R_{c1}+\ldots+R_{cn}+$$
$$+\frac{R_{bn}(R_{a1}+\ldots+R_{an}+R_g)}{R_{bn}+R_{a1}+\ldots+R_{an}+R_g}=R_2.$$

În cazul $n=1$ se obține

$$\frac{R_{a1}+R_{b1}+500}{R_{b1}}=1,$$

$$R_{a1}+\frac{R_{b1}(R_{c1}+R)}{R_{b1}+R_{c1}+R}=3\,000,$$

$$R_{c1}+\frac{R_{b1}(R_{a1}+500)}{R_{b1}+R_{a1}+500}=1\,000.$$

Prima din aceste ecuații are sens dacă $R_{b1}=\infty$. Următoarele ecuații devin în acest caz:

$$R_{a1}+R_{c1}+R=3\,000,$$

$$R_{c1}+R_{a1}+500=1\,000.$$

De aici rezultă $R=2\,500\ \Omega$ și $R_{a1}+R_{c1}=500\ \Omega$. Se stabilesc arbitrar $R_{a1}=R_{c1}=250\ \Omega$.

Pentru $n=10$, 100, 1 000, 10 000 se rezolvă sistemele de ecuații în care s-a înlocuit $R=2\,500\ \Omega$. Valorile rezistențelor șuntului s-au trecut în tabelul 2.7.1.

Tabelul 2.7.1

n	R_{an} [Ω]	R_{bn} [Ω]	R_{cn} [Ω]
1	250	∞	250
10	2431,86	353,54	431,81
100	283,14	35,00	283,54
1 000	31,50	3,50	31,15
10 000	3,15	0,35	3,15

Problema 2.7.8. La șuntarea unui galvanometru balistic, avînd rezistența exterioară critică R_{ek}, trebuie satisfăcute următoarele condiții :

1. Curentul care trece prin șunt și galvanometru să fie de n ori mai mare decît curentul prin galvanometru.

2. Galvanometrul să fie amortizat critic.

3. Rezistența echivalentă a galvanometrului șuntat să fie egală cu rezistența interioară R_g a galvanometrului nešuntat.

Pentru îndeplinirea acestor trei condiții, șuntul se realizează din trei rezistențe R_{an}, R_{bn} și R_{cn} variabile în funcție de n și legate conform fig. 2.7.7. Să se determine relațiile de calcul ale acestor rezistențe pentru următoarele valori ale rezistenței circuitului exterior :

1. $R=0$,

2. $R=R_{ek}$,

3. $R=\infty$.

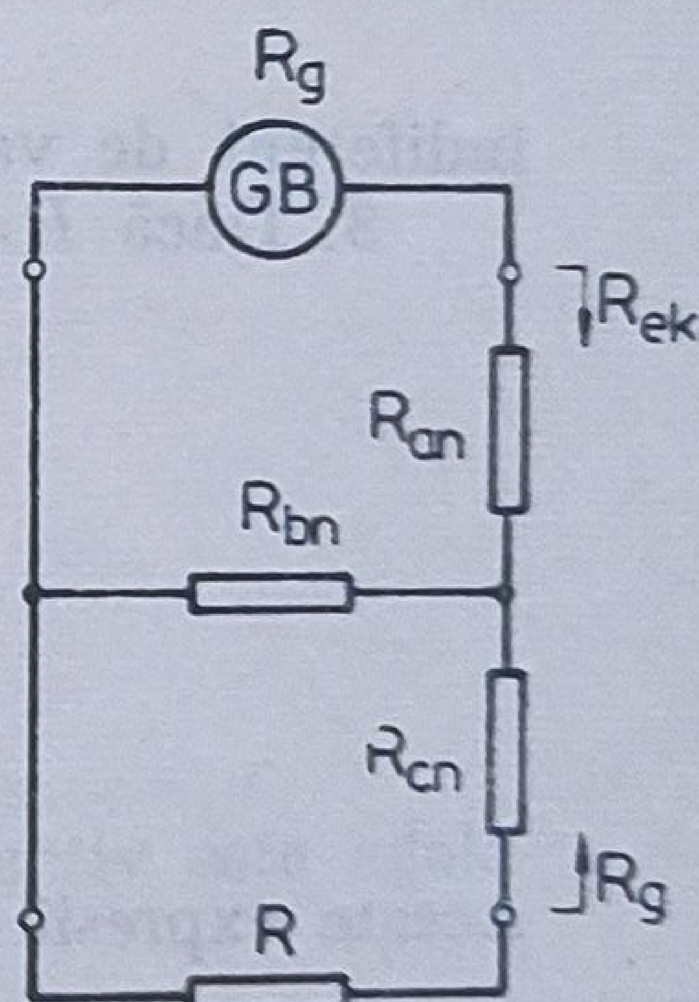


Fig. 2.7.7.

Soluție. Rezistențele R_{an}; R_{bn} și R_{cn} trebuie să satisfacă relațiile :

$$\frac{R_{an}+R_{bn}+R_g}{R_{bn}}=n,$$

$$R_{an}+\frac{R_{bn}(R_{cn}+R)}{R_{bn}+R_{cn}+R}=R_{ek}$$

și

$$R_{cn}+\frac{R_{bn}(R_{an}+R_g)}{R_{an}+R_{bn}+R_g}=R_g.$$

Din prima relație se obține :

$$R_{bn}=\frac{R_g+R_{an}}{n-1}$$

În cazul $n=1$ rezultă $R_{b1}=\infty$ şi atunci a doua şi a treia condiţie pot fi îndeplinite simultan numai dacă $R=R_{ek}$.

1. Cînd $R=0$, atunci :

$$R_{an}=\frac{R_g[(n^2-n+1)R_{ek}-(n-1)R_g]}{(n^2-1)R_g-R_{ek}},$$

$$R_{bn}=\frac{nR_g(R_g+R_{ek})}{(n^2-1)R_g-R_{ek}},$$

$$R_{cn}=\frac{nR_g[(n-1)R_g-R_{ek}]}{(n^2-1)R_g-R_{ek}}.$$

Aceste expresii sînt valabile pentru $n\neq1$.

2. La $R=R_{ek}$,

$$R_{an}=\frac{nR_{ek}-R_g}{n+1},$$

$$R_{bn}=\frac{n(R_g+R_{ek})}{n^2-1},$$

$$R_{cn}=\frac{nR_g-R_{ek}}{n+1},$$

indiferent de valoarea lui n.

3. Dacă $R=\infty$, atunci :

$$R_{an}=\frac{(n-1)R_{ek}-R_g}{n},$$

$$R_{bn}=\frac{R_{ek}+R_g}{n},$$

$$R_{cn}=\frac{(n^2-n+1)R_g-(n-1)R_{ek}}{n^2}.$$

Aceste expresii sînt valabile pentru $n\neq1$.

Problema 2.7.9. Cuplul activ M al unui contor magnetoelectric de sarcină electrică depinde de unghiul de rotaţie α al echipajului mobil conform diagramei din fig. 2.7.8, în care $M_{max}=1{,}85\cdot10^{-3}$ Nm şi $M_{min}=1{,}17\cdot10^{-3}$ Nm. Să se determine viteza unghiulară medie ω_{med} a echipajului mobil în regimul permanent de mişcare a echipajului mobil, ştiind că coeficientul de amortizare este $A=5{,}25\cdot10^{-4}$ Nm/rad, iar cuplul de frecare este compensat în întregime.

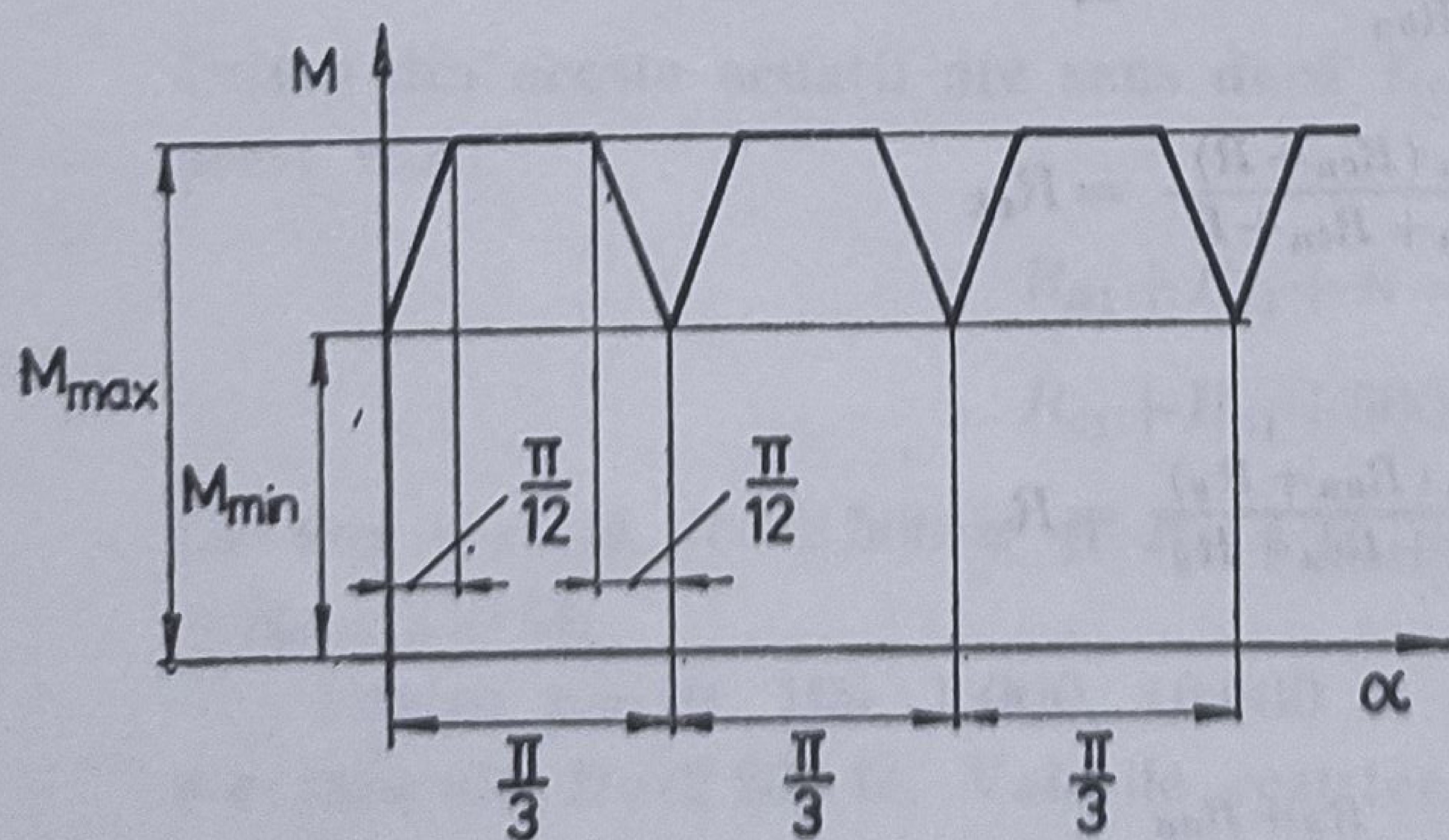


Fig. 2.7.8.

Soluţie. Ecuaţia de mişcare a echipajului mobil al contorului este :

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2}+A\frac{d\alpha}{dt}=M,$$

unde J este momentul de inerție al echipajului mobil față de axa de rotație. Deoarece :

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt},$$

ecuația de mișcare se scrie

$$J\frac{d\omega}{dt} + A\omega = M.$$

În regimul permanent viteza unghiulară ω este o funcție periodică de timp. Dacă în intervalul de timp $t_2 - t_1$ din regimul permanent echipajul mobil al contorului efectuează un număr întreg de rotații, atunci :

$$\frac{J}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\omega}{dt}\,dt + \frac{A}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\omega\,dt = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}M\,dt,$$

sau

$$A\,\omega_{med} = M_{med}$$

și

$$\omega_{med} = \frac{M_{med}}{A}.$$

Dar în aceste condiții valoarea medie temporară a cuplului activ este egală cu valoarea sa medie unghiulară, adică :

$$M_{med} = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3} M\,d\alpha = \frac{3M_{max}+M_{min}}{4} = \frac{3\cdot 1{,}85\cdot 10^{-3}+1{,}17\cdot 10^{-3}}{4} = 1{,}68\cdot 10^{-3}\ \text{Nm}.$$

Prin urmare :

$$\omega_{med} = \frac{1{,}68\cdot 10^{-3}}{5{,}25\cdot 10^{-4}} = 3{,}2\ \text{rad/s}.$$

Problema 2.7.10. Prin șuntare se lărgește de o sută de ori intervalul de măsurare al unui contor magnetoelectric de sarcină electrică, avînd raportul de transmisie $K = 2\,000$ rot/Ah și rezistența interioară $R_i = 16{,}7\ \Omega$.

1. Să se determine rezistența R_s a șuntului.

2. Să se calculeze constantele C_Q a contorului fără șunt și C_{Qs} a contorului cu șunt.

Soluție. 1. $$R_s = \frac{R_i}{100-1} = \frac{16,7}{99} = 0,1687\ \Omega.$$

2. $$C_Q = \frac{1}{K} = \frac{1}{2\,000} = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{Ah/rot},$$

$$C_{Qs} = 100\ C_Q = 100 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 0,05\ \text{Ah/rot}.$$

Problema 2.7.11. Contorul magnetoelectric de sarcină electrică legat în serie cu o baterie de acumulatoare are constanta $C_Q = 0,02$ Ah/rot. Bateria a fost încărcată la curentul constant $I = 11,5$ A timp de $t = 2$ h.

1. Să se determine sarcina electrică Q ce a trecut prin bateria de acumulatoare în procesul de încărcare.

2. Să se determine numărul de rotații n_r ale echipajului mobil al contorului în timpul încărcării bateriei.

3. Să se calculeze viteza unghiulară ω a echipajului mobil al contorului în timpul încărcării bateriei.

Soluție. 1. $Q = It = 11,5 \cdot 3 = 34,5$ Ah $= 124\,200$ C.

2. $$n_r = \frac{Q}{C_Q} = \frac{34,5}{0,02} = 1\,725\ \text{rot}.$$

3. $$\omega = \frac{2 \cdot \pi n_r}{t} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1\,725}{3 \cdot 3\,600} = 1,003\ \text{rad/s}.$$

Problema 2.7.12. Un contor electrolitic de sarcină electrică are anodul de mercur și catodul de cărbune, iar electrolitul o soluție de iodură de mercur HgJ_2.

1. Să se precizeze care element se degajă la anod și care la catod în procesul funcționării contorului.

2. Să se calculeze valoarea medie I_{med} a curentului care străbătînd contorul a depus în $t = 3$ h cantitatea $m_{Hg} = 0,258$ g mercur cu masa atomică $A_{Hg} = 200, 59$ g.

3. Să se determine cantitatea m_J de iod cu masa atomică $A_J = 126,90$ g degajată în condițiile arătate la punctul 2.

Soluție. 1. Prin disociere apar ioni pozitivi bivalenți de mercur Hg^{++} care se depun la catod și ioni negativi monovalenți de iod J^- care se depun la anod.

2. Notînd cu $F_0 = 96\,494$ C constanta lui Faraday și cu ν valența elementului disociat, rezultă conform legii electrolizei:

$$I_{med} = \frac{F_0 \nu_{Hg} m_{Hg}}{A_{Hg} t} = \frac{96\,494 \cdot 2 \cdot 0,258}{200,59 \cdot 3 \cdot 3\,600} = 0,023\ \text{A}.$$

3.

$$m_J = \frac{A_J I_{med}\, t}{F_0\, \nu_J} = \frac{126,90 \cdot 0,023 \cdot 3 \cdot 3\,600}{96\,494 \cdot 1} = 0,327 \text{ g}.$$

Problema 2.7.13. Prin șuntare se lărgește intervalul de măsurare al unui contor electrolitic de sarcină electrică. La temperatura $\tau = 20$ °C rezistența interioară a contorului este $R_c = 2,73\ \Omega$, iar coeficientul de variație a rezistivității cu temperatura $\beta_c = -2 \cdot 10^{-2}$ 1/ °C. Pentru a micșora variația raportului de șuntare cu temperatura, în serie cu contorul se leagă un rezistor din cupru avînd rezistența R și coeficientul de variație a rezistivității cu temperatura $\beta_{Cu} = 4,28 \cdot 10^{-3}$ 1/ °C (fig. 2.7.9). Știind că șuntul este din manganină să se calculeze rezistențele R_s și R în așa fel încît raportul de șuntare să aibă valoarea $n_s = 100$, independent de temperatura τ.

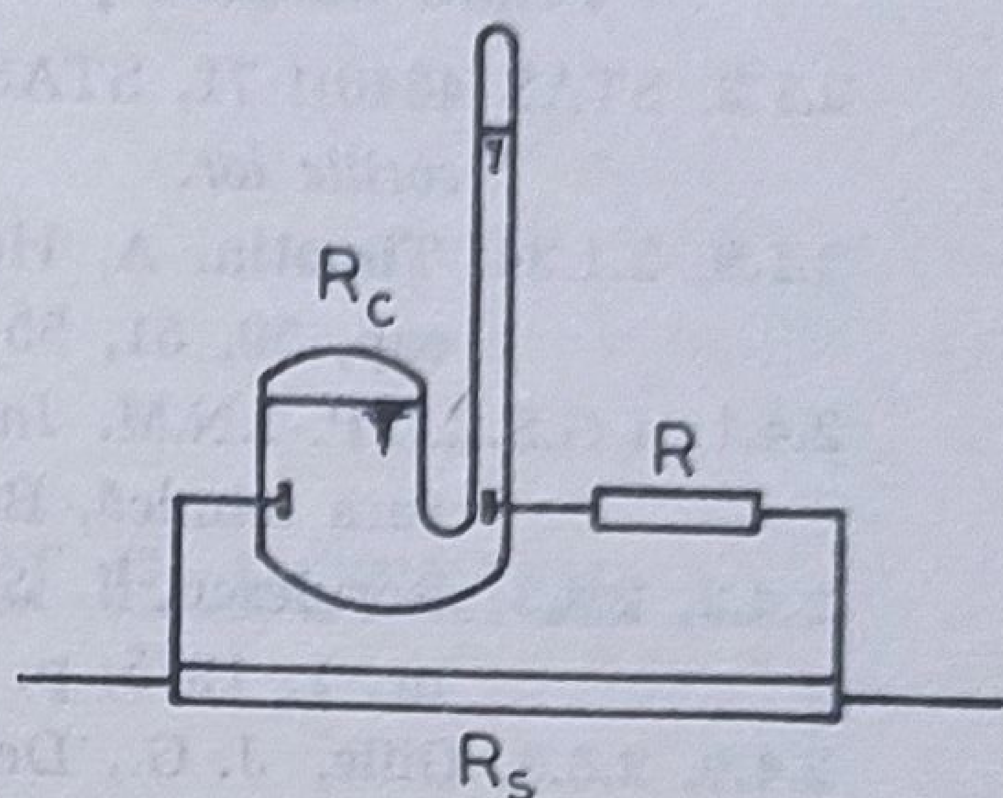


Fig. 2.7.9.

Soluție. Din relațiile :

$$n_s = \frac{R_c + R + R_s}{R_s}$$

și

$$\beta_c R_c (\tau - 20) + \beta_{Cu} R (\tau - 20) = 0$$

rezultă sistemul de ecuații

$$100 = \frac{2,73 + R + R_s}{R_s},$$

$$-2 \cdot 10^{-2} \cdot 2,73 + 4,28 \cdot 10^{-3} \cdot R = 0,$$

avînd soluțiile $R = 12,757\ \Omega$ (la $\tau = 20$ °C) și $R_s = 0,1564\ \Omega$.

2.8. BIBLIOGRAFIE PENTRU CAPITOLUL 2.

— Pentru paragrafele 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 și 2.7.

Manolescu, P. *Măsurări electrice industriale*, vol. I, cap. 2, 3 și 9. Editura tehnică, București, 1966.

Pop, E., Chivu, M. *Măsuri electrice și magnetice*, vol. I, cap. 5, 6, 8, 9, 10, 11 și 13 și vol. II, cap. 20. Institutul politehnic Timișoara, 1969.

— Pentru paragraful 2.5.

Kopeček, J., Dvořak, M. *Transformatoare de măsură*, cap. 3 și 12 Editura tehnică, București, 1970.

— **Pentru paragraful 2.6**

Barna, A. *Amplificatoare operaționale*. Editura tehnică, București, 1974.

Bulucea, C., Vais, M,. Profeta, H. *Circuite integrale liniare*. Editura tehnică, București, 1975.

— **Pentru anumite probleme**

2.1.2. STAS 4640/1-71, STAS 4640/2, 3, 4-74. *Aparate de măsură electrice indicatoare și accesoriile lor*.

2.1.9, 2.1.34. Timotin. A. Hortopan, V., Ifrim. A. Preda, M. *Lecții de bazele electrotehnicii*, cap, 50, 51, 55 și 56. Editura didactică și pedagogică, București, 1970.

2.4.1. I.G.S.C.C.P.-I.N.M. *Instrucțiuni pentru verificarea elementelor normale*. Nr. 4-03-74. Editura tehnică, București, 1974.

2.4.2, 2.4.3. Iscrulescu, I. *Surse de tensiune de referință cu diode Zener*. Metrologia aplicată, nr. 1, 1975, p. 11–14.

2.4.9, 2.6.3. Gille, J. G., Decaulne, P., Pelegrin, M. *Teoria și calculul sistemelor de reglare automată*, cap. 9. Editura tehnică, București, 1962.

2.4.10, 2.5.3. STAS 4324-70. *Transformatoare de curent*.

2.5.7, 2.5.8. STAS 4323-70. *Transformatoare de tensiune*.

CAPITOLUL 3

MĂSURAREA PUTERII ŞI ENERGIEI ELECTRICE

3.1. WATTMETRE

Wattmetrele sînt aparate de măsură cu citire directă destinate măsurării puterii electrice. Ele se compun din dispozitive de măsură multiplicatoare (electrodinamice, ferodinamice, Hall, termoelectrice), cărora li se ataşează — după caz — dispozitive sau aparate pentru lărgirea intervalului de măsurare (rezistoare adiţionale, transformatoare de măsură).

Din punctul de vedere al preciziei lor wattmetrele se caracterizează prin clasa de precizie. Acesteia îi corespunde în condiţii de referinţă stabilite prin specificaţii eroarea de bază, care este o eroare raportată procentuală limită. La modificarea oricărei mărimi de influenţă (de ex. a temperaturii mediului în care are loc măsurarea), apar erori suplimentare, ce se adaugă la eroarea de bază.

Problema 3.1.1. Un wattmetru are intervalul de măsurare $P_n=500$ W, tensiunea nominală $U_n=150$ V, curentul nominal $I_n=5$ A, scara $a_{max}=100$ diviziuni şi clasa de precizie 0,5.

1. Să se determine constanta C a wattmetrului.

2. Să se calculeze factorul de putere nominal $\cos\varphi_n$ al wattmetrului.

3. Ştiind că wattmetrul a indicat $a=87{,}3$ diviziuni, să se afle puterea P măsurată şi eroarea relativă procentuală limită E_{rlimP} de măsurare a ei.

Soluţie. 1. $$C=\frac{P_n}{a_{max}}=\frac{500}{100}=5 \text{ W/div.}$$

2. $$\cos\varphi_n=\frac{P_n}{U_nI_n}=\frac{500}{150\cdot 5}=0{,}667.$$

3. Puterea

$$P=Ca=5\cdot 87{,}3=436{,}5 \text{ W}$$

se măsoară cu eroarea relativă procentuală limită

$$E_{r\,lim\,P}=(\pm 0{,}5)\cdot\frac{a_{max}}{a}=(\pm 0{,}5)\frac{100}{87{,}3}=\pm 0{,}573\ \%$$

stabilită pe baza relației (1.5).

Problema 3.1.2. Cu un wattmetru avînd intervalul de măsurare $P_n=$ $=150$ W, tensiunea nominală $U_n=150$ V, curentul nominal $I_n=5$ A și consumul neglijabil, se măsoară puterea absorbită de un consumator funcționînd în c. a., la tensiunea nominală U_n și curentul nominal I_n ale wattmetrului.

1. Cît este factorul de putere nominal $\cos\varphi_n$ al wattmetrului ?

2. Ce valori poate lua factorul de putere $\cos\varphi$ al consumatorului fără ca intervalul de măsurare al wattmetrului să fie depășit ?

Soluție. 1.
$$\cos\varphi_n=\frac{P_n}{U_nI_n}=\frac{150}{150\cdot 5}=0{,}2.$$

2. Pentru a fi satisfăcută condiția :

$$U_nI_n\cos\varphi\leqslant U_nI_n\cos\varphi_n,$$

este necesar ca

$$\cos\varphi\leqslant\cos\varphi_n.$$

Problema 3.1.3. Dependența cuplului activ M al dispozitivului de măsură al unui wattmetru electrodinamic față de unghiul de deviație α dintre cele două bobine și produsul I_AI_B al curenților prin cele două bobine este redată în fig. 3.1.1. Bobina fixă are curentul nominal $I_{An}=5$ A, circuitul bobinei mobile are curentul nominal $I_{Bn}=10$ mA și tensiunea nominală $U_{Bn}=120$ V ; deviația corespunzătoare intervalului de măsurare $P_n=600$ W al wattmetrului este $\alpha_n=\pi/2$ rad. Să se determine poziția inițială α_0 a bobinei mobile, decalajul ε al acului indicator față de bobina mobilă (fig. 3.1.2) și cuplul antagonist specific D al resoartelor spirale astfel încît scara wattmetrului să fie liniară și axa de simetrie a scării să fie paralelă cu axa bobinelor fixe.

Soluție. În diagrama din fig. 3.1.1 cuplul antagonist se reprezintă prin dreapta :

$$M_D=D\,(\alpha-\alpha_0),$$

astfel aleasă încît ea să intersecteze curba $M\,(\alpha)$ corespunzătoare produsului $I_AI_B=I_{An}I_{Bn}$ la deviația $\alpha=\alpha_n+\alpha_0$.

Din fig. 3.1.2. rezultă din motive de simetrie

$$\alpha_0+\varepsilon+\frac{\alpha_n}{2}=\frac{\pi}{2}$$

și

$$\varepsilon=\frac{\pi-\alpha_n}{2}-\alpha_0\,.$$

La $\alpha_0=0{,}61$ rad, $\varepsilon=0{,}175$ rad și $D=7{,}64\cdot 10^{-7}$ Nm/rad se obține scara liniară din fig. 3.1.1.

Problema 3.1.4. Un wattmetru electrodinamic cu scara gradată pentru consumatori de c. c. are tensiunea nominală $U_n = 30$ V, curentul nominal $I_n = 5$ A, intervalul de măsurare $P_n = 150$ W, scara $a_{max} = 150$ diviziuni, rezistența și inductivitatea bobinei mobile $R_B = 1\,000\ \Omega$ și $L_B = 7$ mH. Acestui wattmetru i s-a aplicat tensiunea alternativă $U = U_n$ și curentul alternativ $I = I_n$, ambele avînd frecvența f și defazate între ele cu unghiul φ.

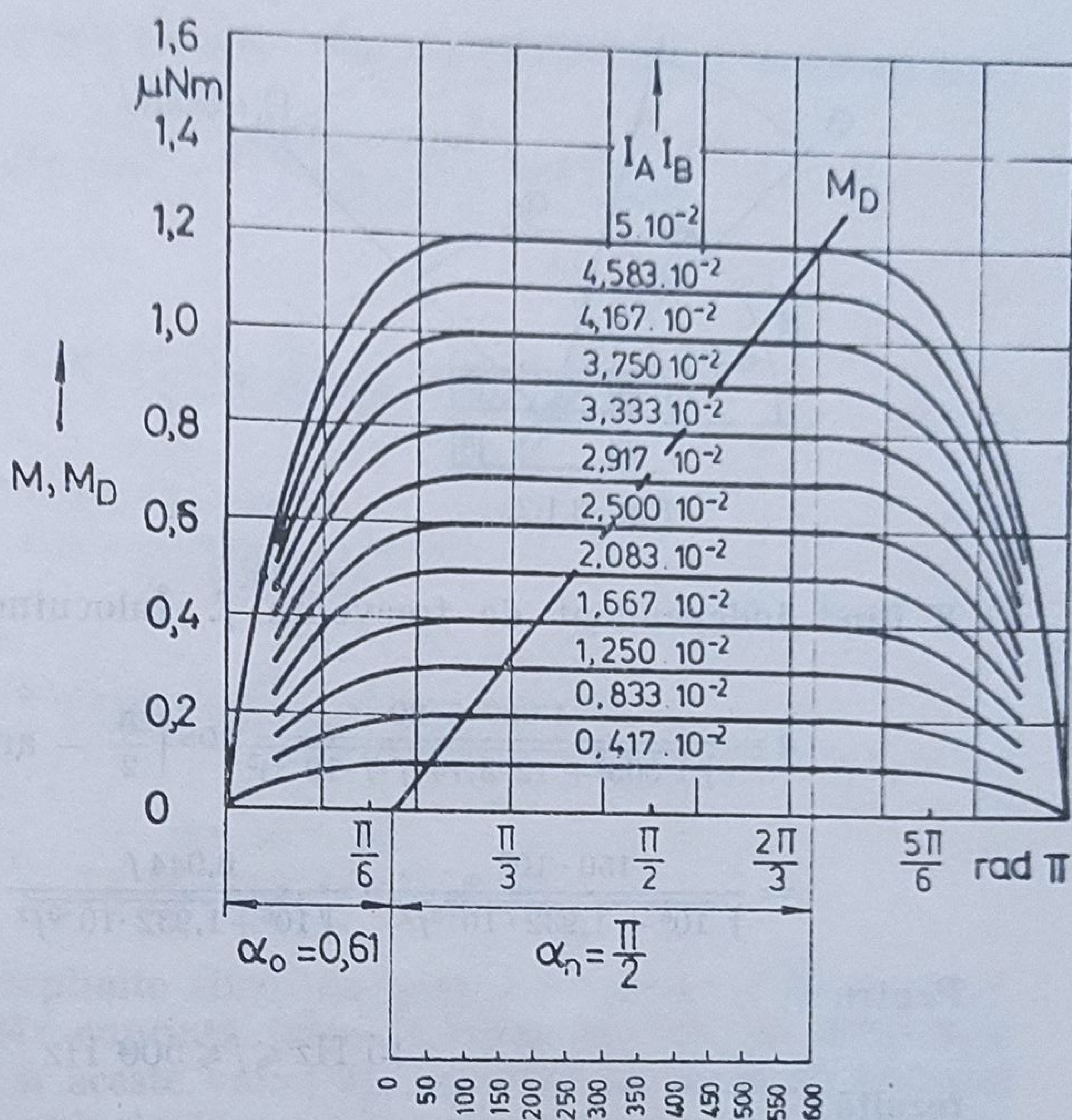


Fig. 3.1.1.

1. Să se determine dependența indicației a a wattmetrului față de frecvența f, cînd aceasta variază între 15 Hz și 500 Hz, defazajul φ dintre tensiunea U și curentul I fiind de $\pi/2$ rad.

2. Care este eroarea relativă procentuală sistematică E_{rs50} a indicației wattmetrului la frecvența de 50 Hz?

Soluție. 1. Fie I_A curentul prin bobina fixă a dispozitivului de măsură al wattmetrului, I_B curentul prin bobina lui mobilă și U_B tensiunea aplicată bobinei mobile. În curent continuu indicația permanentă a wattmetrului electrodinamic este:

$$a = KI_AI_B = \frac{K' I_A U_B}{R_B}.$$

De aici

$$K = \frac{a_{max} R_B}{I_n U_n} = \frac{150 \cdot 1\,000}{5 \cdot 30} = 1\,000 \text{ div/A}^2.$$

Ținînd seama de diagrama valorilor efective din fig. 3.1.3, indicația permanentă a aceluiași wattmetru electrodinamic funcționînd în curent alternativ este:

$$a = KI_AI_B \cos(\widehat{I_A, I_B}) =$$

$$= \frac{K I_A I_B}{\sqrt{R_B^2 + (2\pi f L_B)^2}} \cos\left(\varphi - \operatorname{arctg}\frac{2\pi f L_B}{R_B}\right),$$

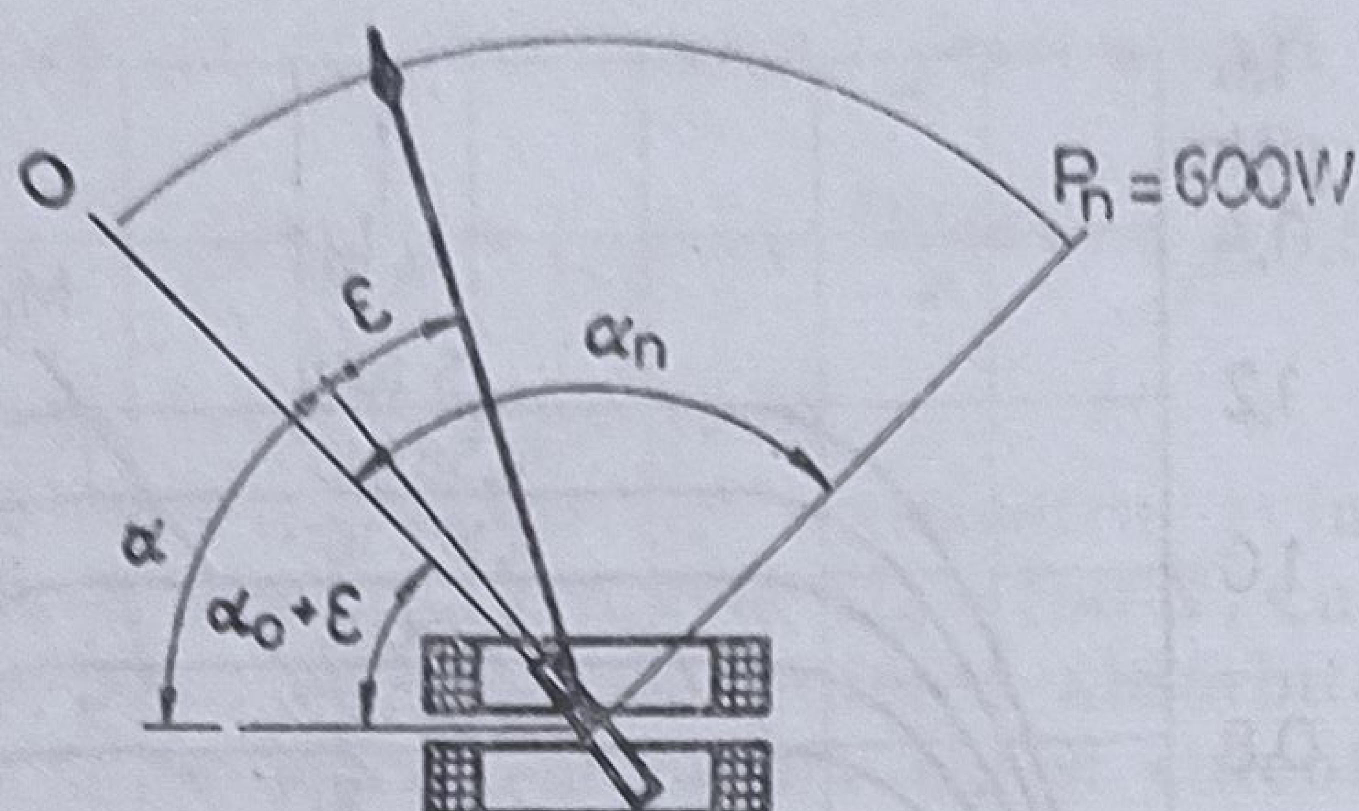


Fig. 3.1.2.

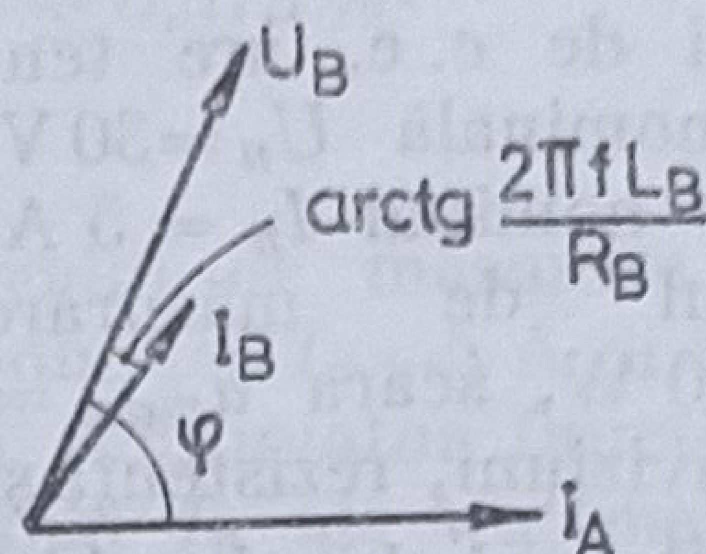


Fig. 3.1.3.

K fiind independent de frecvenţa f. Înlocuind valorile cunoscute rezultă:

$$a=\frac{1\,000\cdot 5\cdot 30}{\sqrt{1\,000^2+(2\cdot 3{,}14\cdot f\cdot 7\cdot 10^{-3})^2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\text{arctg}\,\frac{2\cdot 3{,}14\cdot f\cdot 7\cdot 10^{-3}}{1\,000}\right)=$$

$$=\frac{150\cdot 10^3}{\sqrt{10^6+1{,}932\cdot 10^{-3}f^2}}\cdot\frac{0{,}044\,f}{\sqrt{10^6+1{,}932\cdot 10^{-3}f^2}}=\frac{6{,}6\cdot 10^3 f}{\sqrt{10^6+1{,}932\cdot 10^{-3}f^2}}.$$

Pentru

$$15\text{ Hz}\leqslant f\leqslant 500\text{ Hz}$$

rezultă:

$$0{,}099\text{ div}\leqslant a\leqslant 3{,}3\text{ div}.$$

2. Eroarea relativă procentuală sistematică la frecvenţa de 50 Hz este:

$$E_{rs50}=100\,\text{arctg}\,\frac{2\pi f L_B}{R_B}\cdot\text{tg}\,\varphi=100\,\text{arctg}\,\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 7\cdot 10^{-3}}{1\,000}\,\text{tg}\,\varphi=$$

$$=100\cdot 2{,}2\cdot 10^{-3}\,\text{tg}\,\varphi=0{,}22\,\text{tg}\,\varphi,\quad [\%\,;\,\text{rad}].$$

Ea este deosebit de mare cînd defazajul φ dintre tensiune şi curent este mare.

Problema 3.1.5. Un wattmetru electrodinamic are scara gradată pentru consumatori de c. a. cu frecvenţa cuprinsă între 15 Hz şi 500 Hz. Schema circuitului de tensiune al acestui wattmetru este redată în fig. 3.1.4. Bobina de tensiune are rezistenţa $R_B=350\ \Omega$ şi inductivitatea $L_B=5$ mH. Pentru ca indicaţia wattmetrului să nu depindă de frecvenţă, în schemă se prevede un condensator, avînd capacitatea $C=0{,}1\ \mu$F.

1. Să se determine valorile rezistenţelor R_1 şi R_2 astfel încît impedanţa echivalentă a circuitului de tensiune să aibă valoarea de 1 000 Ω şi să fie pur rezistivă.

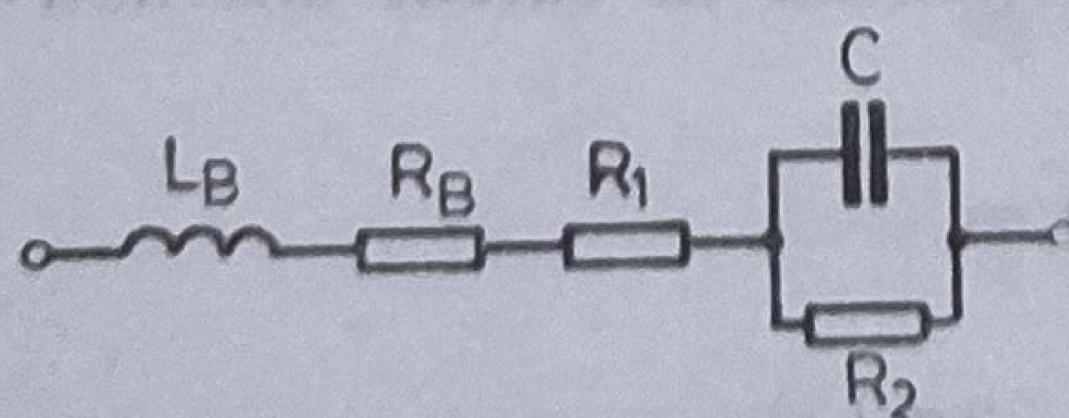


Fig. 3.1.4.

2. Ştiind că circuitul de tensiune calculat la punctul 1 are tensiunea nominală $U_n=30$ V, să se calculeze rezistenţa R_{ad} a rezistorului adiţional necesar modificării tensiunii nominale la $U_l=120$ V.

Soluție. 1. Impedanța complexă echivalentă a circuitului de tensiune este :

$$j\cdot 2\pi f L_B + R_B + R_1 + \frac{R_2 - j\cdot 2\pi f C R_2^2}{1+(2\pi f C R_2)^2} = 1\,000.$$

De aici rezultă :

$$R_B + R_1 + \frac{R_2}{1+(2\pi f C R_2)^2} = 1\,000$$

și

$$L_B - \frac{C R_2^2}{1+(2\pi f C R_2)^2} = 0,$$

sau

$$350 + R_1 + \frac{R_2}{1+(2\pi f\cdot 0{,}1\cdot 10^{-6}\cdot R_2)^2} = 1\,000$$

și

$$5\cdot 10^{-3} - \frac{0{,}1\cdot 10^{-6}\cdot R_2^2}{1+(2\pi f\cdot 0{,}1\cdot 10^{-6}\cdot R_2)^2} = 0.$$

Aceste două relații sînt îndeplinite simultan pentru o valoare a frecvenței f. Adoptînd valoarea $f=100$ Hz cuprinsă între 15 Hz și 500 Hz, se obțin $R_1=$ $=426{,}4\ \Omega$ și $R_2=223{,}6\ \Omega$. Cu aceste valori ale rezistențelor R_1 și R_2 circuitul de tensiune are impedanța echivalentă practic rezistivă pentru frecvența cuprinsă între 15 Hz și 500 Hz. Prin aceasta se asigură independența indicației wattmetrului față de frecvență.

2. $$R_{ad} = \left(\frac{U_l}{U_n} - 1\right)\cdot 1\,000 = \left(\frac{120}{30} - 1\right)\cdot 1\,000 = 3\,000\ \Omega.$$

Problema 3.1.6. Un wattmetru Hall (fig. 3.1.5) este alcătuit din traductorul Hall TH, avînd sensibilitatea la mersul în gol $S_0=1{,}5$ V/AT și rezistența circuitului de comandă $R_c=300\ \Omega$, și bobina cu miez de fier BF, care asigură în dreptul traductorului TH inducția magnetică

$$B=Ki,$$

cu $K=0{,}025$ T/A. Să se determine legătura dintre puterea activă P măsurată de acest wattmetru și tensiunea Hall u_{H0} la mersul în gol al traductorului TH.

Soluție. Dacă T este perioada tensiunii alternative u, atunci puterea activă este :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui\ dt.$$

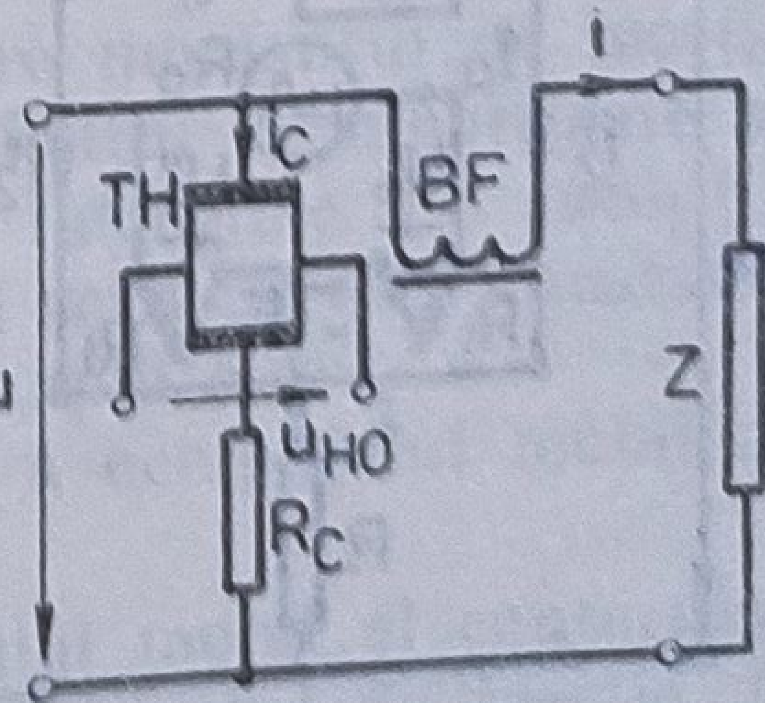


Fig. 3.1.5.

Tensiunea Hall la mersul în gol al traductorului TH are valoarea momentană :

$$u_{H_0} = S_0 i_c B = S_0 \frac{u}{R_c} Ki.$$

Prin urmare,

$$ui = \frac{R_c u_{Ho}}{KS_0}$$

şi

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{R_c u_{Ho}}{KS_0}\,dt = \frac{R_c\,U_{Homed}}{KS_0} = \frac{300\,U_{Homed}}{0{,}025\cdot 1{,}5} = 8\,000\,U_{Homed},$$

în care U_{Homed} este valoarea medie pe o perioadă a tensiunii Hall la mersul în gol al traductorului TH. Pentru a măsura puterea activă P este necesară prin urmare măsurarea tensiunii U_{Homed} cu un aparat de măsură ce prezintă o rezistenţă interioară foarte mare (de ex., voltmetru numeric, compensator de tensiune continuă).

Problema 3.1.7. Pentru măsurarea puterii active P se utilizează wattmetrul termoelectric din fig. 3.1.6. Transformatorul de curent TC are curentul primar nominal $I_{1n}=1$ A şi curentul secundar nominal $I_{2n}=5$ mA. Relaţia dintre t.e.m. U_e ale termoelementelor şi valoarea efectivă I a curentului care trece prin firele încălzitoare ale convertoarelor termoelectrice CTE este:

$$U_e = KI^2 = 295\,I^2,\quad [\mathrm{V}\,;\,\mathrm{A}].$$

Microampermetrul are intervalul de măsurare $I_{an}=120\ \mu$A, scara $a_{max}=60$ diviziuni şi rezistenţa interioară $R_a=290\ \Omega$. Ştiind că rezistenţa unui termoelement este $R_t=2{,}5\ \Omega$, iar rezistenţa corespunzătoare circuitului de tensiune este $R=1\,000\ \Omega$, să se determine constanta C a wattmetrului termoelectric.

Soluţie. Fie $u=U_m \sin \omega t$ şi $i_1=I_{1m}\sin(\omega t-\varphi)$ valorile momentane a tensiunii şi a curentului aplicate wattmetrului. Prin firele încălzitoare ale celor două convertoare termoelectrice trec curenţii:

$$i_2' = \frac{i_u}{2} + i_2 = \frac{u}{2R} + \frac{I_{2n}}{I_{1n}} i_1 = \frac{U_m}{2R}\sin\omega t + \frac{I_{2n}}{I_{1n}} I_{1m}\sin(\omega t-\varphi)$$

şi

$$i_2'' = \frac{i_u}{2} - i_2 = \frac{u}{2R} - \frac{I_{2n}}{I_{1n}} i_1 = \frac{U_m}{2R}\sin\omega t - \frac{I_{2n}}{I_{1n}} I_{1m}\sin(\omega t-\varphi),$$

pătratul valorilor lor efective fiind

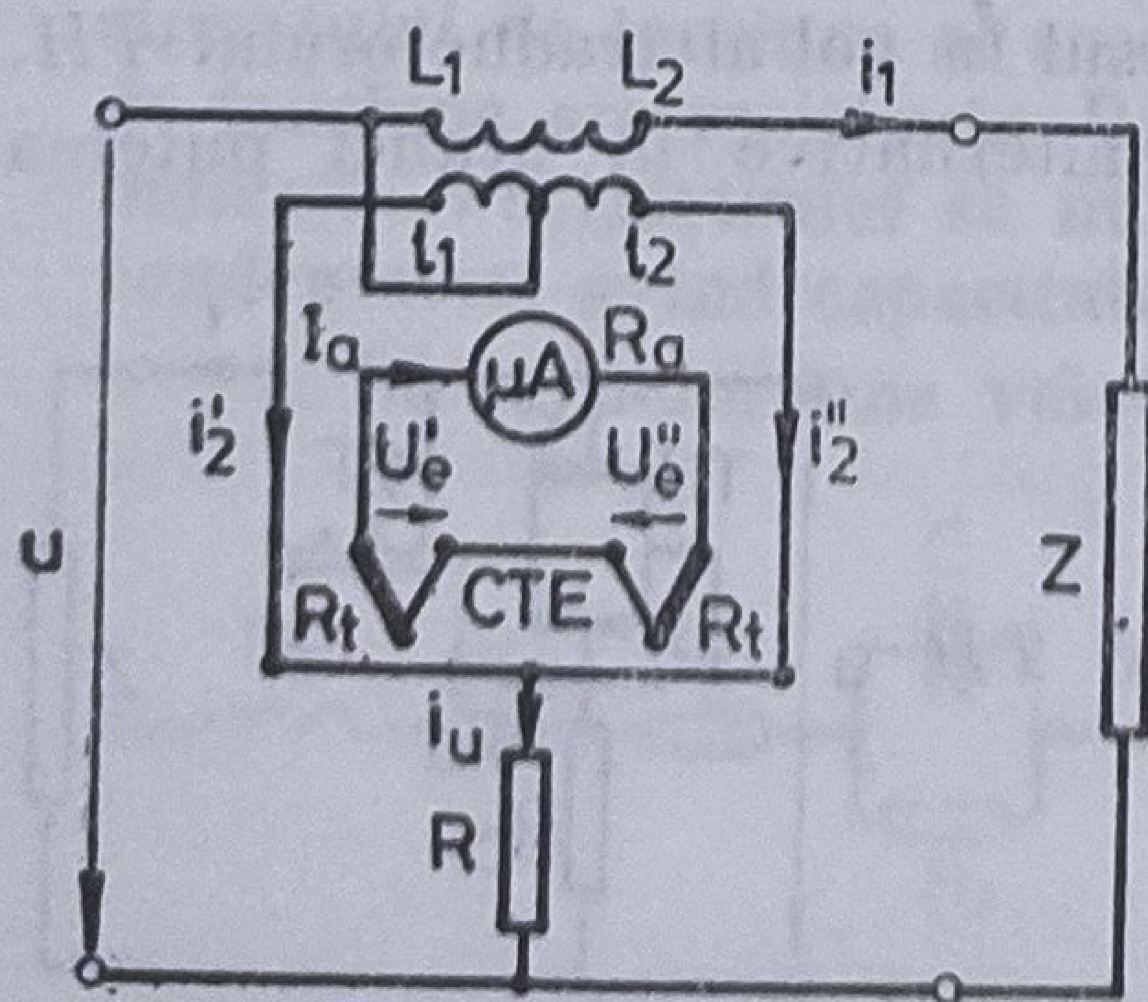


Fig. 3.1.6.

$$I_2'^2 = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} i_2'^2\,dt = \frac{U_m^2}{8R} + \frac{I_{2n}}{2I_{1n}R} U_m I_{1m}\cos\varphi + \frac{I_{2n}^2 I_{1m}^2}{2I_{1n}^2}$$

şi

$$I_2''^2 = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} i_2''^2\,dt = \frac{U_m^2}{8R} - \frac{I_{2n}}{2I_{1n}R} U_m I_{1m}\cos\varphi + \frac{I_{2n}^2 I_{1m}^2}{2I_{1n}^2}.$$

Curentul prin microampermetru este

$$I_a = \frac{U'_e - U''_e}{2R_t + R_a} = \frac{K(I_2'^2 - I_2''^2)}{2R_t + R_a} = \frac{KI_{2n}\,U_m\,I_{1m}\cos\varphi}{I_{1n}R(2R_t + R_a)} = \frac{2KI_{2n}P}{I_{1n}R(2R_t + R_a)},$$

iar puterea activă măsurată

$$P = \frac{I_a I_{1n} R(2R_t + R_a)}{2KI_{2n}} = \frac{I_{an} I_{1n} R(2R_t + R_a)}{2\alpha_{max} KI_{2n}} \cdot \alpha = C\alpha.$$

Rezultă :

$$C = \frac{I_{an} I_1 R(2R_t + R_a)}{2\alpha_{max} KI_{2n}} = \frac{120 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 1\,000 \cdot (2 \cdot 2{,}5 + 290)}{2 \cdot 60 \cdot 295 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 200 \text{ W/div.}$$

3.2. CONTOARE DE ENERGIE ELECTRICĂ

Contoarele de energie electrică sînt aparate de măsură integratoare destinate măsurării energiei electrice. Se disting contoare de energie electrică electrodinamice (utilizate în circuite de c. c.) și contoare de energie electrică de inducție (utilizate în circuite de c. a.). Lărgirea intervalului de măsurare al contoarelor de energie electrică de inducție se face prin intermediul transformatoarelor de măsură.

Din punctul de vedere al preciziei lor contoarele de energie electrică se caracterizează prin clasa de precizie. Acesteia îi corespunde în condiții de referință stabilite prin specificații eroarea de bază, care este o eroare relativă procentuală limită. La modificarea oricărei mărimi de influență (de ex., a temperaturii mediului în care are loc măsurarea), apar erori suplimentare, ce se adaugă la eroarea de bază.

Problema 3.2.1. Un contor de energie electrică are tensiunea nominală $U_n = 220$ V, curentul nominal $I_n = 10$ A, turația nominală a echipajului mobil $n_n = 0{,}611$ rot/s. Să se determine raportul de transmisie K al contorului.

Soluție.

$$K = 3{,}6 \cdot 10^6 \frac{n_n}{U_n I_n} = 3{,}6 \cdot 10^6 \frac{0{,}611}{220 \cdot 10} = 1\,000 \text{ rot/kWh.}$$

Problema 3.2.2. Un contor de energie electrică are momentul de inerție al echipajului mobil față de axa de rotație J, coeficientul de amortizare al echipajului mobil A și cuplul de frecare compensat în întregime. Cu excepția intervalului de timp cuprins între t_1 și t_2, în care cuplul activ M este constant, asupra echipajului mobil al contorului nu acționează cuplu activ.

1. Să se determine variația vitezei unghiulare ω a echipajului mobil al contorului în funcție de timp.

2. Să se arate că numărul de rotații ale echipajului mobil al contorului sub acțiunea cuplului activ M este independent de momentul de inerție J.

Soluție. 1. Ecuația de mișcare a echipajului mobil al contorului și condițiile inițiale aferente sînt :

$$J\frac{d\omega}{dt}+A\omega=\begin{cases}0, & \omega=0, \quad (t<t_1)\\ M, & \omega=0, \quad (t_1\leqslant t\leqslant t_2)\\ 0, & \omega\neq 0, \quad (t>t_2).\end{cases}$$

Soluția primei ecuații este $\omega=0$, $(t<t_1)$, iar a celei de a doua

$$\omega=\frac{M}{A}\left\{1-\exp\left[-\frac{A}{J}(t-t_1)\right]\right\}, \qquad (t_1\leqslant t\leqslant t_2).$$

Rezultă condiția inițială pentru cea de a treia ecuație

$$\omega=\frac{M}{A}\left\{1-\exp\left[-\frac{A}{J}(t_2-t_1)\right]\right\}, \quad (t=t_2)$$

și apoi soluția ascestei ecuații

$$\omega=\frac{M}{A}\left\{1-\exp\left[-\frac{A}{J}(t_2-t_1)\right]\right\}\exp\left[-\frac{A}{J}(t-t_2)\right], \quad (t>t_2).$$

2. Numărul de rotații ale echipajului mobil al contorului sub acțiunea cuplului activ M este :

$$n_r=\frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\omega dt+\frac{1}{2\pi}\int_{t_2}^{\infty}\omega dt=\frac{M}{2\pi A}\left\{t_2-t_1+\frac{J}{A}\left[\exp\left(-\frac{A}{J}t_2+\frac{A}{J}t_1\right)-1\right]\right\}-$$

$$-\frac{M}{2\pi A}\cdot\frac{J}{A}\left[\exp\left(-\frac{A}{J}t_2+\frac{A}{J}t_1\right)-1\right]=\frac{M(t_2-t_1)}{2\pi A}.$$

Numărul de rotații nu depinde de momentul de inerție J al echipajului mobil.

Problema 3.2.3. Cele două bobine fixe ale unui contor de energie electrică electrodinamic pot fi legate în serie sau în paralel. Curentul nominal al unei bobine fixe este $I_n=5$ A, iar tensiunea nominală a contorului este $U_n=300$ V.

1. Să se determine turația nominală a echipajului mobil al contorului cînd bobinele fixe sînt legate în serie și cînd ele sînt legate în paralel, știind că la legarea în serie a bobinelor fixe raportul de transmisie al contorului este $K_s=1\,200$ rot/kWh.

2. Să se determine raportul de transmisie K_p al aceluiași contor cînd bobinele sale fixe sînt legate în paralel.

Soluție. 1. Turația nominală a echipajului mobil al contorului este asigurată de cuplul activ nominal ; cuplul activ are valoarea nominală cînd cele două bobine fixe sînt străbătute în același sens de curentul nominal $I_n=5$ A, iar circuitului de tensiune i se aplică tensiunea nominală $U_n=300$ V. Această situație are loc atît la legarea în serie a înfășurărilor fixe, cît și la legarea lor în paralel. Turația nominală este prin urmare independentă de modul de legare a înfășurărilor și are valoarea :

$$n_n=\frac{K_s U_n I_{ns}}{3{,}6\cdot 10^6}=\frac{1\,200\cdot 300\cdot 5}{3{,}6\cdot 10^6}=0{,}5 \text{ rot/s}.$$

I_{ns} fiind curentul nominal al contorului la legarea în serie a înfășurărilor fixe.

2. La legarea în paralel a înfășurărilor fixe curentul nominal al contorului este $I_{np} = 2I_n = 2 \cdot 5 = 10$ A, iar raportul de transmisie este în acest caz

$$K_p = \frac{3{,}6 \cdot 10^6 \cdot n_n}{U_n\, I_{np}} = \frac{3{,}6 \cdot 10^6 \cdot 0{,}5}{300 \cdot 10} = 600 \text{ rot/kWh}.$$

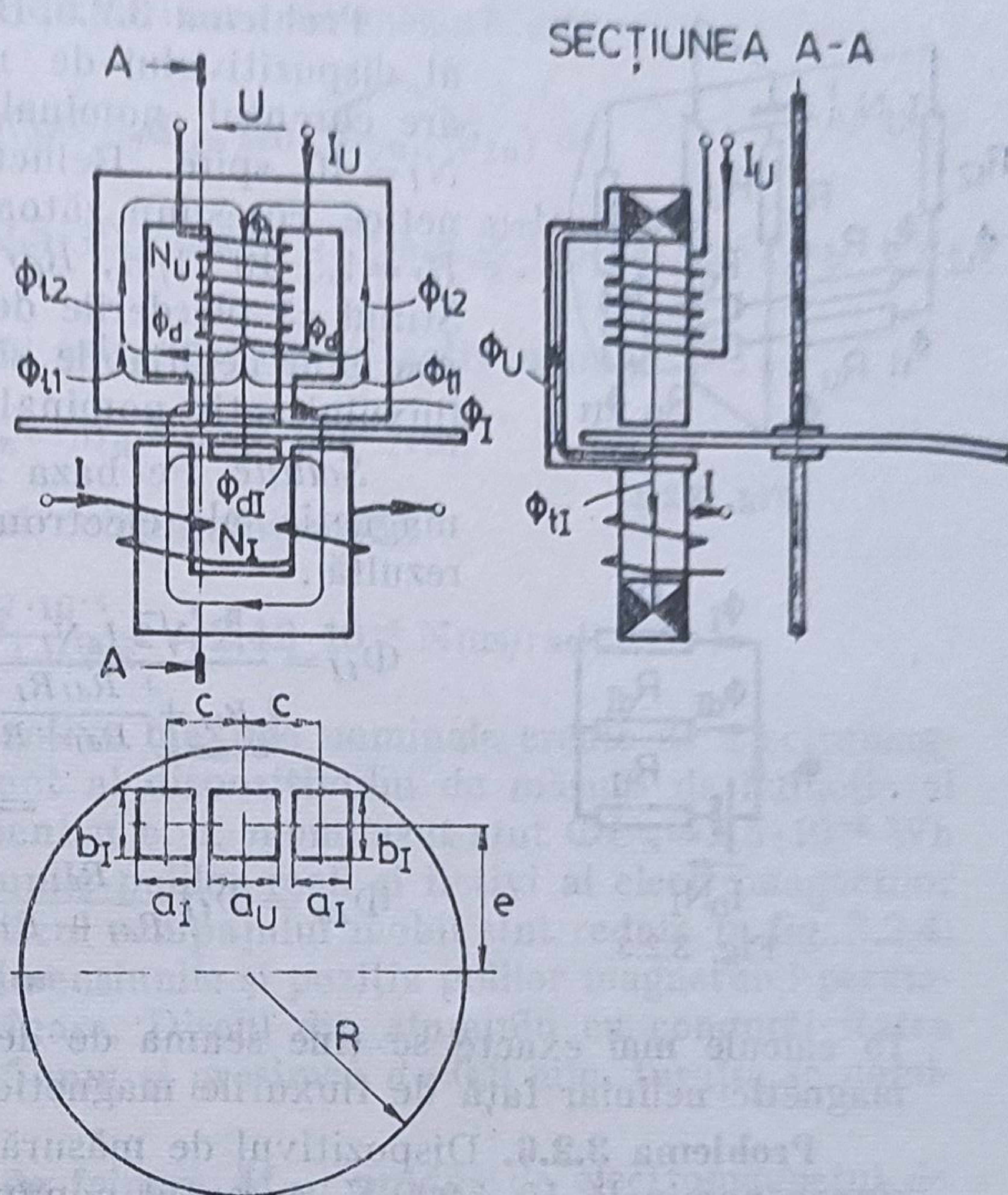


Fig. 3.2.1.

Problema 3.2.4. Dispozitivul de măsură al unui contor de energie electrică activă de inducție pentru c. a. monofazat, avînd tensiunea nominală $U_n = 220$ V, la frecvența nominală $f_n = 50$ Hz este redat în fig. 3.2.1. Electromagnetul de tensiune produce fluxul maxim activ nominal $\Phi_{Un} = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ Wb, reluctanțele ramurilor circuitelor magnetice corespunzătoare fluxurilor Φ_U, Φ_{l1}, Φ_{l2}, Φ_d și Φ_t fiind $R_U = 5 \cdot 10^6$ 1/H, $R_{l1} = 3 \cdot 10^6$ 1/H, $R_{l2} = 2 \cdot 10^4$ 1/H, $R_d = 14 \cdot 10^6$ 1/H și $R_t = 2 \cdot 10^4$ 1/H. Știind că pierderile de energie în miezul de fier și în disc sînt neglijabile, să se determine numărul de spire N_U al bobinei electromagnetului de tensiune și valoarea efectivă I_U a curentului prin această bobină.

Soluție. Calculele se efectuează pe baza schemei echivalente a circuitului magnetic al electromagnetului de tensiune (fig. 3.2.2):

$$U_{mU} = \Phi_{Un} \cdot R_U = 2{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^6 = 125 \text{ A},$$

$$\Phi_{l2} = \frac{U_{mU}}{R_{l_2} + \frac{R_d R_{l1}}{R_d + R_{l1}}} = \frac{125}{2 \cdot 10^4 + \frac{14 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^6}{14 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^6}} = 5{,}02 \cdot 10^{-5} \text{ Wb},$$

$$\Phi_t = \Phi_{Un} + 2\Phi_{l2} = 2{,}5 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 5{,}02 \cdot 10^{-5} = 1{,}254 \cdot 10^{-4} \text{ Wb},$$

$$N_U = \frac{U_n}{4{,}44 \cdot f_n \Phi_t} = \frac{220}{4{,}44 \cdot 50 \cdot 1{,}254 \cdot 10^{-4}} = 7\,903 \text{ spire},$$

$$I_U = \frac{\Phi_t R_t + U_{mU}}{\sqrt{2}\, N_U} = \frac{1{,}254 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4 + 125}{1{,}41 \cdot 7\,903} = 0{,}0114 \text{ A}.$$

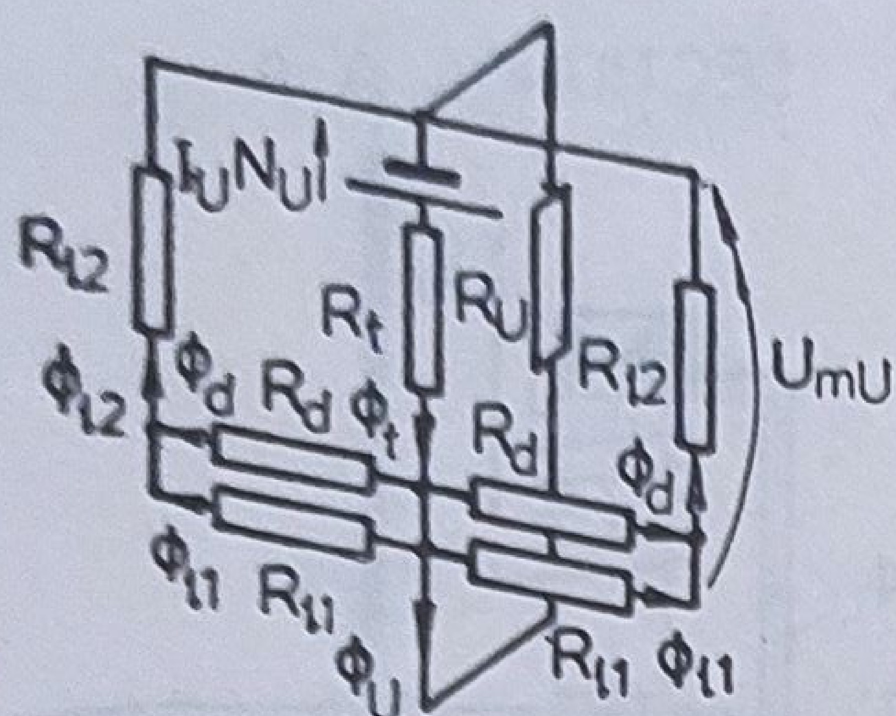


Fig. 3.2.2.

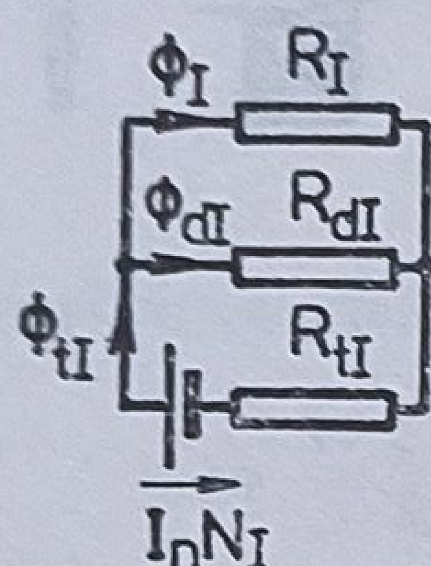


Fig. 3.2.3.

Problema 3.2.5. Bobina electromagnetului de curent al dispozitivului de măsură de inducție din fig. 3.2.1 are curentul nominal $I_n = 10$ A și numărul de spire $N_I = 10$ spire. Reluctanțele ramurilor circuitelor magnetice corespun zătoare fluxurilor Φ_I, Φ_{dI} și Φ_{tI} sînt $R_I = 1{,}5 \cdot 10^7$ 1/H, $R_{dI} = 1{,}3 \cdot 10^7$ 1/H și $R_{tI} = 3{,}5 \cdot 10^5$ 1/H. Știind că pierderile de energie în miezul de fier și în disc sînt neglijabile să se determine valoarea maximă a fluxului activ nominal Φ_{In} creeat de acest electromagnet.

Soluție. Pe baza schemei echivalente a circuitului magnetic al electromagnetului de curent (fig. 3.2.3) rezultă :

$$\Phi_{tI} = \frac{\sqrt{2}\, I_n N_I}{R_{tI} + \dfrac{R_{dI} R_I}{R_{dI} + R_I}} = \frac{1{,}41 \cdot 10 \cdot 10}{3{,}5 \cdot 10^5 + \dfrac{1{,}3 \cdot 10^7 \cdot 1{,}5 \cdot 10^7}{1{,}3 \cdot 10^7 + 1{,}5 \cdot 10^7}} = 1{,}93 \cdot 10^{-5}\ \text{Wb},$$

$$\Phi_{In} = \Phi_{tI} \frac{R_{dI}}{R_{dI} + R_I} = 1{,}93 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1{,}3 \cdot 10^7}{1{,}3 \cdot 10^7 + 1{,}5 \cdot 10^7} = 8{,}96 \cdot 10^{-6}\ \text{Wb}.$$

În calcule mai exacte se ține seama de dependența reluctanțelor circuitului magnetic neliniar față de fluxurile magnetice care le străbat.

Problema 3.2.6. Dispozitivul de măsură de inducție din fig. 3.21 are tensiunea nominală $U_n = 220$ V, curentul nominal $I_n = 5$ A și frecvența nominală $f_n = 50$ Hz. Fluxurile active produse de electromagnetul de tensiune și cel de curent au valorile maxime nominale $\Phi_{Un} = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ Wb și $\Phi_{In} = 8{,}96 \cdot 10^{-6}$ Wb (vezi problemele 3.2.4 și 3.2.5), defazajul dintre ele fiind $(\widehat{\Phi_{Un}, \Phi_{In}}) = \pi/2$ rad. Discul de aluminiu cu conductivitatea $\sigma_{Al} = 34 \cdot 10^6$ S/m are raza $R = 45$ mm și grosimea $d = 0{,}6$ mm. Distanța dintre centrele proiecțiilor polilor electromagneților pe suprafața discului este $c = 16$ mm, iar distanța dintre centrul discului și dreapta care trece prin centrele proiecțiilor amintite este $e = 30$ mm. Laturile polilor au dimensiunile $a_U = b_U = b_I = 14$ mm și $a_I = 12$ mm.

1. Să se determine valoarea nominală M_n a cuplului activ al dispozitivului de măsură de inducție.

2. Știind că dispozitivul de măsură aparține unui contor avînd turația nominală $n_n = 0{,}366$ rot/s, să se determine cuplul de frînare nominal M_{An} și coeficientul de amortizare A al echipajului mobil.

Soluție. 1. Se calculează :

$$x = \frac{e}{R} = \frac{30}{45} = 0{,}667 \quad \text{și} \quad y = \frac{c}{R} = \frac{16}{45} = 0{,}356.$$

Întrucît :

$$\sqrt{\frac{a_U b_U}{\pi}} + \sqrt{\frac{a_I b_I}{\pi}} = \sqrt{\frac{14 \cdot 14}{3{,}14}} + \sqrt{\frac{12 \cdot 14}{3{,}14}} = 15{,}2\ \text{mm} < c = 16\ \text{mm},$$

se determină

$$K_M = \frac{x}{y}\left[1 - \frac{y^2}{(1-x^2)^2 + x^2 y^2}\right] = \frac{0{,}667}{0{,}356}\left[1 - \frac{0{,}356^2}{(1-0{,}667^2)^2 + 0{,}667^2 \cdot 0{,}356^2}\right] = 1{,}22.$$

Cuplul activ nominal produs de dispozitivul de măsură este:

$$M_n = 2\sigma_{Al} d f_n K_M \Phi_{Un} \Phi_{In} \sin (\widehat{\Phi_{Un}, \Phi_{In}}) =$$

$$= 2 \cdot 34 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-4} \cdot 50 \cdot 1{,}22 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 8{,}96 \cdot 10^{-6} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 5{,}57 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}.$$

2. Cuplul de frînare nominal este egal cu cel activ nominal:

$$M_{An} = M_n = 5{,}57 \cdot 10^{-4} \text{ Nm},$$

iar coeficientul de amortizare al echipajului mobil

$$A = \frac{M_{An}}{2\pi n_n} = \frac{5{,}57 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}366} = 2{,}42 \cdot 10^{-4} \text{ Nms/rad}.$$

Problema 3.2.7. Fluxurile active maxime nominale create de electromagnetul de tensiune și cel de curent al dispozitivului de măsură de inducție al unui contor de energie activă pentru c. a. monofazat sînt $\Phi U_n = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ Wb și $\Phi_{In} = 8{,}96 \cdot 10^{-6}$ Wb. Dimensiunile polilor reali și fictivi ai electromagneților precum și pozițiile lor față de discul echipajului mobil sînt redate în fig. 3.2.4, în care se precizează totodată dimensiunile și poziția polilor magnetului permanent care produce cuplul de frînare. Discul din aluminiu cu conductivitatea $\sigma_{Al} = 34 \cdot 10^6$ S/m are raza $R = 45$ mm și grosimea $d = 0{,}6$ mm, turația sa nominală fiind $n_n = 0{,}366$ rot/s.

1. Să se determine cuplul de frînare M_{AU} produs de electromagnetul de tensiune la turația nominală a echipajului mobil al contorului.

2. Să se determine cuplul de frînare M_{AI} produs de electromagnetul de curent la turația nominală a echipajului mobil al contorului.

3. Să se calculeze inducția magnetică B_M în întrefierul magnetului permanent, știind că cuplul activ nominal are valoarea $M_n = 5{,}57 \cdot 10^{-4}$ Nm.

Soluție. 1. Raza echivalentă a secțiunii polului electromagnetului de tensiune este:

$$R_U = \sqrt{\frac{a_U b_U}{\pi}} = \sqrt{\frac{14 \cdot 14}{3{,}14}} = 7{,}9 \text{ mm}.$$

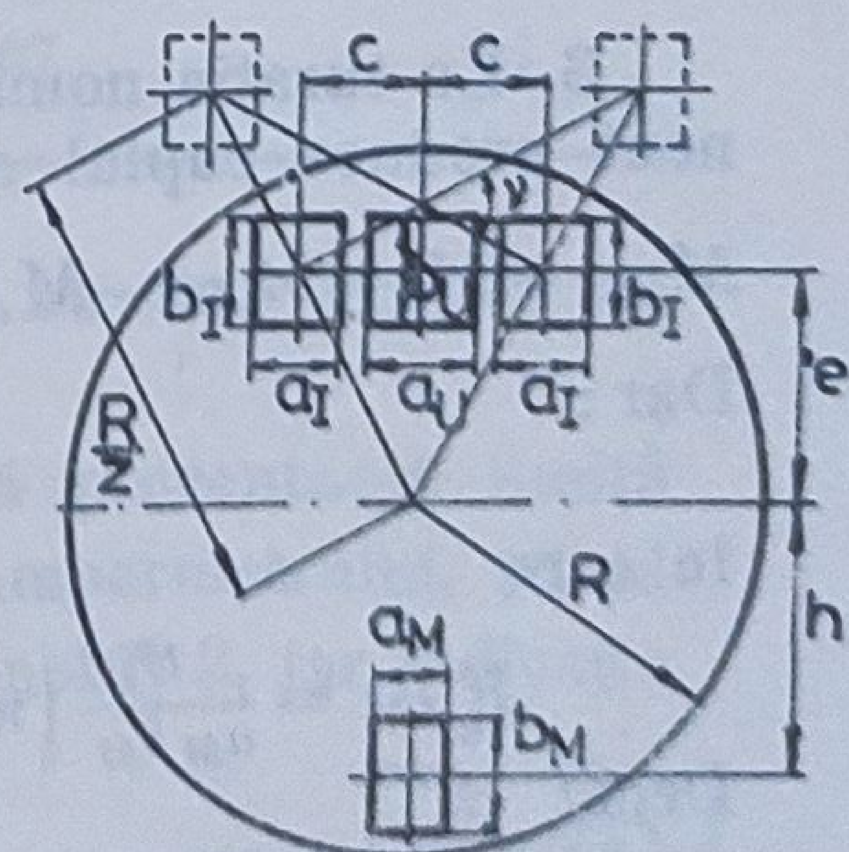
Se calculează apoi:

$$r_U = \frac{R_U}{R} = \frac{7{,}9}{45} = 0{,}176,$$

$$x = \frac{e}{R} = \frac{30}{45} = 0{,}667$$

și

$$K_{AU} = x^2 \left[\frac{1}{r_U^2} - \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \right] = 0{,}667^2 \left[\frac{1}{0{,}176^2} - \frac{0{,}667^2}{(1-0{,}667^2)^2} \right] = 13{,}72.$$



$a_U = b_U = b_I = 14$ mm; $a_I = 12$ mm; $a_M = 10$ mm; $b_M = 15$ mm; $c = 30$ mm; $e = 30$ mm; $h = 35$ mm; $R = 45$ mm.

Fig. 3.2.4.

Cuplul de frînare produs de electromagnetul de tensiune este :

$$M_{AU} = 0{,}5\sigma_{Al} d K_{AU} \Phi_{Un}^2 n_n = 0{,}5 \cdot 34 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-4} \cdot 13{,}72\,(2{,}5 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 0{,}366 = 3{,}20 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}.$$

2. Raza echivalentă a secţiunii polului electromagnetului de curent este :

$$R_I = \sqrt{\frac{a_I b_I}{\pi}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 14}{3{,}14}} = 7{,}31 \text{ mm}.$$

Se determină apoi :

$$r_I = \frac{R_I}{R} = \frac{7{,}31}{45} = 0{,}162,$$

$$y = \frac{c}{R} = \frac{16}{45} = 0{,}356,$$

$$z = \frac{\sqrt{c^2 + e^2}}{R} = \frac{\sqrt{16^2 + 30^2}}{45} = 0{,}756,$$

$$\nu = 1{,}17 \text{ rad}$$

şi

$$K_{AI} = z^2 \left(\frac{1}{r_I^2} + \frac{1}{4y^2}\right) - z^4 \left[\frac{1}{(1 - z^2)^2} + \frac{\cos \nu}{z^8 - 2(z^2 - 2y^2) + 1}\right] =$$

$$= 0{,}756^2 \left(\frac{1}{0{,}162^2} + \frac{1}{4 \cdot 0{,}356^2}\right) - 0{,}756^4 \left[\frac{1}{1 - 0{,}756^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos 1{,}17}{0{,}756^8 - 2 \cdot (0{,}756^2 - 2 \cdot 0{,}356^2) + 1}\right] = 20{,}85.$$

Cuplul de frînare produs de electromagnetul de curent este :

$$M_{AI} = \sigma_{Al} d K_{AI} \Phi\, I_n^2 n_n = 34 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-4} \cdot 20{,}85 \cdot (8{,}96 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 0{,}366 = 1{,}25 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}.$$

3. La turaţia nominală a echipajului mobil al contorului magnetul permanent produce cuplul de frînare :

$$M_{AM} = M_n - M_{AU} - M_{AI} = 5{,}57 \cdot 10^{-4} - 3{,}20 \cdot 10^{-5} - 1{,}25 \cdot 10^{-5} = 5{,}125 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}.$$

Dar :

$$M_{AM} = 2\sigma_{Al} d K_{AM} \Phi_M^2 n_n,$$

în care

$$K_{AM} = \frac{h^2}{a_M b_M}\left(\pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{a_M}{b_M}\right) = \frac{35^2}{10 \cdot 15}\left(3{,}14 - 2 \operatorname{arctg} \frac{10}{15}\right) = 16{,}06.$$

Deci :

$$\Phi_M = \sqrt{\frac{M_{AM}}{2\sigma_{Al}\, d K_{AM} n_n}} = \sqrt{\frac{5{,}125 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 34 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-4} \cdot 16{,}06 \cdot 0{,}366}} = 4{,}62 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

şi

$$B_M = \frac{\Phi_M}{a_M b_M} = \frac{4{,}62 \cdot 10^{-5}}{10 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot 10^{-3}} = 0{,}308 \text{ T}.$$

3.3. MĂSURAREA PUTERII ŞI ENERGIEI ÎN CIRCUITE DE C. C.

În circuite de c. c. puterea se măsoară direct, cu wattmetrul, sau indirect, folosind diferite expresii ale puterii. Erorile relative procentuale limită ale rezultatelor măsurării puterii se stabilesc, utilizînd relaţiile (1.5 – 1.7).

În mod asemănător energia se măsoară direct, cu contorul electrodinamic sau indirect, pe baza diverselor expresii ale energiei. Erorile relative procentuale limită ale rezultatelor măsurării energiei se determină folosind relaţiile (1.3, 1.6 şi 1.7).

Problema 3.3.1. Într-un circuit de c. c. se măsoară puterea cu ajutorul aparatelor caracterizate prin datele din tabelul 3.3.1 şi legate conform schemei din fig. 3.3.1. În decursul măsurării wattmetrul indică $a_w = 82{,}7$ diviziuni şi ampermetrul $a_a = 37$ diviziuni, iar rezistenţele interioare ale aparatelor se cunosc cu eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,\text{lim}} = \pm 0{,}1\%$.

1. Să se determine puterea P preluată de consumator şi eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,\text{lim}\,P}$ de măsurare a ei.

Tabelul 3.3.1

Caracteristicile aparatelor		Voltmetru	Ampermetru	Wattmetru
Tens. nom.	[V]	150	–	150
Curent nom.	[A]	–	6	5
Int. de măs.	[V, A, W]	150	6	750
Scara	[div]	30	60	150
Cl. de prec.		0,5	0,5	0,5
Rezist. circ. tens.	[Ω]	15 000	–	5 000
Rezist. circ. curent	[Ω]	–	0,07	0,1

2. Presupunînd că indicaţiile aparatelor de măsură nu sînt afectate de erori, să se determine indicaţia a_v a voltmetrului.

3. Să se determine puterea P şi eroarea ei relativă procentuală limită $E_{r\,\text{lim}\,P}$ de măsurare pe baza indicaţiilor voltmetrului şi ampermetrului, ştiind că indicaţia a_v a voltmetrului este cea determinată la punctul 2, iar indicaţia a_a a ampermetrului este cea din enunţ.

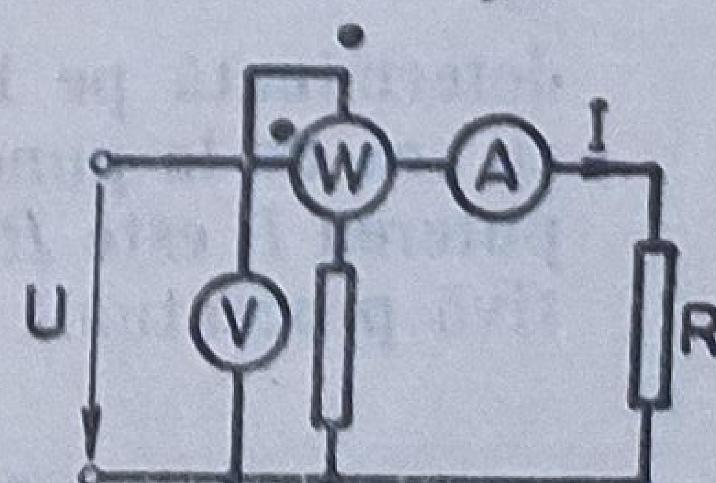


Fig. 3.3.1.

Soluţie. 1. Puterea are valoarea:

$$P = \frac{750}{150} a_w - \left(\frac{6}{60} \cdot a_a\right)^2 (0{,}1 + 0{,}07) =$$

$$= 5 \cdot 82{,}8 - (0{,}1 \cdot 37)^2 \cdot 0{,}17 = 411{,}67 \text{ W}.$$

Rezistența în care se consumă puterea P este:

$$R = \frac{P}{\left(\frac{6}{60}a_a\right)^2} = \frac{411{,}67}{(0{,}1\cdot 37)^2} = 30{,}1\ \Omega.$$

Eroarea relativă procentuală limită corespunzătoare indicației wattmetrului este:

$$E_{r\,lim\,w} = (\pm 0{,}5)\frac{150}{a_w} = (\pm 0{,}5)\cdot\frac{150}{82{,}8} = \pm 0{,}91\%,$$

iar cea corespunzătoare indicației ampermetrului

$$E_{r\,lim\,a} = (+0{,}5)\cdot\frac{60}{a_a} = (\pm 0{,}5)\cdot\frac{60}{37} = \pm 0{,}81\%.$$

Eroarea relativă procentuală limită de măsurare a puterii P este:

$$E_{r\,lim\,P} = E_{r\,lim\,w}\left(1+\frac{0{,}1+0{,}07}{R}\right) + 2E_{r\,lim\,a}\frac{0{,}1+0{,}07}{R} + E_{r\,lim}\frac{0{,}1}{R} +$$

$$+E_{r\,lim}\frac{0{,}07}{\mathrm{R}} = (\pm 0{,}91)\cdot\left(1+\frac{0{,}17}{30{,}1}\right) + 2(\pm 0{,}81)\frac{0{,}17}{30{,}1} +$$

$$+(\pm 0{,}1)\frac{0{,}1}{30{,}1} + (\pm 0{,}1)\cdot\frac{0{,}07}{30{,}1} = \pm 0{,}92\%.$$

Ea se datorește în mare măsură erorii wattmetrului.

2. Indicația voltmetrului este:

$$a_v = \frac{30}{150}\cdot\frac{\frac{750}{150}\cdot a_w}{\frac{6}{60}\cdot a_a} = \frac{5\cdot 82{,}8}{5\cdot 0{,}1\cdot 37} = 22{,}38\ \text{div}.$$

3. Valoarea

$$P = \frac{150}{30}\cdot a_v\cdot\frac{6}{60}a_a - \left(\frac{6}{60}a_a\right)^2(0{,}1+0{,}07) =$$

$$= 5\cdot 22{,}38\cdot 0{,}1\cdot 37 - (0{,}1\cdot 37)^2\cdot 0{,}17 = 411{,}67\ \text{W}$$

determinată pe baza indicațiilor voltmetrului și ampermetrului este identică cu cea de la punctul 1. Înseamnă că rezistența circuitului în care se disipează puterea P este $R=30{,}1\ \Omega$. Indicația voltmetrului este afectată de eroarea relativă procentuală limită

$$E_{r\,lim\,v} = (\pm 0{,}5)\frac{30}{a_v} = (\pm 0{,}5)\cdot\frac{30}{22{,}38} = \pm 0{,}67\%,$$

iar cea a ampermetrului de eroarea similară $E_{rlima}=\pm 0{,}81\%$ calculată la punctul 1. Eroarea relativă procentuală limită de măsurare a puterii este:

$$E'_{rlimP}=E_{rlimv}\left(1+\frac{0{,}1+0{,}07}{R}\right)+E_{rlima}\left(1-\frac{0{,}1+0{,}07}{R}\right)+$$

$$+E_{rlim}\frac{0{,}1+0{,}07}{R}=(\pm 0{,}67)\left(1+\frac{0{,}17}{30{,}1}\right)+(\pm 0{,}81)\left(1-\frac{0{,}17}{30{,}1}\right)+$$

$$+(\pm 0{,}1)\frac{0{,}17}{30{,}1}=\pm 1{,}48\%.$$

Ea este mai mare decît la măsurarea efectuată cu wattmetrul și se datorește în special erorilor voltmetrului și ampermetrului.

Problema 3.3.2. Puterea P consumată într-un circuit de c. c. este măsurată cu schema din fig. 3.3.1 în care tensiunea de alimentare $U=105$ V este constantă, iar curentul I poate obține diferite valori. Știind că voltmetrul, ampermetrul și wattmetrul au intervalele de măsurare 150 V, 5 A și 750 W, clasele de precizie 0,5 și consumul neglijabil, să se determine acea valoare a curentului I pentru care eroarea relativă procentuală limită de măsurare a puterii cu voltmetrul și ampermetrul este egală cu eroarea relativă procentuală limită de măsurare a puterii cu wattmetrul.

Soluție. Egalînd expresiile celor două erori relative procentuale limită rezultă:

$$(\pm 0{,}5)\frac{150}{U}+(\pm 0{,}5)\cdot\frac{5}{I}=(\pm 0{,}5)\cdot\frac{750}{U}.$$

Întrucît $U=105$ V, rezultă $I=1{,}5$ A. Dacă $I<1{,}5$ A, atunci măsurarea puterii prin metoda voltampermetrică este mai precisă, iar dacă $I>1{,}5$ A, atunci măsurarea puterii cu wattmetrul conduce la erori relative procentuale limită mai scăzute.

Problema 3.3.3. Rezistenței $R=187\ \Omega$ i se aplică tensiunea continuă $U=116$ V.

1. Să se determine puterea P absorbită de rezistența R.

2. Să se calculeze eroarea relativă procentuală limită E_{rlimP} de determinare a puterii P, știind că rezistența se cunoaște cu eroarea relativă procentuală limită $E_{rlimR}=\pm 0{,}52\%$, iar tensiunea U se măsoară cu un voltmetru, avînd intervalul de măsurare 150 V și clasa de precizie 0,5.

Soluție. 1.

$$P=\frac{U^2}{R}=\frac{116^2}{187}=72\text{ W}.$$

2. $$E_{rlimP}=2(\pm 0{,}5)\cdot\frac{150}{116}+(\pm 0{,}52)=\pm 1{,}81\%.$$

Problema 3.3.4. Rezistenţa $R=12\ \Omega$ cunoscută cu eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,lim\,R}=\pm0{,}65\ \%$ este parcursă de curentul I măsurat cu un ampermetru, avînd intervalul de măsurare 5 A, scara 50 diviziuni, indicaţia 43,5 diviziuni, clasa de precizie 2,5. Să se calculeze puterea P preluată de rezistenţa R şi eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,lim\,P}$ de determinarea ei.

Soluţie. $P=I^2R=\left(\frac{5}{50}\cdot 43{,}5\right)^2\cdot 12=227{,}1$ W,

$$E_{r\,lim\,P}=2\cdot(\pm 2{,}5)\cdot\frac{50}{43{,}5}+(\pm0{,}65)=\pm6{,}4\%.$$

Problema 3.3.5. Cu un contor, avînd raportul de transmisie $K=480$ rot/kWh şi clasa de precizie 2 se măsoară energia consumată într-un circuit de c. c. În decursul a 48 h contorul a înregistrat energia $W=3729{,}8$ kWh. Să se stabilească puterea medie P_{med} a consumatorului, numărul de rotaţii n_r ale echipajului mobil al contorului şi eroarea absolută limită $E_{lim\,W}$ de măsurare a energiei.

Soluţie. 1. $P_{med}=\frac{W}{48}=\frac{3729{,}8}{48}=77{,}704$ kW.

2. $n_r=KW=480\cdot3729{,}8=1\ 790\ 304$ rot.

3. $E_{lim\,W}=\frac{(\pm2)\ W}{100}=\frac{(\pm2)\cdot3729{,}8}{100}=\pm74{,}596$ kWh.

Problema 3.3.6. Tensiunea pulsatorie

$$u=610\ |\sin 314\,t\ |,\qquad [\text{V};\ \text{s}]$$

obţinută prin redresarea unei tensiuni alternative, se aplică unui circuit, avînd rezistenţa $R=125\ \Omega$ şi inductivitatea $L=0{,}15$ H. Puterea absorbită de acest circuit se măsoară cu schema din fig. 3.3.2, în care voltmetrul feromagnetic are intervalele de măsurare $U_{v1}=150$ V, $U_{v2}=300$ V şi $U_{v3}=600$ V şi scara $a_{max\,v}=150$ diviziuni, ampermetrul feromagnetic are intervalul de măsurare $I_a=5$ A şi scara $a_{max\,a}=100$ diviziuni, iar wattmetrul electrodinamic are tensiunile nominale $U_{w1}=300$ V, $U_{w2}=450$ V şi $U_{w3}=600$ V, curentul nominal $I_w=5$ A, factorul de putere nominal $\cos\varphi_w=1$ şi scara $a_{max\,w}=150$ diviziuni. Erorile de măsurare şi consumurile aparatelor se presupun neglijabile.

1. Cu ce valori ale intervalului de măsurare, respectiv tensiunii nominale se conectează voltmetrul şi wattmetrul în circuit?

2. Să se determine indicaţia voltmetrului, ampermetrului şi wattmetrului.

3. Să se compare produsul dintre tensiunea măsurată de voltmetru şi curentul măsurat de ampermetru cu puterea măsurată de wattmetru.

4. Să se repete punctele 1, 2 şi 3 considerînd că voltmetrul şi ampermetrul sînt magnetoelectrice.

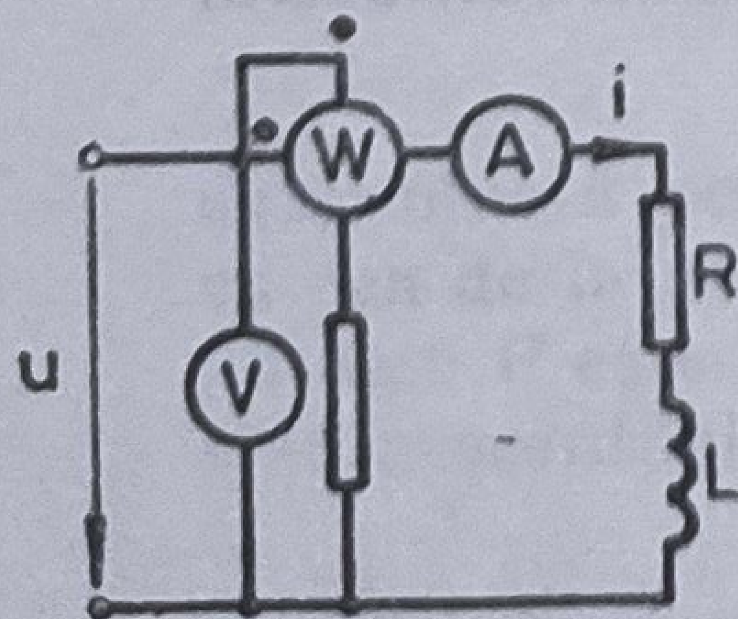


Fig. 3.3.2.

Soluție. 1. Valoarea efectivă a tensiunii pulsatorii fiind :

$$U=\frac{610}{\sqrt{2}}=431{,}3 \text{ V},$$

voltmetrul se conectează cu intervalul de măsurare $U_{v3}=600$ V, iar wattmetrul cu tensiunea nominală $U_{w2}=450$ V.

2. Indicația voltmetrului feromagnetic este proporțională cu valoarea efectivă a tensiunii :

$$\alpha_v=\frac{U}{U_{v3}}\alpha_{max\,v}=\frac{431{,}3}{600}\cdot 150=107{,}8 \text{ div.}$$

Știind că valoarea momentană a tensiunii are expresia :

$$u=610\,|\sin 314\,t\,|=\frac{2\cdot 160}{\pi}-\frac{4\cdot 160}{\pi}\left(\frac{\cos 2\cdot 314\,t}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4\cdot 314\,t}{3\cdot 5}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos 6\cdot 314\,t}{5.7}+\frac{\cos 8\cdot 314\,t}{7\cdot 9}+\ldots\right)=388{,}3-258{,}9\cos 2\cdot 314\,t-$$

$$-51{,}8\cos 4\cdot 314\,t-22{,}2\cos 6\cdot 314\,t-12{,}3\cos 8\cdot 314\,t-\ldots\ [\text{V};\ \text{s}],$$

valoarea momentană a curentului, care trece prin circuit este

$$i=\frac{2\cdot 610}{\pi R}-\frac{4\cdot 610}{\pi}\left[\frac{\cos\left(2\cdot 314\,t-\text{arctg}\dfrac{2\cdot 314\,L}{R}\right)}{1\cdot 3\cdot\sqrt{R^2+(2\cdot 314 L)^2}}+\right.$$

$$+\frac{\cos\left(4\cdot 314\,t-\text{arctg}\dfrac{4\cdot 314\,L}{R}\right)}{3\cdot 5\sqrt{R^2+(4\cdot 314\,L)^2}}+\frac{\cos\left(6\cdot 314\,t-\text{arctg}\dfrac{6\cdot 314\,L}{R}\right)}{5\cdot 7\cdot\sqrt{R^2+(6\cdot 314\,L)^2}}+$$

$$\left.+\frac{\cos\left(8\cdot 314\,t-\text{arctg}\dfrac{8\cdot 314\,L}{R}\right)}{7\cdot 9\cdot\sqrt{R^2+(8\cdot 314\,L)^2}}+\ldots\right]=\frac{2\cdot 610}{3{,}14\cdot 125}-$$

$$-\frac{4\cdot 610}{3{,}14}\left[\frac{\cos\left(2\cdot 314\,t-\text{arctg}\dfrac{2\cdot 314\cdot 0{,}15}{125}\right)}{3\sqrt{125^2+(2\cdot 314\cdot 0{,}15)^2}}+\right.$$

$$+\frac{\cos\left(4\cdot 314\,t-\text{arctg}\dfrac{4\cdot 3{,}14\cdot 0{,}15}{125}\right)}{15\sqrt{125^2+(4\cdot 314\cdot 0{,}15)^2}}+\frac{\cos\left(6\cdot 314\,t-\text{arctg}\dfrac{6\cdot 314\cdot 0{,}15}{125}\right)}{35\sqrt{125^2+(6\cdot 314\cdot 0{,}15)^2}}+$$

$$\left.+\frac{\cos\left(8\cdot 314\,t-\text{arctg}\dfrac{8\cdot 314\cdot 0{,}15}{125}\right)}{63\sqrt{125^2+(8\cdot 314\cdot 0{,}15)^2}}+\ldots\right]=$$

$$=3{,}11-1{,}66\cos(2\cdot 314\,t-0{,}645)-0{,}229\cos(4\cdot 314\,t-0{,}985)-$$

$$-0{,}072\cos(6\cdot 314\,t-1{,}115)-0{,}032\cos(8\cdot 314\,t-1{,}25)-\ldots\quad [\text{A};\ \text{s}].$$

Valoarea efectivă a curentului fiind

$$I = \sqrt{3{,}11^2 + \frac{1{,}66^2 + 0{,}229^2 + 0{,}072^2 + 0{,}032^2 + \ldots}{2}} = 3{,}33 \text{ A},$$

indicaţia ampermetrului feromagnetic este :

$$a_a = \frac{I}{I_a} a_{maxa} = \frac{3{,}33}{5} \cdot 100 = 66{,}6 \text{ div.}$$

Indicaţia wattmetrului electrodinamic este proporţională cu puterea activă

$$P = 388{,}3 \cdot 3{,}11 + \frac{1}{2}(258{,}9 \cdot 1{,}66 \cos 0{,}645 + 51{,}8 \cdot 0{,}229 \cos 0{,}985 +$$

$$+ 22{,}2 \cdot 0{,}072 \cos 1{,}115 + 12{,}3 \cdot 0{,}032 \cos 1{,}25 + \ldots) = 1\,383 \text{ W},$$

fiind

$$a_w = \frac{P}{U_{w2} I_w \cos \varphi_w} \cdot a_{maxw} = \frac{1\,383}{450 \cdot 5 \cdot 1} \cdot 150 = 92{,}2 \text{ div}$$

3. Se constată că

$$P = 1\,383 \text{ W} < UI = 431{,}3 \cdot 3{,}33 = 1\,436{,}2 \text{ VA}.$$

4. Valoarea medie a tensiunii pulsatorii fiind :

$$U_{med} = \frac{2 \cdot 610}{\pi} = 388{,}4 \text{ V},$$

voltmetrul se conectează cu intervalul de măsurare U_{v3}=600 V, iar wattmetrul cu tensiunea nominală U_{w2}=450 V.

Indicaţia voltmetrului magnetoelectric este proporţională cu valoarea medie a tensiunii :

$$a'_v = \frac{U_{med}}{U_{v3}} a_{maxv} = \frac{388{,}4}{600} \cdot 150 = 97{,}1 \text{ div},$$

iar cea a ampermetrului magnetoelectric este proporţională cu valoarea medie a curentului

$$a'_a = \frac{I_{med}}{I_a} a_{maxa} = \frac{3{,}11}{5} \cdot 100 = 62{,}2 \text{ div.}$$

Se constată că

$$P = 1\,383 \text{ W} > U_{med} I_{med} = 388{,}4 \cdot 3{,}11 = 1\,207{,}9 \text{ VA}.$$

Interpretarea rezultatelor obţinute la măsurarea puterii în circuite de c. c. alimentate de la redresoare se face ţinînd seama de aparatele de măsură folosite.

3.4. MĂSURAREA PUTERII ŞI ENERGIEI ÎN CIRCUITE DE C. A. MONOFAZAT

În circuite de c.a. monofazat puterea activă sau reactivă se măsoară direct cu wattmetrul sau varmetrul, sau indirect, folosind diferite expresii ale puterii. Erorile relative procentuale limită ale rezultatelor măsurării puterii se stabilesc, folosind relaţiile (1.5 – 1.7).

În mod similar energia se măsoară direct cu contorul de inducţie sau indirect pe baza diverselor expresii ale energiei. Erorile relative procentuale limită ale rezultatelor măsurării energiei se determină folosind relaţiile (1.3, 1.6 şi 1.7).

Problema 3.4.1. Într-un circuit de c. a. monofazat se măsoară puterea activă cu schema din fig. 3.4.1. Wattmetrul are tensiunea nominală $U_w=150$ V, curentul nominal $I_w=5$ A, intervalul de măsurare $P_w=750$ W, scara $\alpha_{maxw}=150$ diviziuni, indicaţia $\alpha_w=78$ diviziuni, clasa de precizie 0,5, rezistenţa circuitului de tensiune $R_{wv}=5\,000\ \Omega$ şi rezistenţa bobinei de curent $R_{wa}=72$ mΩ, voltmetrul are tensiunea nominală $U_v=150$ V, scara $\alpha_{maxv}=150$ diviziuni, indicaţia $\alpha_v=107$ diviziuni, clasa de precizie 0,5 şi rezistenţa interioară $R_v=3\,000\ \Omega$, ampermetrul are curentul nominal $I_a=6$ A, scara $\alpha_{maxa}=60$ diviziuni, indicaţia $\alpha_a = 45{,}5$ diviziuni, clasa de precizie 1 şi rezistenţa interioară $R_a = 60$ mΩ.

1. Să se determine puterea activă P absorbită de consumator şi eroarea relativă procentuală limită $E_{r\lim P}$ de măsurare a ei, ştiind că rezistenţele bobinelor wattmetrului şi rezistenţele interioare ale voltmetrului şi ampermetrului se cunosc cu eroarea relativă procentuală limită $E_{r\lim}=\pm 1\%$.

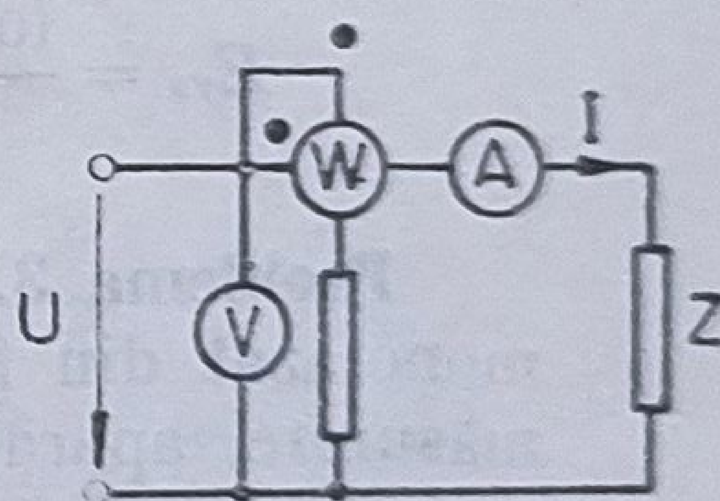


Fig. 3.4.1.

2. Cît este eroarea relativă procentuală sistematică E_{rs} datorată metodei de măsurare?

Soluţie. 1. Puterea are valoarea

$$P=\frac{P_w}{\alpha_{maxw}}\alpha_w-\left(\frac{I_a}{\alpha_{maxa}}\alpha_a\right)^2(R_{wa}+R_a)=$$

$$=\frac{750}{150}\cdot 78-\left(\frac{6}{60}\cdot 45{,}5\right)^2\cdot(0{,}072+0{,}06)=387{,}27\ \text{W}.$$

Rezistenţa în care se consumă puterea P este:

$$R=\frac{P}{\left(\frac{I_a}{\alpha_{maxa}}\alpha_a\right)^2}=\frac{387{,}27}{\left(\frac{6}{60}\cdot 45{,}5\right)^2}=18{,}71\ \Omega.$$

Eroarea relativă procentuală limită corespunzătoare indicaţiei wattmetrului este:

$$E_{r\lim w}=(\pm 0{,}5)\frac{\alpha_{maxw}}{\alpha_w}=(\pm 0{,}5)\cdot\frac{150}{78}=\pm 0{,}96\%,$$

iar cea corespunzătoare indicației ampermetrului

$$E_{r\lim a} = (\pm 0{,}5)\frac{a_{maxa}}{a_a} = (\pm 0{,}5)\cdot\frac{60}{45{,}5} = \pm 0{,}66\%.$$

Eroarea relativă procentuală limită de măsurare a puterii P este :

$$E_{r\lim P} = E_{r\lim w}\left(1+\frac{R_{wa}+R_a}{R}\right) + 2E_{r\lim a}\frac{R_{wa}+R_a}{R} + E_{r\lim}\frac{R_{wa}}{R} +$$

$$+ E_{r\lim}\frac{R_a}{R} = (\pm 0{,}96)\left(1+\frac{0{,}072+0{,}06}{18{,}71}\right) + 2\cdot(\pm 0{,}66)\cdot\frac{0{,}072+0{,}06}{18{,}71} +$$

$$+ (\pm 1)\frac{0{,}072}{18{,}17} + (\pm 1)\frac{0{,}06}{18{,}71} = \pm 0{,}99\%.$$

2. Datorită consumului bobinei de curent a wattmetrului și a ampermetrului apare eroarea relativă procentuală sistematică :

$$E_{rs} = \frac{100\, I^2 (R_{wa}+R_a)}{P} = \frac{100\cdot\left(\frac{6}{60}\cdot 45{,}5\right)^2\cdot(0{,}072+0{,}06)}{387{,}27} = 0{,}706\%.$$

Problema 3.4.2. Să se afle puterea activă P măsurată în circuitul de c. a. monofazat din fig. 3.4.2 și eroarea ei relativă procentuală limită $E_{r\lim P}$ de măsurare, aparatele și indicațiile lor fiind cele din problema 3.4.1. Care este eroarea relativă procentuală sistematică E_{rs} datorată metodei de măsurare ?

Soluție. Rezistența echivalentă a circuitului de tensiune al wattmetrului și a rezistenței interioare a voltmetrului legate în paralel este :

$$R_e = \frac{R_{wv}\cdot R_v}{R_{wv}+R_v} = \frac{5\,000\cdot 3\,000}{5\,000+3\,000} = 1\,875\ \Omega.$$

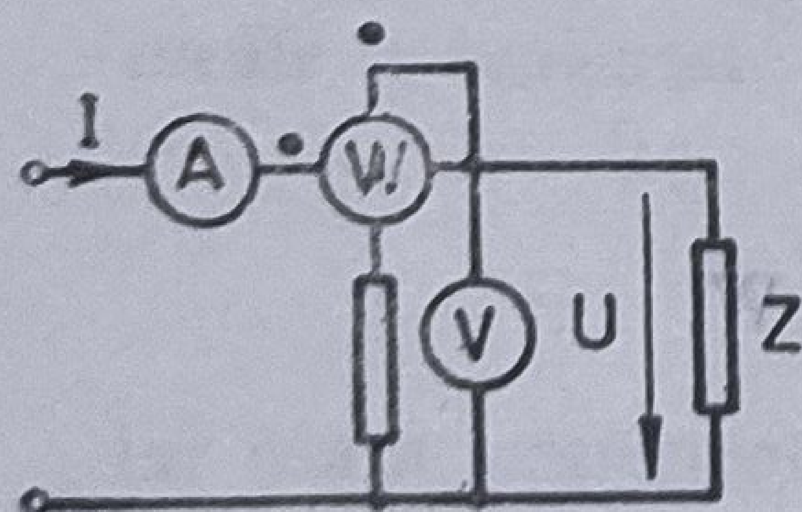


Fig. 3.4.2.

Puterea activă absorbită de consumator este :

$$P = \frac{P_w}{a_{maxw}}\cdot a_w - \frac{\left(\frac{U_v}{a_{maxv}}\cdot a_v\right)^2}{R_e} =$$

$$= \frac{750}{150}\cdot 78 - \frac{\left(\frac{150}{150}\cdot 107\right)^2}{1\,875} = 383{,}89\ \text{W}.$$

Impedanța echivalentă a consumatorului, a circuitului de tensiune al wattmetrului și a rezistenței interioare a voltmetrului legate în paralel este :

$$Z_e = \frac{\frac{U_v}{a_{maxv}}\cdot a_v}{\frac{I_a}{a_{maxa}}\cdot a_a} = \frac{\frac{150}{150}\cdot 107}{\frac{6}{60}\cdot 45{,}5} = 23{,}5\ \Omega,$$

iar impedanța consumatorului

$$Z = \frac{R_e Z_e}{\sqrt{R_e^2 + Z_e^2 - \frac{2 R_e P_w a_w}{a_{maxw}} \left(\frac{a_{maxa}}{I_a a_a}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1\,875 \cdot 23{,}5}{\sqrt{1\,875^2 + 23{,}5^2 - \frac{2 \cdot 1\,875 \cdot 750 \cdot 78}{150} \left(\frac{60}{6 \cdot 45{,}5}\right)^2}} = 23{,}7\ \Omega.$$

Factorul de putere al consumatorului fiind

$$\cos\varphi = PZ \left(\frac{a_{maxv}}{U_v a_v}\right)^2 = 383{,}89 \cdot 23{,}7 \left(\frac{150}{150 \cdot 107}\right)^2 = 0{,}79,$$

rezultă rezistența sa

$$R = Z \cos\varphi = 23{,}7 \cdot 0{,}79 = 18{,}7\ \Omega.$$

Eroarea relativă procentuală limită corespunzătoare wattmetrului este:

$$E_{r\lim w} = (\pm 0{,}5) \cdot \frac{a_{maxw}}{a_w} = (\pm 0{,}5) \cdot \frac{150}{78} = \pm 0{,}962\%.$$

Voltmetrul măsoară tensiunea cu eroarea relativă procentuală limită:

$$E_{r\lim v} = (\pm 0{,}5) \cdot \frac{a_{maxv}}{a_v} = (\pm 0{,}5) \cdot \frac{150}{107} = \pm 0{,}7\%.$$

Eroarea relativă procentuală limită de măsurare a puterii active este:

$$E_{r\lim P} = E_{r\lim w}\left(1 + \frac{Z^2}{RR_{wv}} + \frac{Z^2}{RR_v}\right) + 2E_{r\lim v}\frac{Z^2}{R}\left(\frac{1}{R_{wv}} + \frac{1}{R_v}\right) +$$

$$+ E_{r\lim}\frac{Z^2}{RR_{wv}} + E_{r\lim}\frac{Z^2}{RR_v} = (\pm 0{,}962)\left(1 + \frac{23{,}7^2}{18{,}7 \cdot 5\,000} + \frac{23{,}7^2}{18{,}7 \cdot 3\,000}\right) +$$

$$+ 2(\pm 0{,}7)\frac{23{,}7^2}{18{,}7}\left(\frac{1}{5\,000} + \frac{1}{3\,000}\right) + (\pm 1)\frac{23{,}7^2}{18{,}7 \cdot 5\,000} +$$

$$+ (\pm 1)\frac{23{,}7^2}{18{,}7 \cdot 3\,000} = \pm 1\%.$$

Ea se datorește în special erorii corespunzătoare wattmetrului.

Datorită consumului circuitului de tensiune al wattmetrului și voltmetrului apare eroarea relativă procentuală sistematică:

$$E_{rs} = \frac{100\,Z^2}{R}\left(\frac{1}{R_{wv}} + \frac{1}{R_v}\right) = \frac{100 \cdot 23{,}7^2}{18{,}7}\left(\frac{1}{5\,000} + \frac{1}{3\,000}\right) = 1{,}6\%.$$

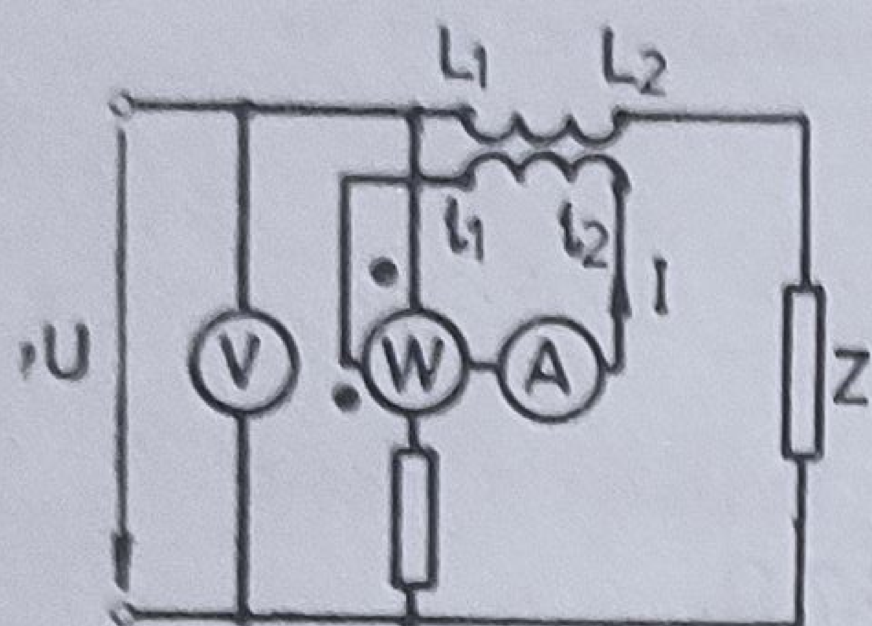


Fig. 3.4.3.

Problema 3.4.3. La măsurarea puterii active într-un circuit de c. a. monofazat se folosește schema din fig. 3.4.3. Wattmetrul are tensiunea nominală $U_n = 150$ V, curentul nominal $I_n = 1$ A, intervalul de măsurare $P_n = 75$ W, scara $a_{max} = 150$ diviziuni, clasa de precizie 0,5 și consumul bobinei de curent 2,2 VA, iar transformatorul de curent are curentul primar nominal $I_{1n} = 15$ A, curentul secundar nominal $I_{2n} = 1$ A, clasa de precizie 0,5 și impedanța secundară nominală $Z_{2n} = 5\ \Omega$.

1. Știind că consumul ampermetrului este 1,5 VA, să se verifice dacă secundarul transformatorului de curent nu este supraîncărcat.

2. Cunoscînd că wattmetrul indică $a_w = 87{,}5$ diviziuni, voltmetrul măsoară $U = 115$ V, ampermetrul măsoară $I = 0{,}94$ A, iar eroarea relativă procentuală sistematică introdusă de consumul aparatelor de măsură este neglijabilă, să se determine puterea activă preluată de consumator și eroarea ei relativă procentuală limită de măsurare.

Soluție. 1. Puterea aparentă secundară nominală a transformatorului de curent este :

$$S_{2n} = I_{2n}^2 Z_{2n} = 1^2 \cdot 5 = 5\text{VA}.$$

Secundarul transformatorului de curent nu este supraîncărcat deoarece

$$2{,}2 + 1{,}5 = 3{,}7\ \text{VA} < S_{2n} = 5\ \text{VA}.$$

2. Puterea activă este :

$$P = \frac{I_{1n}}{I_{2n}} \cdot \frac{P_n}{a_{max}} \cdot a_w = \frac{15}{1} \cdot \frac{75}{150} \cdot 87{,}5 = 656{,}25\ \text{W}.$$

Eroarea relativă procentuală limită corespunzătoare wattmetrului este :

$$E_{rlimw} = (\pm 0{,}5) \cdot \frac{a_{max}}{a_w} = (\pm 0{,}5) \cdot \frac{150}{87{,}5} = \pm 0{,}86\,\%.$$

Conform standardelor eroarea de măsurare corespunzătoare transformatorului de curent depinde de raportul dintre curentul, care trece prin transformator, și curentul său nominal. În cazul de față $I/I_{2n} = 0{,}94/1 = 0{,}94$, deci eroarea relativă procentuală limită de curent este $E_{rlimTC} = \pm 0{,}52\,\%$, iar eroarea limită de unghi $\beta_{TC} = \pm 9 \cdot 10^{-3}$ rad.

Defazajul dintre tensiunea aplicată bobinei de tensiune a wattmetrului și curentul care trece prin bobina lui de curent este :

$$\varphi_w = \arccos\left(\frac{\frac{P_n}{a_{max}} \cdot a_w}{U \cdot I}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{75}{150} \cdot 87{,}5}{115 \cdot 0{,}94}\right) = \pm 1{,}153\ \text{rad}.$$

Eroarea relativă limită de măsurare a puterii active este prin urmare :

$$E_{rlimP} = E_{rlimw} + E_{rlimTC} + 100\beta_{TC}\,\text{tg}\varphi_w =$$

$$= (\pm 0{,}86) + (\pm 0{,}52) + 100 \cdot (\pm 9 \cdot 10^{-3}) \cdot (\pm 2{,}251) = \pm 3{,}41\,\%.$$

Problema 3.4.4. Într-o instalaţie de c. a. monofazat se măsoară puterea activă cu schema din fig. 3.4.4. Wattmetrul are tensiunea nominală $U_n = 100$ V, curentul nominal $I_n = 5$ A, intervalul de măsurare $P_n = 450$ W, scara $\alpha_{max} = 45$ diviziuni şi clasa de precizie 1,5, iar transformatoarele de măsură au caracteristicile redate în tabelul 3.4.1.

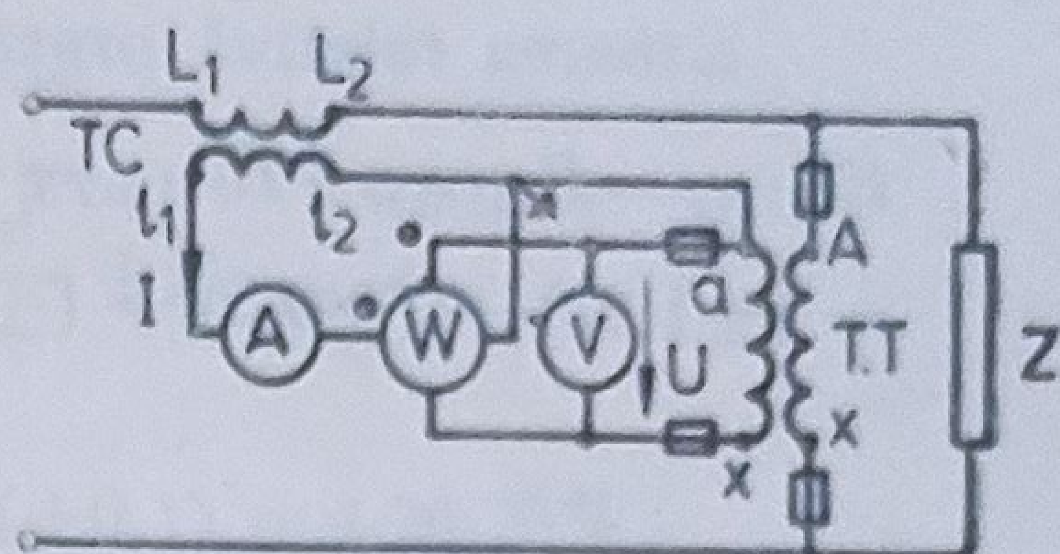


Fig. 3.4.4.

1. Ştiind că wattmetrul indică $\alpha_w = 37$ diviziuni, voltmetrul măsoară $U = 105$ V, ampermetrul măsoară $I = 3{,}81$ A, iar consumul aparatelor de măsură este neglijabil, să se determine puterea activă şi eroarea ei relativă procentuală limită de determinare.

Tabelul 3.4.1

Transformatorul de măsură	Mărime primară nominală	Mărime secundară nominală	Clasa de precizie
de tensiune	25 kV	100 V	0,5
de curent	500 A	5 A	0,5

Soluţie. 1. Indicaţiei wattmetrului îi corespunde puterea:

$$P = \frac{25 \cdot 10^3}{100} \cdot \frac{500}{5} \cdot \frac{P_n}{\alpha_{max}} \cdot \alpha_w = 250 \cdot 100 \cdot \frac{450}{45} \cdot 37 = 9{,}25 \cdot 10^6 \text{W} = 9{,}25 \text{ MW}.$$

Eroarea relativă procentuală limită corespunzătoare wattmetrului este:

$$E_{r\lim w} = (\pm 1{,}5) \frac{\alpha_{max}}{\alpha_w} = (\pm 1{,}5) \cdot \frac{45}{37} = \pm 1{,}82\%.$$

Conform standardelor erorile de măsurare ale transformatoarelor de măsură depind de valoarea relativă a măsurandului (tensiune sau curent) aplicat transformatorului faţă de valoarea nominală a măsurandului respectiv (tensiune nominală sau curent nominal). Aceste valori relative sînt $105/100 = 1{,}05$ în cazul transformatorului de tensiune şi $3{,}81/5 = 0{,}762$ în cazul celui de curent. Eroarea relativă procentuală limită de tensiune introdusă de transformatorul de tensiune este $E_{r\lim TT} = \pm 0{,}5\%$, iar eroarea limită de unghi $\beta_{TT} = \pm 5{,}8 \cdot 10^{-3}$ rad. Eroarea relativă procentuală limită de curent introdusă de transformatorul de curent este $E_{r\lim TC} = \pm 0{,}575\%$, iar eroarea limită de unghi $\beta_{TC} = \pm 9{,}57 \cdot 10^{-3}$ rad.

Defazajul dintre tensiunea aplicată bobinei de tensiune a wattmetrului şi curentul care trece prin bobina lui de curent este:

$$\varphi_w = \arccos\left(\frac{\frac{P_n}{\alpha_{max}} \alpha_w}{UI}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{450}{45} \cdot 37}{105 \cdot 3{,}81}\right) = \pm 0{,}39 \text{ rad}.$$

Eroarea relativă procentuală limită de măsurare a puterii este:

$$E_{r\,lim\,P}=E_{r\,lim\,w}+E_{r\,lim\,TT}+E_{r\,lim\,TC}+100\,(\beta_{TT}+\beta_{TC})\,\mathrm{tg}\,\varphi_w=$$
$$=(\pm1{,}82)+(\pm0{,}5)+(\pm0{,}575)+100\,[(\pm5{,}6\cdot10^{-3})+(\pm9{,}57\cdot10^{-3})]\cdot$$
$$\cdot\mathrm{tg}\,(\pm0{,}39)=\pm3{,}53\%.$$

La această măsurare tensiunea nominală a wattmetrului este depășită cu 5%, fapt admisibil pentru un timp limitat.

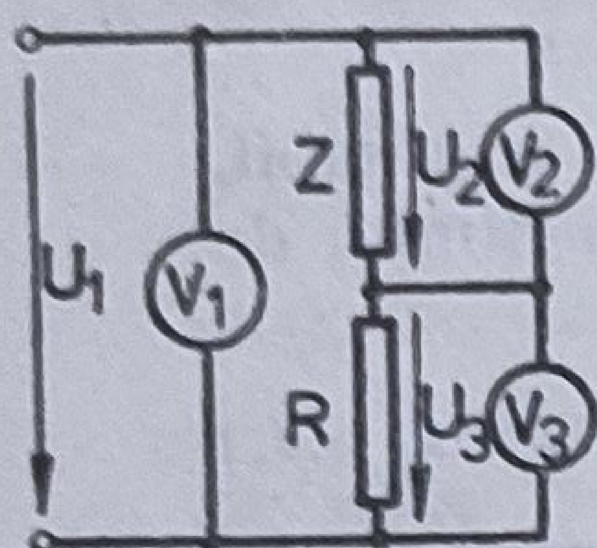


Fig. 3.4.5.

Problema 3.4.5. Puterea activă P preluată de impedanța Z este măsurată cu schema din fig. 3.4.5. Datele voltmetrelor sînt redate în tabelul 3.4.2, iar rezistența $R=500\ \Omega$ se cunoaște cu eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,lim\,R}=\pm0{,}1\%$. Știind că consumul voltmetrelor este neglijabil, să se determine puterea activă P și eroarea sa relativă procentuală limită $E_{r\,lim\,P}$ de determinare.

Tabelul 3.4.2

Voltmetrul	Intervalul de măsurare [V]	Scara [div]	Indicația [div]	Clasa de precizie
V_1	300	150	102	1,5
V_2	150	150	117	2,5
V_3	150	150	125	1,5

Soluție. Voltmetrele V_1, V_2 și V_3 măsoară tensiunile:

$$U_1=\frac{300}{150}\cdot102=204\ \mathrm{V}$$

$$U_2=\frac{150}{150}\cdot117=117\ \mathrm{V}$$

$$U_3=\frac{150}{150}\cdot125=125\ \mathrm{V},$$

cu erorile relative procentuale limită

$$E_{r\,lim\,1}=(\pm1{,}5)\cdot\frac{150}{102}=\pm\,2{,}21\%$$

$$E_{r\,lim\,2}=(\pm\,2{,}5)\cdot\frac{150}{117}=\pm\,3{,}21\%$$

$$E_{r\,lim\,3}=(\pm\,1{,}5)\cdot\frac{150}{125}=\pm\,1{,}8\,\%.$$

Puterea activă preluată de impedanța Z este:

$$P=\frac{U_1^2-U_2^2-U_3^2}{2R}=\frac{204^2-117^2-125^2}{2\,500}=17{,}54\ \mathrm{W},$$

fiind măsurată cu eroarea relativă procentuală limită

$$E_{r\,lim\,P}=\frac{2\,(U_1^2\,E_{r\,lim1}+U_2^2\,E_{r\,lim2}+U_3^2\,E_{r\,lim3})}{U_1^2-U_2^2-U_3^2}+E_{r\,lim\,R}=$$

$$=\frac{2\,[204^2\cdot(\pm 2{,}21)+117^2\,(\pm 3{,}21)+125^2\,(\pm 1{,}8)]}{204^2-117^2-125^2}+(\pm 0{,}1)=\pm 26{,}25\%.$$

Problema 3.4.6. Cu ajutorul schemei din fig. 3.4.6 se măsoară puterea activă P absorbită de impedanţa Z. Ampermetrele, avînd intervalul de măsurare $I_n=0{,}15$ A şi clasa de precizie 0,5, măsoară curenţii $I_1=0{,}15$ A, $I_2=0{,}087$ A şi $I_3=0{,}111$ A, iar rezistenţa $R=200\ \Omega$ se cunoaşte cu eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,lim\,R}=\pm 1\%$. Ştiind că consumul ampermetrelor este neglijabil, să se determine puterea P şi eroarea sa relativă procentuală limită de determinare.

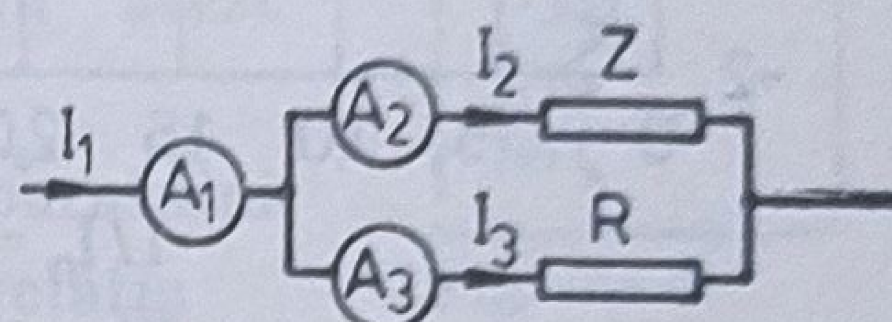


Fig. 3.4.6.

Soluţie. Puterea activă absorbită de impedanţa Z este:

$$P=\frac{R\,(I_1^2-I_2^2-I_3^2)}{2}=\frac{200\,(0{,}15^2-0{,}087^2-0{,}111^2)}{2}=0{,}26\ \text{W}.$$

Erorile relative procentuale limită de măsurare ale curenţilor I_1, I_2 şi I_3 fiind:

$$E_{r\,lim1}=(\pm 0{,}5)\cdot\frac{0{,}15}{0{,}15}=\pm 0{,}5\%,$$

$$E_{r\,lim2}=(\pm 0{,}5)\cdot\frac{0{,}15}{0{,}087}=\pm 0{,}862\%,$$

$$E_{r\,lim3}=(\pm 0{,}5)\cdot\frac{0{,}15}{0{,}111}=\pm 0{,}676\%,$$

eroarea relativă procentuală limită de determinare a puterii active P este

$$E_{r\,lim\,P}=\frac{2\,(I_1^2\,E_{r\,lim1}+I_2^2\,E_{r\,lim\,2}+I_3^2\,E_{r\,lim3})}{I_1^2-I_2^2-I_3^2}+E_{r\,lim\,R}=$$

$$=\frac{2\,[0{,}15^2\cdot(\pm 0{,}5)-0{,}087^2\cdot(\pm 0{,}862)+0{,}111^2\,(\pm 0{,}676)]}{0{,}15^2-0{,}087^2-0{,}111^2}+(\pm 1)=\pm 21\%.$$

Problema 3.4.7. Cu un contor de inducţie, avînd raportul de transmisie $K=600$ rot/kWh se măsoară energia activă preluată de un consumator de c.a. monofazat prin care trece curentul $I=14{,}4$ A la tensiunea $U=220$ V şi factorul de putere $\cos\varphi=0{,}9$. Ştiind că puterea absorbită de consumator este constantă timp îndelungat, să se determine viteza unghiulară a echipajului mobil al contorului.

Soluţie. $\omega=\frac{2\pi KUI\cos\varphi}{3{,}6\cdot 10^6}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 600\cdot 220\cdot 14{,}4\cdot 0{,}9}{3{,}6\cdot 10^6}=2{,}98$ rad/s.

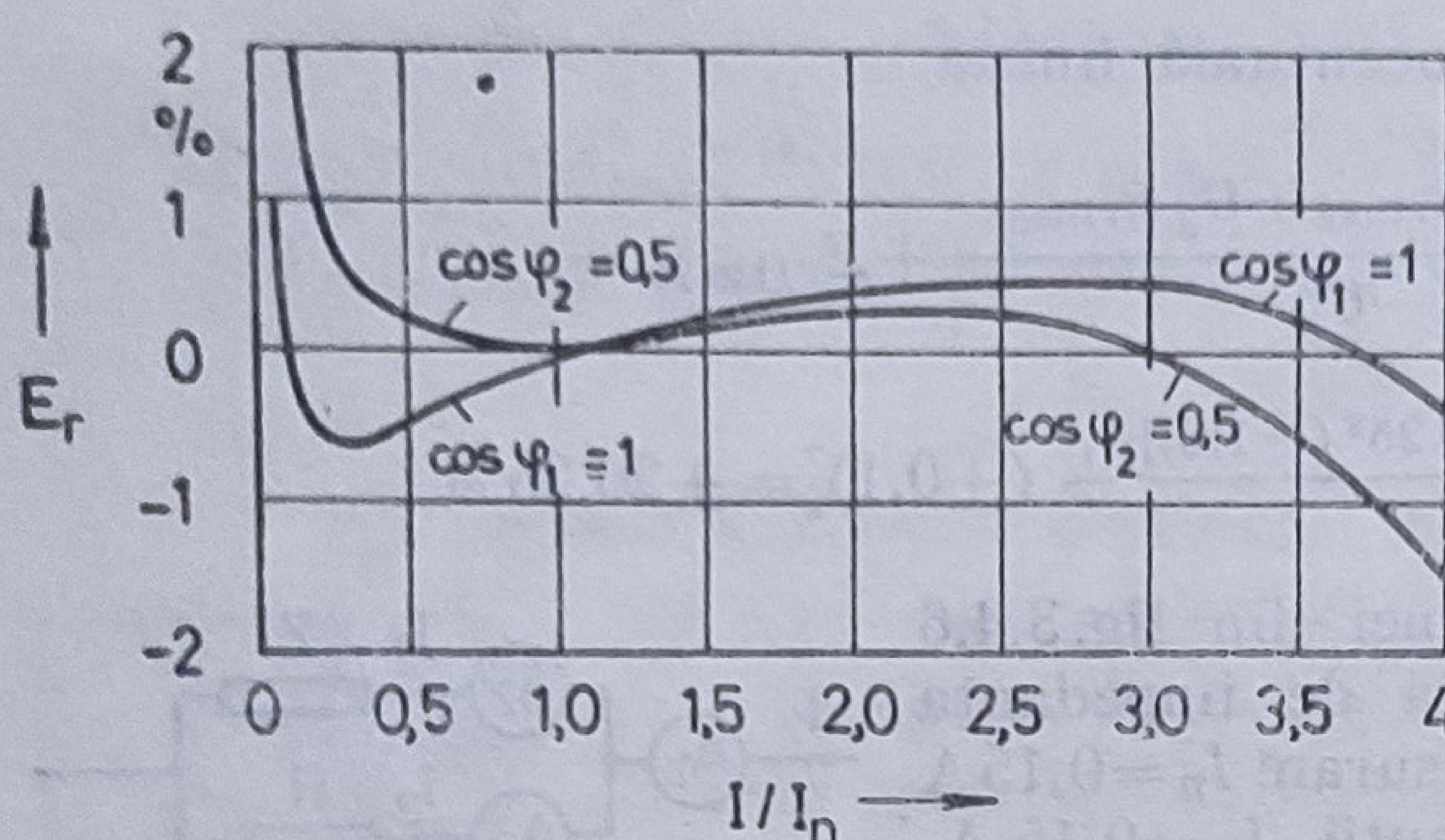


Fig. 3.4.7.

Problema 3.4.8. Dependența erorii relative procentuale E_r corespunzătoare unui contor de energie activă de inducție pentru c. a. monofazat, funcționînd la tensiunea nominală U_n și factorul de putere $\cos\varphi_1=1$ respectiv $\cos\varphi_2=0{,}5$, față de valoarea relativă I/I_n a curentului de sarcină s-a redat în fig. 3.4.7. Cu acest contor s-au măsurat energiile active W_k $(k=1, 2, \ldots, 5)$ consumate în condițiile arătate în tabelul 3.4.3. Să se determine energia totală W_t indicată de contor și eroarea relativă procentuală E_{rt} a indicației contorului.

Tabelul 3.4.3

k	Energia [kWh]	Tensiunea	Curentul	Fact. de put.
1	15,2	U_n	2,5 I_n	1
2	27,8	U_n	0,3 I_n	0,5
3	11,3	U_n	3,4 I_n	0,5
4	30,6	U_n	0,5 I_n	1
5	24,9	U_n	1,8 I_n	1

Soluție. Din fig. 3.4.7 rezultă erorile relative procentuale $E_{r1}=0{,}5\%$, $E_{r2}=0{,}59\%$, $E_{r3}=-0{,}39\%$, $E_{r4}=-0{,}46\%$ și $E_{r5}=0{,}36\%$ cu care se măsoară energiile $W_1, W_2, \ldots, W_5$. Energia totală indicată de contor este:

$$W_t=\sum_{k=1}^{5} W_k\left(1+\frac{E_{rk}}{100}\right)=15{,}2\left(1+\frac{0{,}5}{100}\right)+27{,}8\left(1+\frac{0{,}59}{100}\right)+$$

$$+11{,}3\left(1-\frac{0{,}39}{100}\right)+30{,}6\left(1-\frac{0{,}46}{100}\right)+24{,}9\left(1+\frac{0{,}36}{100}\right)=109{,}94\ \text{kWh},$$

eroarea relativă procentuală a indicației contorului fiind

$$E_{rt}=\frac{100\left(W_t-\sum\limits_{k=1}^{5} W_k\right)}{\sum\limits_{k=1}^{5} W_k}=\frac{100\,(109{,}94-109{,}8)}{109{,}8}=0{,}13\%\,.$$

Această eroare este scăzută deoarece erorile indicațiilor parțiale fiind de semne contrare, se compensează reciproc aproape complet.

Problema 3.4.9. Cu ajutorul unui wattmetru electrodinamic, avînd tensiunea nominală $U_n=30$ V, curentul nominal $I_n=5$ A, factorul de putere nomi-

nal $\cos \varphi_n = 1$, scara $\alpha_{max} = 150$ diviziuni și rezistența bobinei de tensiune $R_B = 1\,000\ \Omega$, se realizează schema de măsurare a puterii reactive într-un circuit de c.a. monofazat cu frecvența $f=50$ Hz (fig. 3.4.8). Știind că rezistența $R_3 = 23\ \Omega$, iar inductivitățile $L_1 = 5$ H și $L_3 = 1$ H, să se determine astfel rezistențele R_1 și R_2, încît tensiunea nominală a schemei de măsurare a puterii reactive să fie $U_r=150$ V. Cît este în acest caz constanta C a aparatului?

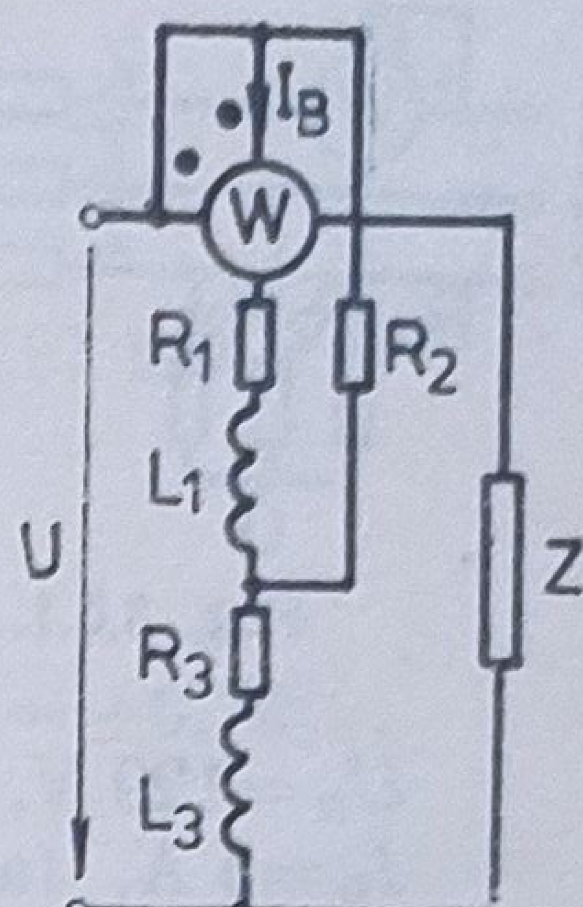


Fig. 3.4.8.

Soluție. Între curentul I_B prin bobina mobilă a aparatului și tensiunea U aplicată circuitului de tensiune există relația

$$I_B = \frac{R_2 U}{R_1R_2 + R_1R_3 + (R_B + R_3)R_2 + R_BR_3 - (2\pi f)^2L_1L_3 + j\cdot 2\pi f[L_3R_1 + (L_1+L_3)R_2 + L_3R_B + L_1R_3]}.$$

Dacă curentul I_B este defazat în urma tensiunii U cu $\pi/2$ rad, atunci aparatul măsoară puterea reactivă. Prin urmare este necesar ca:

$$R_1R_2 + R_1R_3 + (R_B + R_3)\,R_2 + R_BR_3 - (2\pi f)^2\,L_1L_3 = 0.$$

Totodată la tensiunea nominală U_r a schemei de măsurare a puterii reactive este necesar ca curentul prin bobina mobilă a aparatului să aibă valoarea nominală:

$$I_{Bn} = \frac{U_n}{R_B} = \frac{R_2U_r}{2\pi\, f\,[L_3R_1 + (L_1+L_3)\,R_2 + L_3R_B + L_1R_3]}.$$

După înlocuirea valorilor numerice se obține sistemul de ecuații:

$$R_1R_2 + 23\,R_1 + (1\,000+23)\,R_2 + 1\,000\cdot 23 - (2\cdot 3{,}14\cdot 50)^2\cdot 5\cdot 1 = 0,$$

$$\frac{150\,R_2}{2\cdot 3{,}14\cdot 50[R_1 + (5+1)R_2 + 1\cdot 1000 + 5\cdot 23]} = \frac{30}{1\,000},$$

avînd soluțiile $R_1 = 1\,035{,}7\ \Omega$ și $R_2 = 216{,}7\ \Omega$.

În acest caz constanta aparatului este:

$$C = \frac{U_r\,I_n\cos\varphi_n}{\alpha_{max}} = \frac{150\cdot 5\cdot 1}{150} = 5\ \text{VAr/div.}$$

3.5. MĂSURAREA PUTERII ȘI ENERGIEI ÎN CIRCUITE DE C.A. TRIFAZAT

În circuite de c. a. trifazat puterea activă sau reactivă se măsoară cu wattmetre sau varmetre legate în diferite feluri. Erorile relative procentuale limită ale rezultatelor măsurării puterii se stabilesc pe baza relațiilor (1.5 – 1.7)

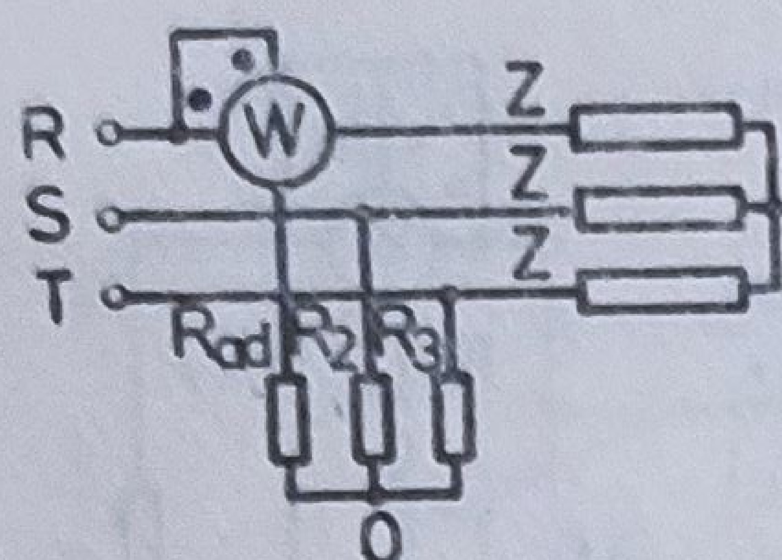


Fig. 3.5.1.

În mod similar energia se măsoară cu contoare de inducție legate în scheme corespunzătoare. Erorile relative procentuale limită ale rezultatelor măsurării energiei se determină folosind relațiile (1.3, 1.6 și 1.7).

Problema 3.5.1. Puterea activă absorbită de un consumator de c.a. trifazat simetric cu neutrul inaccesibil se măsoară cu un wattmetru cu neutru artificial (fig. 3.5.1). Wattmetrul electrodinamic folosit are tensiunea nominală $U_n=120$ V, rezistența bobinei de tensiune $R_B=12\,000\ \Omega$, curentul nominal $I_n=5$ A, factorul de putere nominal $\cos\varphi_n=1$, scara $a_{max}=120$ diviziuni, clasa de precizie 0,5 și consumul bobinei de curent neglijabil. Valoarea nominală a tensiunii de linie fiind 380 V, se modifică prin intermediul unui rezistor adițional tensiunea nominală a wattmetrului la $U_l=240$ V.

1. Să se determine rezistența R_{ad} a rezistorului adițional precum și rezistențele R_2 și R_3 necesare obținerii punctului neutru artificial O.

2. Știind că cu rezistențele determinate la punctul 1 wattmetrul indică $a=83{,}4$ diviziuni, să se calculeze puterea activă P consumată și eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,\text{lim}P}$ de măsurare a ei.

Soluție. 1. $R_{ad}=\left(\frac{U_l}{U_n}-1\right)\cdot R_B=\left(\frac{240}{120}-1\right)\cdot 12\,000=12\,000\ \Omega,$

$$R_2=R_3=R_B+R_{ad}=12\,000+12\,000=24\,000\ \Omega.$$

$$2.\ P=3\,\frac{U_l\,I_n\cos\varphi_n}{a_{max}}\,a=3\cdot\frac{240\cdot 5\cdot 1}{120}\cdot 83{,}4=2\,502\ \text{W}=2{,}502\ \text{kW}.$$

$$E_{r\,\text{lim}P}=(\pm 0{,}5)\,\frac{a_{max}}{a}=(\pm 0{,}5)\cdot\frac{120}{83{,}4}=\pm 0{,}72\ \%.$$

Problema 3.5.2. Folosind două wattmetre se măsoară puterea preluată de un consumator de c.a. trifazat simetric (fig. 3.5.2). Cele două wattmetre electrodinamice utilizate sînt identice, avînd tensiunea nominală $U_n=150$ V, rezistența bobinei de tensiune $R_B=5\,000\ \Omega$, curentul nominal $I_n=5$ A, factorul de putere nominal $\cos\varphi_n=1$, scara $a_{max}=150$ diviziuni, clasa de precizie 0,5 și consumul bobinei de curent neglijabil.

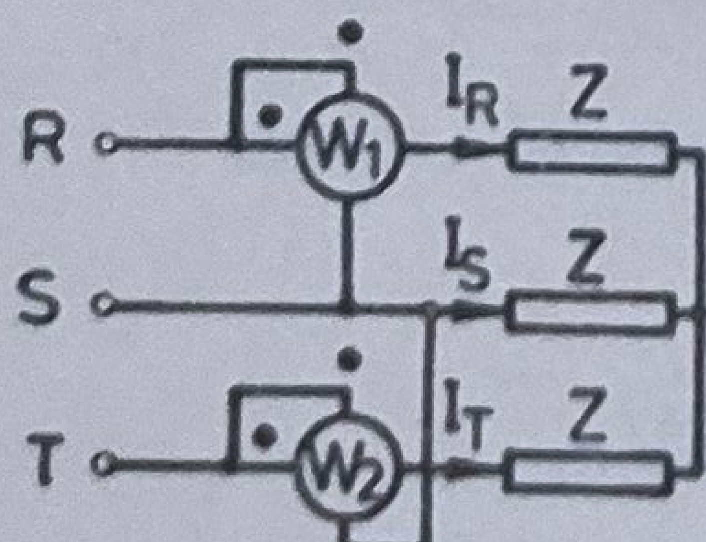


Fig. 3.5.2.

1. Să se calculeze rezistența R_{ad} a rezistoarelor adiționale necesare modificării tensiunii nominale a wattmetrelor la valoarea $U_l=450$ V.

2. Știind că wattmetrele cu rezistoarele adiționale calculate la punctul 1 indică $a_1=125$ diviziuni și $a_2=72$ diviziuni iar succesiunea fazelor este corectă, să se determine puterea activă P și cea reactivă Q preluate de consumator, precum și erorile relative limită $E_{r\,\text{lim}P}$ și $E_{r\,\text{lim}Q}$ de măsurare a lor.

Soluţie. 1. $R_{ad} = \left(\frac{U_l}{U_n} - 1\right) \cdot R_B = \left(\frac{450}{150} - 1\right) \cdot 5\,000 = 10\,000\ \Omega.$

2. $P = \frac{U_l I_n \cos \varphi_n}{a_{max}} (a_1 + a_2) = \frac{450 \cdot 5 \cdot 1}{150} (125+73) = 2\,970\ \text{W} = 2{,}97\ \text{kW},$

$$E_{r\,\text{lim}\,P} = \frac{\frac{U_l I_n \cos \varphi_n}{a_{max}} a_1 \cdot (\pm 0{,}5) \cdot \frac{a_{max}}{a_1} + \frac{U_l I_n \cos \varphi_n}{a_{max}} a_2 (\pm 0{,}5) \cdot \frac{a_{max}}{a_2}}{\frac{U_l I_n \cos \varphi_n}{a_{max}} (a_1 + a_2)} = \pm 0{,}76\,\%.$$

$$Q = \frac{\sqrt{3}\, U_l I_n \cos \varphi_n}{a_{max}} (a_2 - a_1) = \frac{1{,}73 \cdot 450 \cdot 5 \cdot 1}{150} (73 - 125) = -1\,349\ \text{VAr} = 1{,}349\ \text{kVA}.$$

Consumatorul are caracter capacitiv deoarece puterea reactivă este negativă.

$$E_{r\,\text{lim}\,Q} = \frac{\frac{\sqrt{3}\, U_l I_n \cos \varphi_n}{a_{max}} a_2 \cdot (\pm 0{,}5) \cdot \frac{a_{max}}{a_2} + \frac{\sqrt{3}\, U_l I_n \cos \varphi_n}{a_{max}} \cdot a_1 (\pm 0{,}5) \frac{a_{max}}{a_1}}{\frac{\sqrt{3}\, U_l I_n \cos \varphi_n}{a_{max}} (a_2 - a_1)} = \pm 2{,}88\,\%.$$

Problema 3.5.3. Într-un circuit de c.a. trifazat simetric (vezi problema 3.5.2) faza S se întrerupe la un moment dat în mod accidental. Care sînt indicaţiile wattmetrelor W_1 şi W_2 dacă întreruperea are loc între generator şi wattmetre ? Dar dacă întreruperea are loc între wattmetre şi consumator ?

Soluţie. Fie U tensiunea de linie şi Z impedanţa consumatorului de c.a. trifazat simetric (fig. 3.5.2). Defazajul între tensiunea de fază şi curentul de fază este:

$$\varphi = \text{arctg}\left(\frac{Q}{P}\right) = \text{arctg}\left(-\frac{1\,349}{2\,970}\right) = -0{,}427\ \text{rad}.$$

Dacă circuitului de tensiune al unui wattmetru electrodinamic i se aplică tensiunea alternativă cu valoarea efectivă U_w, iar bobina sa de curent este parcursă de curentul cu valoarea efectivă I_w, atunci indicaţia wattmetrului este proporţională cu produsul :

$$U_w I_w \cos (\widehat{U_w, I_w}).$$

În tabelul 3.5.1 s-au redat valorile acestui produs, precum şi indicaţiile a corespunzătoare wattmetrelor W_1 şi W_2 în trei situaţii :

1. Nici o fază întreruptă ;
2. Întreruperea fazei S are loc între generator şi wattmetre ;
3. Întreruperea fazei S are loc între wattmetre şi consumator.

Tabelul 3.5.1

Wattmetrul	W_1			W_2		
Situația	1	2	3	1	2	3
U_w	U	$U/2$	U	U	$U/2$	U
I_w	$U/\sqrt{3}Z$	$U/2Z$	$U/2Z$	$U/\sqrt{3}Z$	$U/2Z$	$U/2Z$
$(\widehat{U_w, I_w})$ [rad]	$\pi/6+\varphi$	φ	$\pi/3+\varphi$	$\pi/6-\varphi$	φ	$\pi/3-\varphi$
$\cos(\widehat{U_w, I_w})$	0,995	0,91	0,813	0,582	0,91	0,097
$U_w I_w \cos(\widehat{U_w, I_w})$	$0{,}574\frac{U^2}{Z}$	$0{,}227\frac{U^2}{Z}$	$0{,}407\frac{U^2}{Z}$	$0{,}336\frac{U^2}{Z}$	$0{,}227\frac{U^2}{Z}$	$0{,}049\frac{U^2}{Z}$
α [div]	125	49,5	88,4	73	49,5	10,6

Aceste valori s-au calculat utilizînd în fiecare situație diagrama valorilor efective. Suma indicațiilor wattmetrelor W_1 și W_2 corespunde în toate situațiile puterii active preluate de consumator.

Problema 3.5.4. Puterea activă consumată de un consumator de c. a. trifazat este măsurată cu două wattmetre (fig. 3.5.3). Wattmetrele au următoarele caracteristici : tensiunea nominală $U_n = 450$ V, curentul nominal $I_n = 5$ A. factorul de putere nominal $\cos\varphi_n = 1$, scara $\alpha_{max} = 150$ diviziuni, clasa de precizie 1 și consumul propriu neglijabil. Știind că indicațiile wattmetrelor au fost $\alpha_1 = 111$ diviziuni și $\alpha_2 = 23$ diviziuni, să se determine puterea activă P consumată și eroarea sa relativă procentuală limită $E_{r\lim P}$ de măsurare.

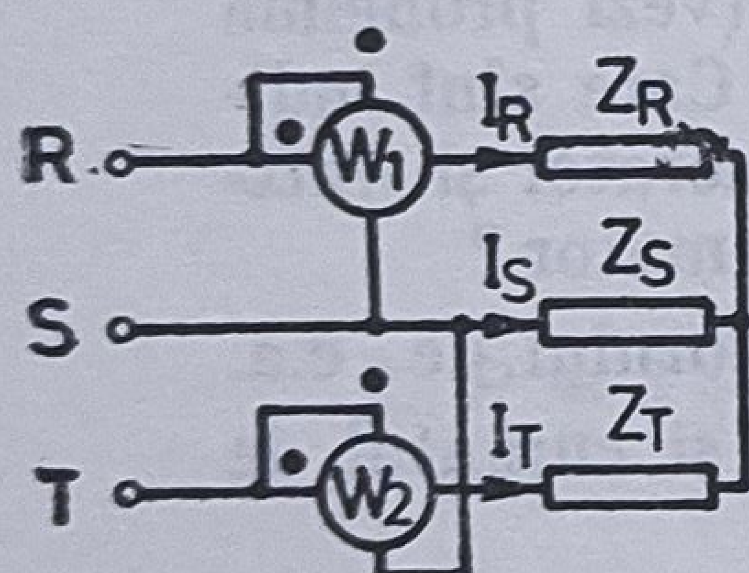


Fig. 3.5.3.

Soluție.
$$P = \frac{U_n I_n \cos\varphi_n}{\alpha_{max}}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{450 \cdot 5 \cdot 1}{150}(111+23) = 2\,010\ \text{W} = 2{,}01\ \text{kW}.$$

$$E_{r\lim P} = \frac{\frac{U_n I_n \cos\varphi_n}{\alpha_{max}}\alpha_1 \cdot (\pm 1)\cdot\frac{\alpha_{max}}{\alpha_1} + \frac{U_n I_n \cos\varphi_n}{\alpha_{max}}\alpha_2 \cdot (\pm 1)\cdot\frac{\alpha_{max}}{\alpha_2}}{\frac{U_n I_n \cos\varphi_n}{\alpha_{max}}(\alpha_1+\alpha_2)} =$$

$$= \pm\frac{2\alpha_{max}}{\alpha_1+\alpha_2} = \pm\frac{2\cdot 150}{111+23} = \pm 2{,}24\%.$$

Problema 3.5.5. Un consumator de c.a. trifazat simetric, pur rezistiv, avînd conexiunea stea cu neutrul accesibil, este alimentat la tensiunea de linie $U=380$ V, absorbind puterea activă $P=1\,650$ W. Această putere este măsurată cu două wattmetre și cu un singur wattmetru, folosindu-se wattmetre cu următoarele caracteristici : tensiunile nominale $U_{n1}=120$ V, $U_{n2}=240$ V și $U_{n3}=420$ V (fig. 3.5.4), curentul nominal $I_n=5$ A, factorul de putere nominal $\cos\varphi_n=1$, scara $\alpha_{max}=120$ diviziuni, clasa de precizie 0,5 și consumul neglijabil.

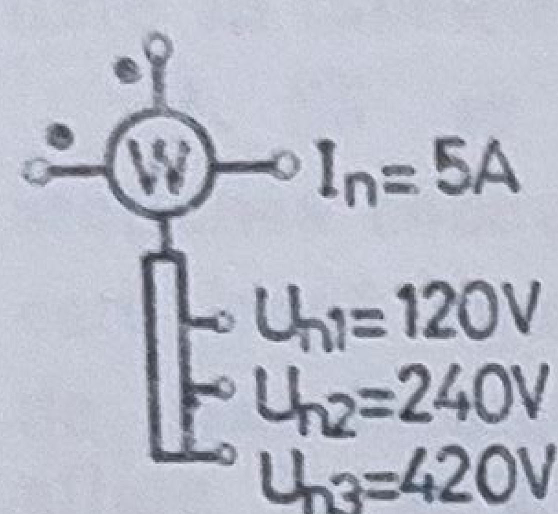
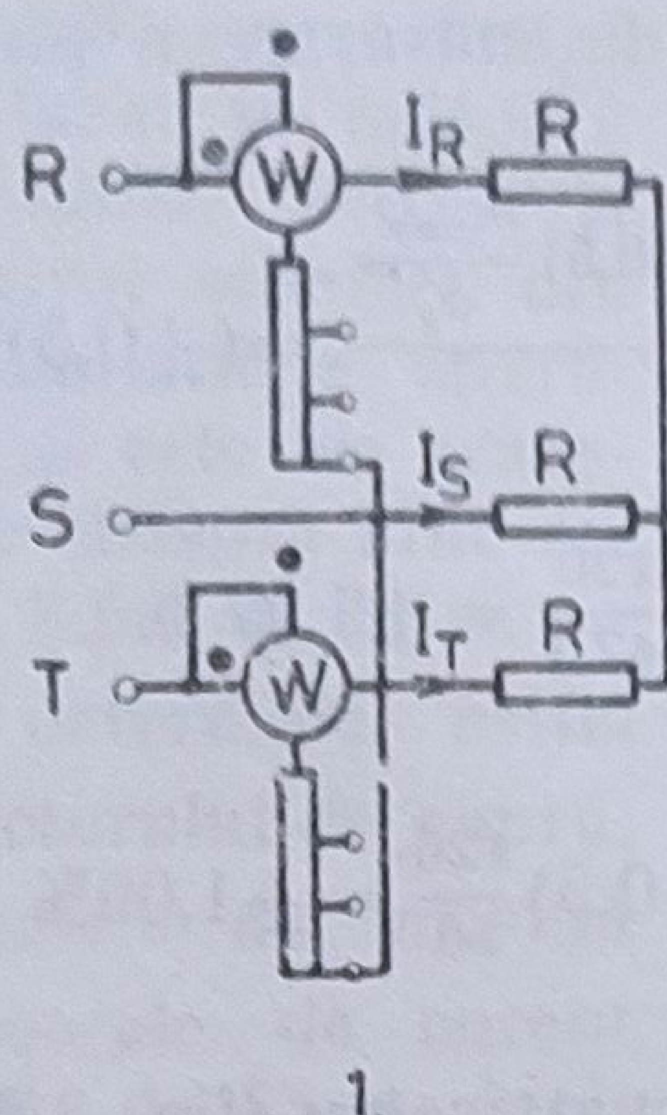


Fig. 3.5.4.



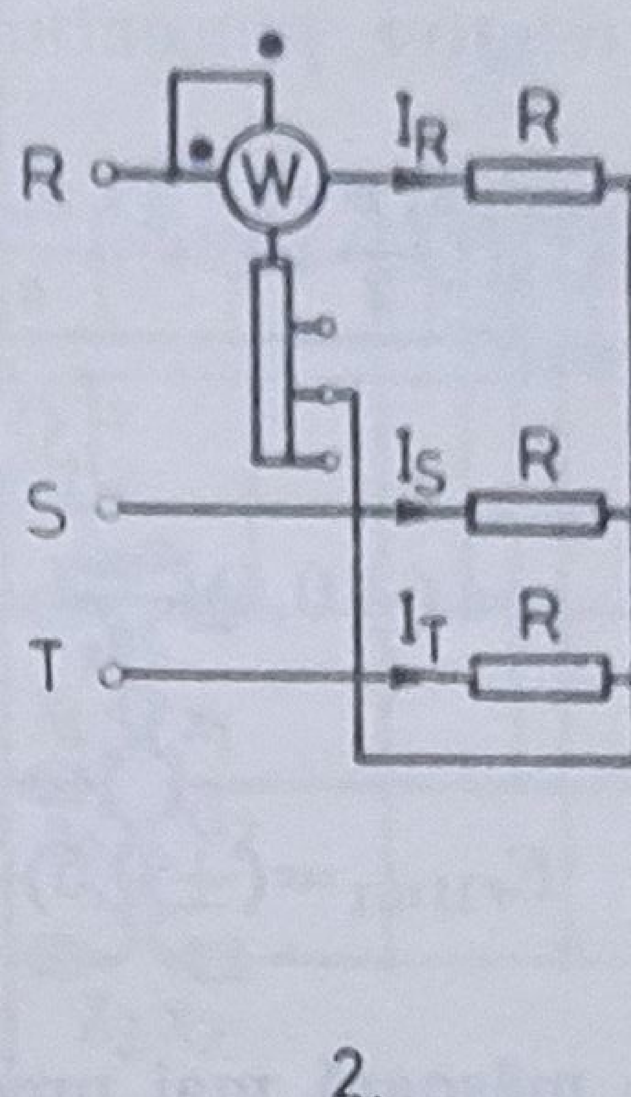


Fig. 3.5.5.

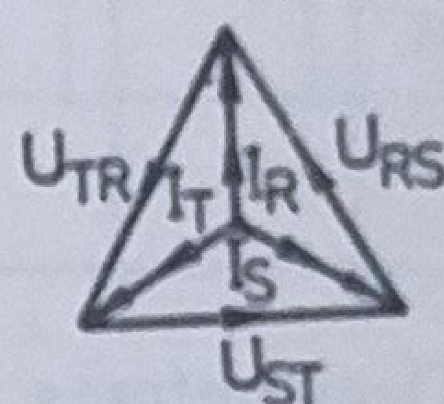


Fig. 3.5.6.

1. Să se indice schemele de legare ale wattmetrelor în cele două cazuri.

2. Cît indică wattmetrele în cele două cazuri?

3. În care în cele două cazuri măsurarea puterii are loc cu precizie mai mare?

Soluție. 1. Schemele de legare ale wattmetrelor sînt redate în fig. 3.5.5.

2. Pe baza diagramelor valorilor efective ale tensiunilor și curenților (fig. 3.5.6) rezultă că cele două wattmetre din fig. 3.5.5.1 indică la fel întrucît

$$U_{RS} I_R \cos(\widehat{U_{RS},\ I_R}) = U_{TS} I_T \cos(\widehat{U_{TS},\ I_T}).$$

Puterii măsurate de un wattmetru

$$\frac{P}{2} = \frac{1\,650}{2} = 825 \text{ W},$$

îi corespunde indicația

$$a_2 = \frac{P}{\frac{2 U_{n3} I_n \cos\varphi_n}{a_{max}}} = \frac{1\,650}{\frac{2 \cdot 420 \cdot 5 \cdot 1}{120}} = 47{,}1 \text{ div.}$$

Dacă puterea se măsoară cu un singur wattmetru (fig. 3.5.5.2), atunci indicația lui corespunde puterii:

$$\frac{P}{3} = \frac{1\,650}{3} = 550 \text{W}.$$

Prin urmare:

$$a_1 = \frac{P}{\frac{3\ U_{n2} \cdot I_n \cos\varphi_n}{a_{max}}} = \frac{1\,650}{\frac{3 \cdot 240 \cdot 5 \cdot 1}{120}} = 55 \text{ div.}$$

3. Erorile relative procentuale limită de măsurare a puterii sînt :

$$E_{rlim2}=\frac{\frac{P}{2}(\pm 0{,}5)\frac{a_{max}}{a_2}+\frac{P}{2}(\pm 0{,}5)\frac{a_{max}}{a_2}}{P}=(\pm 0{,}5)\frac{a_{max}}{a_2}=$$

$$=(\pm 0{,}5)\frac{a_{max}}{a_2}=(\pm 0{,}5)\cdot\frac{120}{47{,}1}=\pm 1{,}27\ \%$$

și

$$E_{rlim1}=(\pm 0{,}5)\frac{a_{max}}{a_1}=(\pm 0{,}5)\frac{120}{55}=\pm 1{,}09\%.$$

Deci puterea se măsoară mai precis cu un wattmetru (fig. 3.5.5.2).

Problema 3.5.6. Cu un wattmetru trifazat, avînd două dispozitive de măsură ale căror cupluri active se însumează mecanic, se măsoară puterea într-un circuit de c.a. trifazat simetric. La ce factor de putere al consumatorului indicația wattmetrului este maximă ? Cît este în acest caz puterea indicată de wattmetru față de puterea aparentă a consumatorului ?

Soluție. Fie U tensiunea de linie, I curentul de fază și $\cos\varphi$ factorul de putere ale consumatorului. Indicația wattmetrului este proporțională cu produsul

$$UI\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)\right].$$

Acest produs are valoarea maximă la $\cos\varphi=1$, puterea indicată de wattmetru fiind egală cu puterea aparentă $\sqrt{3}\ UI$ a consumatorului.

Problema 3.5.7. Un wattmetru pentru măsurarea puterii în circuite de c. a. trifazat are două dispozitive de măsură ferodinamice ale căror echipaje mobile se află pe același ax, asigurînd astfel însumarea mecanică a celor două cupluri active. Să se determine clasa de precizie a wattmetrului, știind că fiecare dintre dispozitivele de măsură are clasa de precizie C.

Soluție. Acționînd independent, dispozitivele de măsură produc prin intermediul cuplurilor lor active indicațiile a_1 și a_2. În urma acțiunii simultane a dispozitivelor de măsură se obține indicația :

$$a=a_1+a_2,$$

căreia îi corespunde eroarea relativă procentuală limită

$$E_{rlim}=\frac{a_1(+C)\frac{a_{max}}{a_1}+a_2(\pm C)\frac{a_{max}}{a_2}}{a_1+a_2}=(\pm C)\frac{a_{max}}{a},$$

unde a_{max} este indicația aferentă întregii scări a wattmetrului. Comparînd ultima expresie cu relația (1.5) se constată că wattmetrul trifazat are clasa de precizie C.

Problema 3.5.8. Într-o instalație de c.a. trifazat se măsoară puterile și energiile, activă și reactivă cu ajutorul schemei din fig. 3.5.7. Caracteristicile aparatelor de măsură și cele ale transformatoarelor de măsură sînt redate în tabelele 3.5.2 și 3.5.3.

1. Să se determine astfel secțiunea conductorului de cupru, care leagă aparatele de măsură de transformatoarele de curent aflate la distanța de 83 m, încît puterea secundară nominală a transformatoarelor să nu fie depășită.

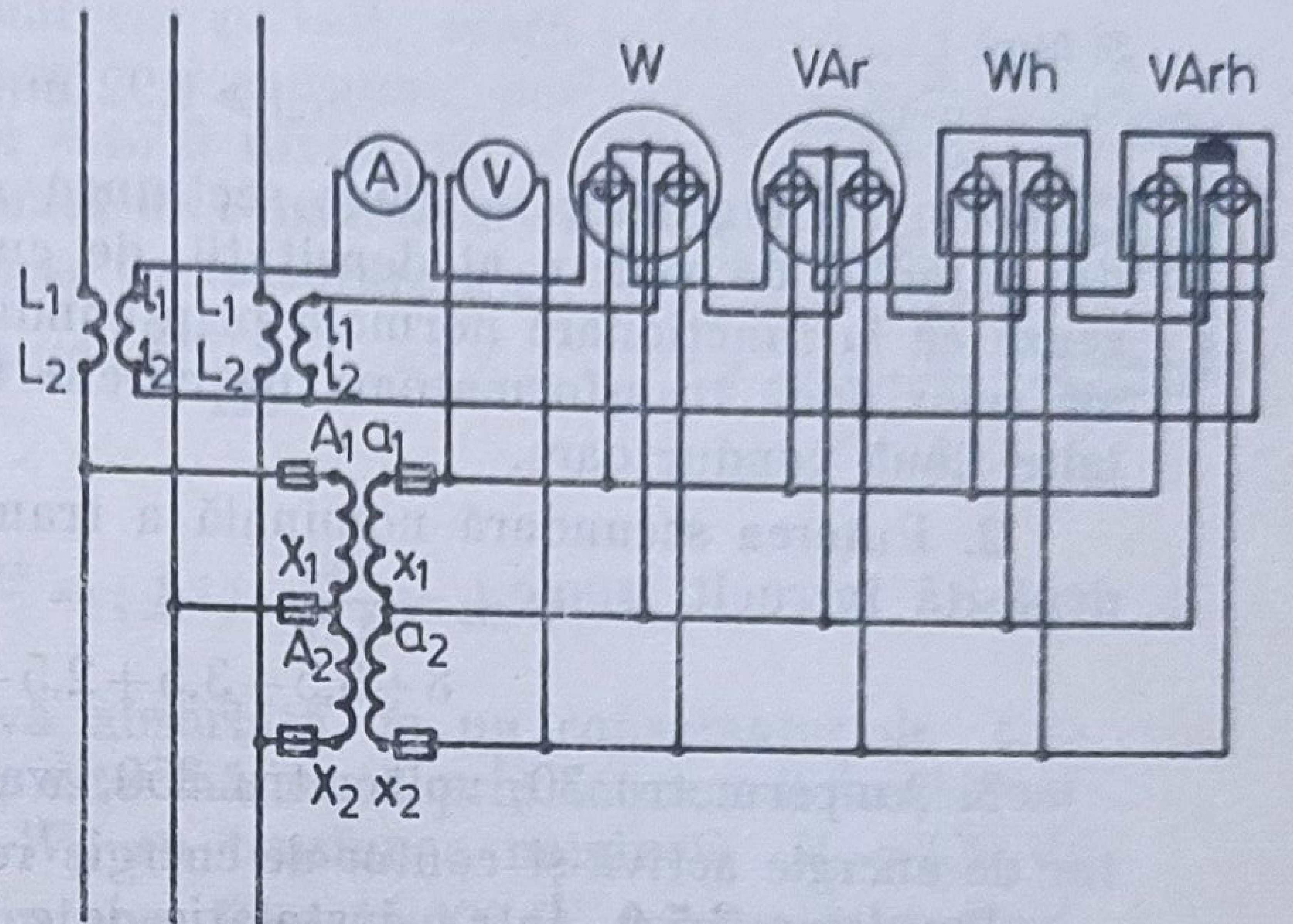


Fig. 3.5.7.

Tabelul 3.5.2

Aparatul de măsură	Cons. pe fază: circ. curent [VA]	Cons. pe fază: circ. tens. [VA]	Curent nom. [A]	Tens. nom. [V]	Intervalul de măsurare [A,V,W, VAr]	Scara [div]
Ampermetru	1,8	—	5	—	5	5
Voltmetru	—	8	—	150	150	150
Wattmetru	3,2	3,5	5	100	500	5
Warmetru	3,7	3,5	5	100	500	5
Contor en. act.	1,1	2,5	5	100	—	—
Contor en. react.	1,2	2,3	5	100	—	—

2. Să se verifice dacă puterea secundară nominală a transformatoarelor de tensiune nu este depășită.

3. Cu ce constantă trebuie înmulțită indicația fiecărui aparat de măsură pentru a obține valoarea măsurandului ?

Soluție. 1. Calculul se efectuează pentru transformatorul de curent în al cărui secundar este și ampermetrul. Pentru a obține rezultate acoperitoare consumurile aparatelor de măsură se însumează aritmetic cu puterea consumată în conductoarele de legătură. Notînd cu S_{Cu} secțiunea conductorului de legătură din cupru și adoptînd pentru conductibilitatea cuprului valoarea $\sigma_{Cu} = 57$ Sm/mm², pe baza datelor din enunț rezultă :

$$1{,}8 + 3{,}2 + 3{,}7 + 1{,}1 + 1{,}2 + $$
$$+ 5^2 \cdot \frac{83}{57 \cdot S_{Cu}} \leq 30,$$

Tabelul 3.5.3

Transf. de măsură	Rap. de trans. nominal	Put. sec. nom. [VA]
de curent	150/5	30
de tensiune	35/0,1	90

şi apoi

$$S_{Cu} \geqslant 1{,}92 \text{ mm}^2 .$$

Conform standardelor se alege secţiunea $S_{Cu} = 2{,}5$ mm², care corespunde şi din punctul de vedere al densităţii de curent admisibile 2A/mm². Se precizează că la funcţionare normală prin conductorul comun circuitelor secundare ale celor două transformatoare de curent trece acelaşi curent ca şi prin celelalte două conductoare.

2. Puterea secundară nominală a transformatoarelor de tensiune nu este depăşită întrucît

$$8+3{,}5+3{,}5+2{,}5+2{,}3<90.$$

3. Ampermetru 30, voltmetru 350, wattmetru şi varmetru $1{,}05 \cdot 10^6$, contor de energie activă şi contor de energie reactivă $1{,}05 \cdot 10^4$.

Problema 3.5.9. Într-o instalaţie de c. a. trifazat energia activă este măsurată cu un contor cu tensiunea nominală $U_n=100$ V, curentul nominal $I_n=5$ A şi conectare prin transformatoare de tensiune cu raportul de transformare nominal $K_{Un}=110/0{,}1$ şi transformatoare de curent cu raportul de transformare nominal $K_{In}=150/5$. Cu cît trebuie înmulţită indicaţia contorului pentru a obţine rezultatul măsurării energiei, ştiind că transformatoarele de măsură la care el a fost racordat au rapoartele de transformare nominale $K'_{Un}=20/0{,}1$ respectiv $K'_{In}=200/5$?

Soluţie. $$\frac{K'_{Un}K'_{In}}{K_{Un}K_{In}} = \frac{200 \cdot 40}{1\,100 \cdot 30} = \frac{8}{33}.$$

Problema 3.5.10. Într-un circuit de c.a. trifazat nesimetric cu patru conductoare se măsoară puterea activă cu wattmetre legate conform schemei din fig. 3.5.8. Wattmetrele au tensiunea nominală $U_n=300$ V, curentul nominal $I_n = 5$ A, factorul de putere nominal $\cos \varphi_n=0{,}8$ şi scara $a_{max} = 120$ diviziuni, iar transformatoarele de curent au raportul de transformare nominal $K_{In}=15/5$. Indicaţiile wattmetrelor sînt $a_1=78$ diviziuni, $a_2=103$ diviziuni şi $a_3=47{,}6$ diviziuni. Să se determine puterea activă P, ştiind că erorile sistematice cauzate de consumul aparatelor de măsură şi al transformatoarelor de curent sînt neglijabile.

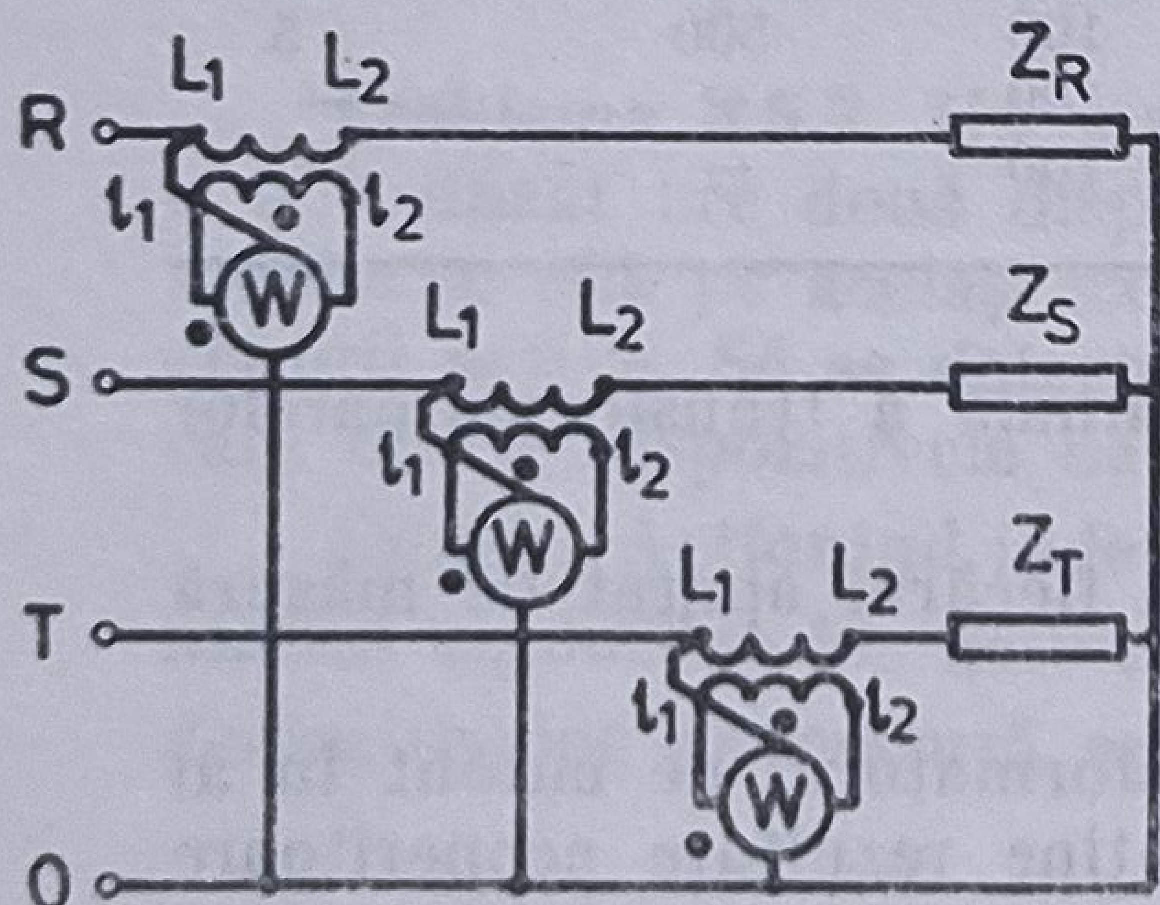


Fig. 3.5.8.

Soluţie. $$P = K_{In}\frac{U_n I_n \cos \varphi_n}{a_{max}}(a_1 + a_2 + a_3) = \frac{15}{5} \cdot \frac{300 \cdot 5 \cdot 0{,}8}{120}(78 + 103 + 47{,}8) = 6\,864 \text{ W} = 6{,}864 \text{ kW}.$$

Problema 3.5.11. Într-un circuit de c.a. trifazat simetric cu tensiunea de linie 220 V se măsoară puterea reactivă prin intermediul schemei din fig. 3.5.9. Wattmetrul are tensiunea nominală $U_n=240$ V, curentul nominal

$I_n = 5$ A, factorul de putere nominal $\cos\varphi_n = 1$, scara $a_{max} = 120$ diviziuni, clasa de precizie 1 și consumul neglijabil. Știind că wattmetrul indică $a = 57{,}5$ diviziuni, să se determine puterea reactivă Q preluată de consumator și eroarea relativă procentuală limită E_{rlim} de măsurare a ei.

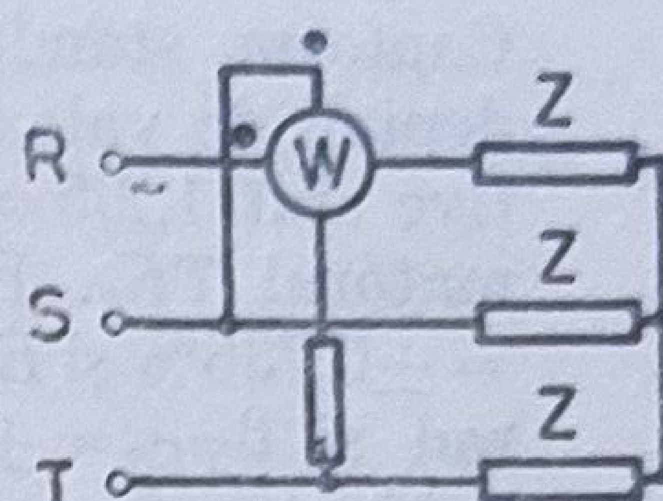


Fig. 3.5.9.

Soluție. $Q = \sqrt{3}\,\frac{U_n I_n \cos\varphi_n}{a_{max}}\cdot a = 1{,}73\cdot\frac{240\cdot 5\cdot 1}{120}\cdot 57{,}5 =$
$= 994{,}75$ VAr,

$$E_{rlimQ} = (\pm 1)\cdot\frac{a_{max}}{a} = (\pm 1)\cdot\frac{120}{57{,}5} = \pm 2{,}09\%.$$

Problema 3.5.12. Puterea reactivă absorbită de un consumator de c.a. trifazat, prezentînd asimetrie simplă, este măsurată prin intermediul schemei din fig. 3.5.10. Wattmetrele W_1 și W_2 au tensiunea nominală $U_n = 300$ V, rezistența circuitului bobinei de tensiune $R_B = 15\,000\ \Omega$, curentul nominal $I_n = 5$ A, factorul de putere nominal $\cos\varphi_n = 1$, scara $a_{max} = 150$ diviziuni și clasa de precizie 0,5, iar transformatoarele de curent au raportul de transformare nominal $K_{In} = 50/5$ și clasa de precizie 0,5. Indicațiile celor două wattmetre sînt $a_1 = 17$ diviziuni și $a_2 = 97$ diviziuni, ampermetrele A_1 și A_2 măsoară curenții $I_1 = 1{,}2$ A și $I_3 = 4{,}5$ A, iar voltmetrul V măsoară tensiunea $U = 382$ V.

1. Să se calculeze valoarea rezistenței R_1 din fig. 3.5.10.

2. Știind că consumul aparatelor de măsură și al transformatoarelor de măsură este neglijabil, să se determine puterea reactivă Q și eroarea ei relativă procentuală limită de măsura E_{rlimQ}.

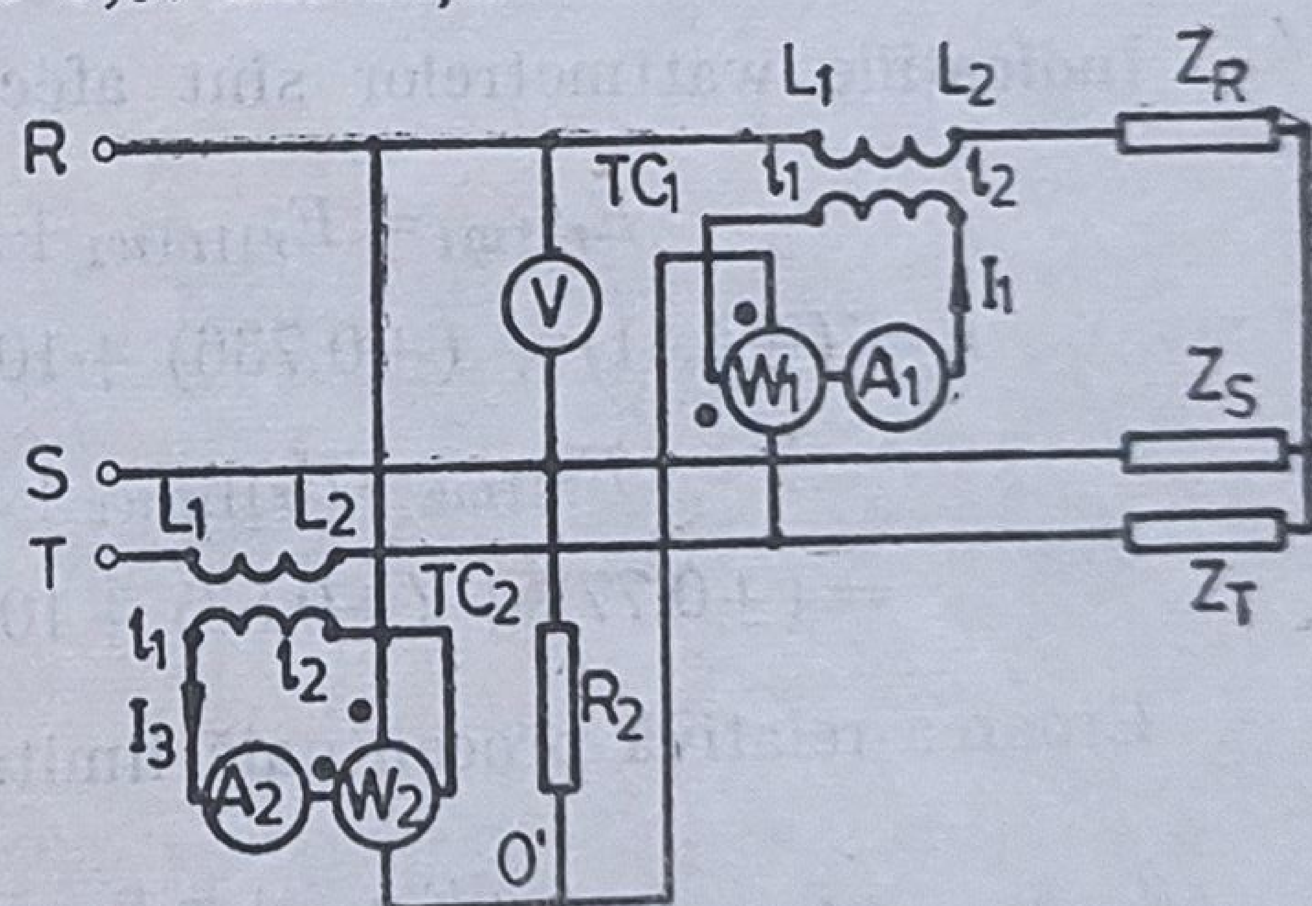


Fig. 3.5.10.

Soluție. 1. Măsurarea este corectă dacă punctul O' are potențialul punctului neutru al unui circuit de c.a. trifazat simetric. În acest scop este necesară asigurarea condiției

$$R = R_B = 15\,000\ \Omega.$$

$$2.\ Q = \sqrt{3}\,K_{In}\,\frac{U_n I_n \cos\varphi_n}{a_{max}}(a_1 + a_2) = 1{,}73\cdot\frac{50}{5}\,\frac{300\cdot 5\cdot 1}{150}(17 + 97) =$$
$$= 19\,722\ \text{VAr} = 19{,}722\ \text{kVAr}.$$

Erorile relative procentuale limită corespunzătoare wattmetrelor sînt:

$$E_{rlim\,w1} = (\pm 0{,}5)\cdot\frac{a_{max}}{a_1} = (\pm 0{,}5)\cdot\frac{150}{17} = \pm 4{,}41\%,$$

$$E_{rlim\,w2} = (\pm 0{,}5)\cdot\frac{a_{max}}{a_2} = (\pm 0{,}5)\cdot\frac{150}{97} = \pm 0{,}77\%.$$

Conform standardelor erorile corespunzătoare transformatoarelor de curent depind de valoarea relativă a curentului care trece prin ele. Aceste valori relative sînt 1,2/5=0,24 pentru transformatorul TC_1 și 4,5/5=0,9 pentru transformatorul TC_2. Erorile relative procentuale limită de curent sînt $E_{r\,lim\,TC_1} = \pm 0{,}736\%$ și $E_{r\,lim\,TC_2} = \pm 0{,}53\%$, iar erorile limită de unghi $\beta_{TC_1} = \pm 11{,}42 \cdot 10^{-3}$ rad și $\beta_{TC_2} = \pm 9{,}02 \cdot 10^{-3}$ rad. Defazajele dintre tensiunile, care se aplică bobinelor de tensiune ale wattmetrelor și curenții care trec prin bobinele lor de curent sînt:

$$\varphi_{w1} = (\widehat{U_{0'3}\, I_1}) = \arccos\left(\frac{U_n I_n \cos\varphi_n}{a_{max}} \cdot \frac{\sqrt{3}\, a_1}{U I_1}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{300 \cdot 5 \cdot 1}{150} \cdot \frac{1{,}73 \cdot 17}{382 \cdot 1{,}2}\right) = \pm\, 0{,}873 \text{ rad},$$

$$\varphi_{w2} = (\widehat{U_{10'},\, I_3}) = \arccos\left(\frac{U_n I_n \cos\varphi_n}{a_{max}} \cdot \frac{\sqrt{3}\, a_2}{U I_2}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{300 \cdot 5 \cdot 1}{150}\ \frac{1{,}73 \cdot 97}{382 \cdot 4{,}5}\right) = \pm\, 0{,}214 \text{ rad}.$$

Indicațiile wattmetrelor sînt afectate de erorile relative procentuale limită

$$E_{r\,lim1} = E_{r\,lim\,w1} + E_{r\,lim\,TC1} + 100\, \beta_{TC1} \operatorname{tg} \varphi_{w1} =$$

$$= (\pm 4{,}41) + (\pm 0{,}736) + 100\, (\pm 11{,}42 \cdot 10^{-3})\, (\pm 1{,}193) = \pm 6{,}51\%,$$

$$E_{r\,lim2} = E_{r\,lim\,w2} + E_{r\,lim\,TC2} + 100\, \beta_{TC2} \operatorname{tg} \varphi_{w2} =$$

$$= (\pm 0{,}77) + (\pm 0{,}53) + 100\, (\pm 9{,}02 \cdot 10^{-3})\, (\pm 0{,}217) = \pm 1{,}5\%.$$

Eroarea relativă procentuală limită de măsurare a puterii reactive este:

$$E_{r\,lim\,Q} = \frac{a_1 E_{r\,lim1} + a_2 E_{r\,lim2}}{a_1 + a_2} = \frac{17\,(\pm\, 6{,}51) + 97\,(\pm 1{,}5)}{17 + 97} = \pm 2{,}25\%.$$

3.6. BIBLIOGRAFIE PENTRU CAPITOLUL 3

– Pentru întregul capitol

Manolescu, P. *Măsurări electrice industriale*, vol. I, cap. 6 și 7. Editura tehnică, București, 1966.

Pop, E., Chivu, M. *Măsuri electrice și magnetice*, vol. II, cap. 17, 18 și 19. Institutul politehnic Timișoara, 1969.

– Pentru anumite probleme

3.4.3, 3.4.4, 3.5.8, 3.5.13. STAS 4324-70. *Transformatoare de curent.*

3.4.4, 3.5.8, 3.5.12. STAS 4323-70. *Transformatoare de tensiune.*

3.4.8. STAS 4198/1, 2, 3-68. *Contoare electrice de curent alternativ pentru energie activă și energie reactivă.*

CAPITOLUL 4

MĂSURAREA REZISTENȚEI, INDUCTIVITĂȚII, CAPACITĂȚII ȘI IMPEDANȚEI

4.1. OHMMETRE, HENRYMETRE ȘI FARADMETRE

Ohmmetrele, henrymetrele și faradmetrele sînt aparate de măsură cu citire directă destinată măsurării rezistenței, inductivității și capacității. Ele se compun din dispozitive de măsură (magnetoelectrice, feromagnetice, electrodinamice) obișnuite sau logometrice, cărora li se atașează — după împrejurări — dispozitive sau aparate ajutătoare (rezistoare, bobine sau condensatoare etalon, de valoare unică sau variabile).

Problema 4.1.1. Cu ajutorul unui dispozitiv de măsură magnetoelectric obișnuit, avînd curentul nominal $I_n=1$ mA, rezistența interioară $R_a=200\ \Omega$ și scara liniară, se realizează un ohmmetru serie cu intervalul de măsurare infinit (fig. 4.1.1).

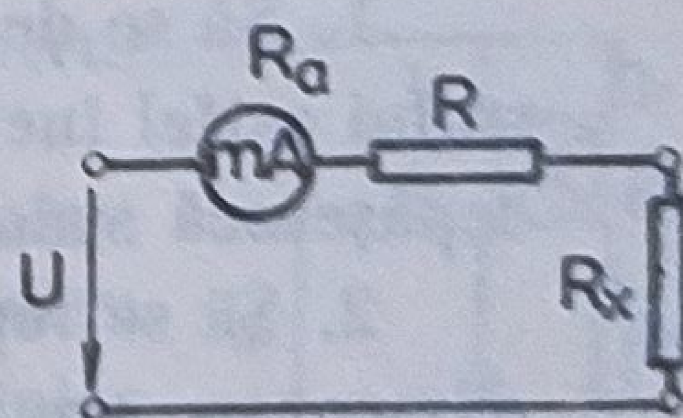


Fig. 4.1.1.

1. Știind că tensiunea continuă de alimentare a ohmmetrului este $U = 1{,}2$ V, să se determine valoarea rezistenței R din fig. 4.1.1.

2. Să se reproducă grafic scara ohmmetrului, presupunînd că rezistența R are valoarea calculată la punctul 1.

Soluție. 1. Cînd rezistența de măsurat R_x este nulă curentul prin dispozitivul de măsură magnetoelectric atinge valoarea sa nominală:

$$I_n = \frac{U}{R_a + R},$$

de unde

$$R = \frac{U}{I_n} - R_a = \frac{1{,}2}{1 \cdot 10^{-3}} - 200 = 1\,000\ \Omega.$$

2. Întrucît scara dispozitivului de măsură magnetoelectric este liniară, sensibilitatea sa S_a este constantă. Cînd rezistența de măsurat R_x este nulă se obține deviația nominală :

$$\alpha_n = S_a \cdot I_n = \frac{S_a U}{R_a + R}.$$

Pentru o altă valoare a rezistenței de măsurat R_x deviația este :

$$\alpha = \frac{S_a U}{R_a + R + R_x} = \frac{R_a + R}{R_a + R + R_x} \alpha_n = \frac{1\,200}{1\,200 + R_x} \alpha_n.$$

Pe baza acestei relații s-a desenat scara ohmmetrului (fig. 4.1.2).

Problema 4.1.2. Cu un dispozitiv de măsură magnetoelectric, avînd curentul nominal I_n=0,5 mA, rezistența interioară R_a=200 Ω și scara liniară, se

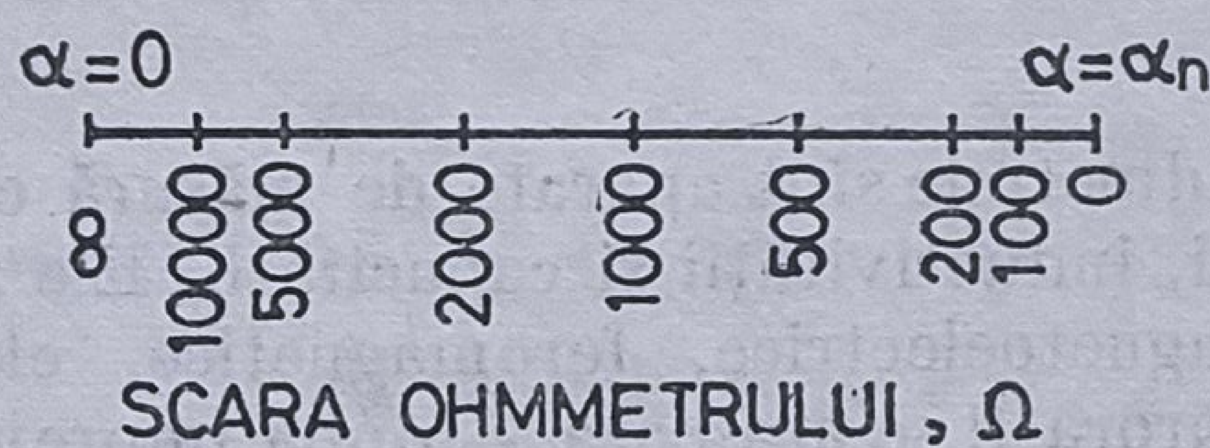


Fig. 4.1.2.

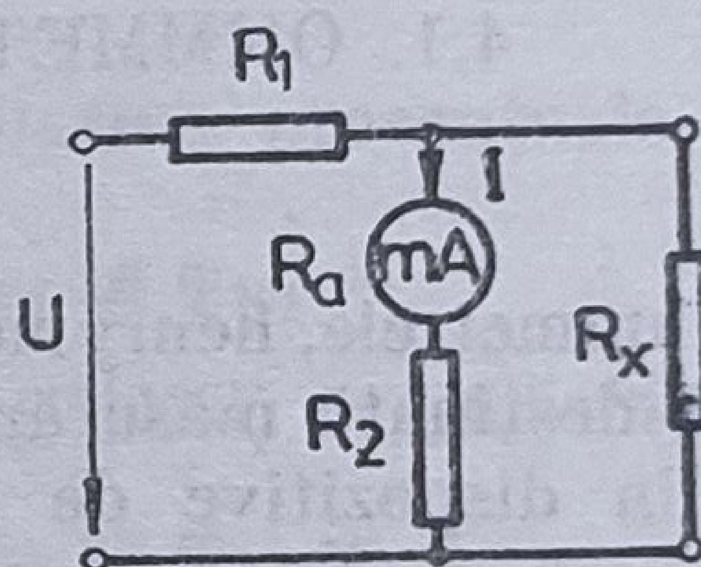


Fig. 4.1.3.

realizează ohmmetrul paralel din fig. 4.1.3, în care rezistențele au valorile R_1=1 000 Ω și R_2=800 Ω.

1. Să se determine valoarea tensiunii continue U de alimentare a ohmmetrului astfel încît curentul prin dispozitivul de măsură magnetoelectric să nu depășească valoarea sa nominală nici în cazul cel mai defavorabil.

2. Să se reproducă grafic scara ohmmetrului, presupunînd că tensiunea de alimentare are valoarea calculată la punctul 1.

3. Să se precizeze intervalul de măsurare al ohmmetrului și valoarea maximă a curentului prin dispozitivul de măsură magnetoelectric în cazul în care tensiunea de alimentare are valoarea egală cu cea calculată la punctul 1 și rezistența R_1=200 Ω.

Soluție. 1. $U = (R_a + R_1 + R_2)\, I_n = (200+1000+800) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 1$ V.

2. Întrucît scara dispozitivului de măsură magnetoelectric este liniară sensibilitatea sa S_a este o constantă, iar deviația nominală

$$\alpha_n = S_a I_n = \frac{S_a U}{R_a + R_1 + R_2}$$

are loc cînd rezistenţa de măsurat R_x este infinită. Pentru alte valori ale rezistenţei de măsurat R_x deviaţia dispozitivului de măsură magnetoelectric este

$$\alpha = \frac{S_a U}{R_a+R_1+R_2+R_1\frac{R_a+R_2}{R_x}} = \frac{R_a+R_1+R_2}{R_a+R_1+R_2+R_1\frac{R_a+R_2}{R_x}}\alpha_n =$$

$$= \frac{\alpha_n}{1+\frac{R_1(R_a+R_2)}{R_x(R_a+R_1+R_2)}} = \frac{\alpha_n}{1+\frac{1\,000\,(200+800)}{R_x(200+1\,000+800)}} = \frac{\alpha_n}{1+\frac{500}{R_x}}.$$

Pe baza acestei expresii s-a desenat scara ohmmetrului (fig. 4.1.4).

3. Aplicînd legea lui Ohm circuitului din fig. 4.1.3, rezultă :

$$R_x = \frac{R_1(R_a+R_2)}{\frac{U}{I}-(R_a+R_1+R_2)},$$

în care I este curentul prin dispozitivul de măsură magnetoelectric. Valorii nominale I_n a acestui curent îi corespunde valoarea maximă :

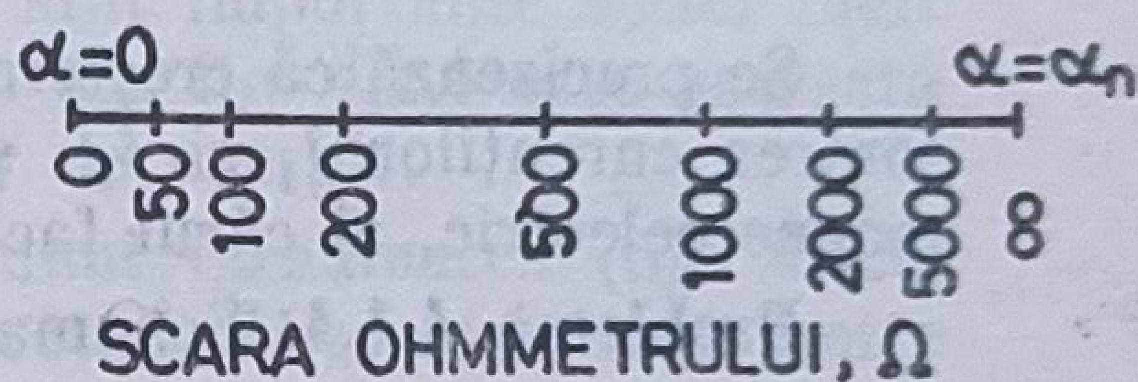


Fig. 4.1.4.

$$R_{xmax} = \frac{R_1(R_a+R_2)}{\frac{U}{I_n}-(R_a+R_1+R_2)} = \frac{200\,(200+800)}{\frac{1}{0{,}5\cdot10^{-3}}-(200+200+800)} = 250\,\Omega$$

a rezistenţei de măsurat. Dacă rezistenţa de măsurat R_x este infinită, atunci curentul prin dispozitivul de măsură magnetoelectric are valoarea maximă

$$I_{max} = \frac{U}{R_a+R_1+R_2} = \frac{1}{200+200+800} = 0{,}833\cdot10^{-3}\,\text{A},$$

care depăşeşte aproape de două ori valoarea nominală $I_n=0{,}5\cdot10^{-3}$ A. Dispozitivul de măsură magnetoelectric folosit la realizarea ohmmetrului trebuie să fie prin urmare supraîncărcabil.

Problema 4.1.3. Dispozitivul de măsură al unui megohmmetru (fig. 4.1.5) alimentat la tensiunea continuă U este un logometru magnetoelectric. Cum urmează a se schimba valorile rezistenţelor R_e şi R pentru ca intervalul de măsurare al megohmmetrului să crească de n ori, fără ca scara să-şi modifice aspectul?

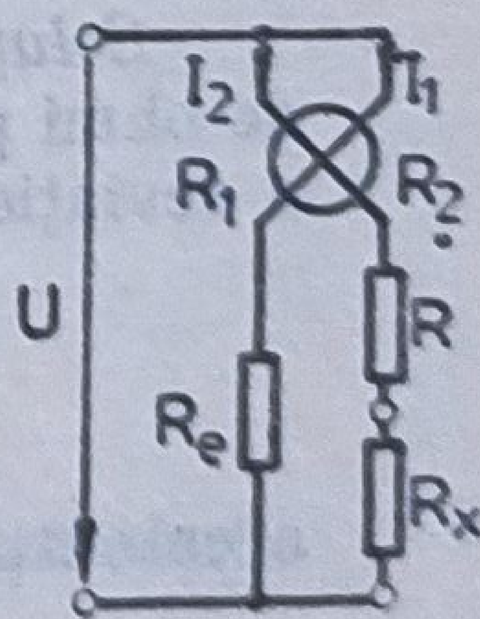


Fig. 4.1.5.

Soluţie. Fie R_1 şi R_2 rezistenţele celor două înfăşurări ale logometrului magnetoelectric şi I_1 şi I_2 curenţii, care trec prin aceste înfăşurări. Deviaţia permanentă a logometrului magnetoelectric depinde de raportul curenţilor I_1 şi I_2 :

$$\alpha = F\left(\frac{I_1}{I_2}\right) = F\left(\frac{U}{R_1+R_e}\cdot\frac{R_2+R+R_x}{U}\right) = F\left(\frac{R_2+R+R_x}{R_1+R_e}\right).$$

La creşterea de n ori a intervalului de măsurare al megohmmetrului valorile rezistenţei de măsurat R_x corespunzătoare gradaţiilor de pe scara megohm-

metrului cresc și ele de n ori. Dacă funcția F nu se modifică, atunci scara megohmmetrului nu-și schimbă aspectul. Prin urmare, admițînd că rezistențele R_e și R cresc de p și q ori, se asigură condiția :

$$\frac{R_2+R+R_x}{R_1+R_e}=\frac{R_2+qR+nR_x}{R_1+pR_e}$$

sau

$$R_2+qR=n\,(R_2+R),$$
$$R_1+pR_e=n\,(R_1+R_e).$$

De aici :

$$q=(n-1)\,\frac{R_2}{R}+n, \quad p=(n-1)\,\frac{R_1}{R_e}+n.$$

Se precizează că creșterea rezistențelor R_x, R_e și R, atrage după sine micșorarea curenților I_1 și I_2 și a cuplurilor activ și antagonist din logometrul magnetoelectric, al cărui factor de calitate scade astfel.

Problema 4.1.4. Schema din fig. 4.1.6, în care voltmetrul are 500 Ω/V, se alimentează la tensiune alternativă cu valoarea efectivă $U=212$ V și frecvența $f=50$ Hz. În poziția 1 a comutatorului K se reglează rezistența R pînă cînd deviația voltmetrului este egală cu cea nominală. Comutînd comutatorul K în poziția 2, se constată că deviația voltmetrului este doar 63% din valoarea nominală.

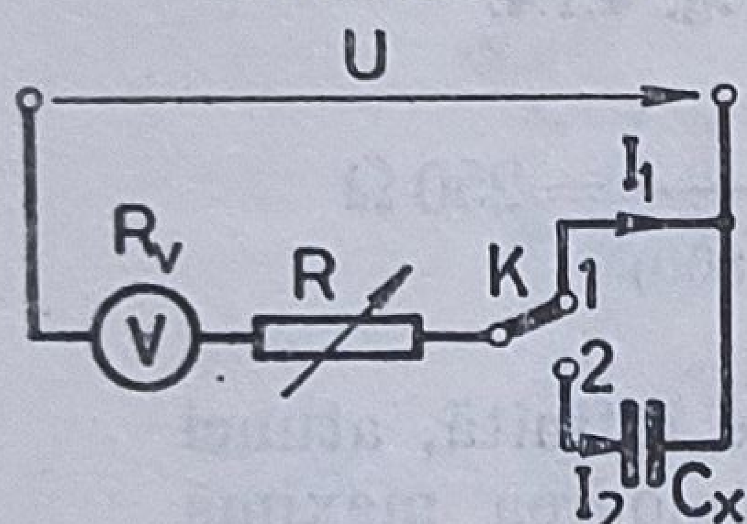


Fig. 4.1.6.

1. Știind că valoarea efectivă și frecvența tensiunii de alimentare sînt constante, să se determine valoarea capacității necunoscute C_x a condensatorului.

2. Se poate imagina o schemă similară celei din fig. 4.1.6, cu care să se măsoare inductivitatea necunoscută L_x a unei bobine ?

Soluție. 1. Curentul nominal al voltmetrului este inversul numărului său de ohmi pe volt. Prin urmare în poziția 1 a comutatorului K valorii nominale a deviației voltmetrului îi corespunde valoarea nominală

$$I_1=\frac{1}{500}=2\cdot10^{-3}\text{ A}$$

a curentului prin voltmetru. Rezultă de asemenea :

$$R_v+R=\frac{U}{I_1}=\frac{212}{0{,}002}=1{,}06\cdot10^5\ \Omega.$$

În poziția 2 a comutatorului K prin voltmetru trece curentul

$$I_2=0{,}63\ I_1=0{,}63\cdot2\cdot10^{-}=1{,}26\cdot10^{-3}\text{ A}.$$

Dar

$$I_2=\frac{U}{\sqrt{(R_v+R)^2+\left(\frac{1}{2\pi fC_x}\right)^2}},$$

de unde

$$C_x = \frac{1}{2\pi f\sqrt{\frac{U^2}{I_2^2}-(R_v+R)^2}} = \frac{1}{2\cdot 3{,}14\cdot 508\sqrt{\frac{212^2}{(1{,}26\cdot 10^{-3})^2}-(1{,}06\cdot 10^5)^2}} =$$

$$=2{,}44\cdot 10^{-8}\ \mathrm{F}=24{,}4\ \mathrm{nF}.$$

2. Pe lîngă capacitatea C_x condensatorul supus măsurării prezintă şi o rezistenţă corespunzătoare pierderilor de energie din condensator. Aceste pierderi de energie sînt de obicei atît de mici încît rezistenţa corespunzătoare lor nu influenţează funcţionarea schemei din fig. 4.1.6.

În mod asemănător bobina prezintă pe lîngă inductivitatea L_x şi o rezistenţă corespunzătoare pierderilor de energie din bobină. Spre deosebire de cele din condensator pierderile de energie din bobină sînt importante astfel încît la măsurarea inductivităţii L_x cu ajutorul schemei din fig. 4.1.6 este necesară cunoaşterea rezistenţei corespunzătoare pierderilor de energie.

Problema 4.1.5. Dispozitivul de măsură al unui faradmetru (fig. 4.1.7) alimentat la tensiune alternativă cu valoarea efectivă U şi frecvenţa f este un logometru feromagnetic ale cărui înfăşurări au impedanţa neglijabilă şi a cărui scară este gradată în valori ale raportului C_e/C_x al capacităţilor condensatoarelor considerate fără pierderi de energie. Presupunînd că numai condensatorul etalon cu capacitatea C_e nu prezintă pierderi de energie, să se determine eroarea relativă procentuală provocată de pierderile de energie ale condensatorului de măsurat cu capacitatea C_x asupra indicaţiei faradmetrului.

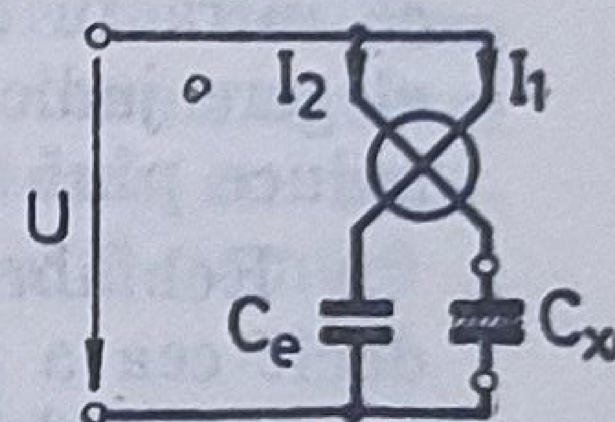


Fig. 4.1.7.

Soluţie. Admiţînd că rezistenţa R_x legată în paralel cu capacitatea C_x corespunde pierderilor de energie din condensatorul de măsurat, rezultă :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{2\pi f C_e U}{U\sqrt{\left(\frac{1}{R_x}\right)^2+(2\pi f C_x)^2}} = \frac{C_e}{C_x}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\delta_x+1}},$$

în care

$$\delta_x = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2\pi f C_x R_x}\right)$$

este unghiul de pierderi. Eroarea relativă procentuală provocată de pierderile de energie este

$$E_r = \frac{100\left(\frac{C_e}{C_x}-\frac{I_1}{I_2}\right)}{\frac{I_1}{I_2}} = 100\left(\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\delta_x+1}-1\right).$$

Unghiul de pierderi δ_x fiind de obicei mic, rezultă

$$E_r \approx 50\ \mathrm{tg}\,\delta_x,\quad [\%\ ;\ \mathrm{rad}].$$

4.2. PUNŢI

Punţile sînt instalaţii de măsură de comparaţie destinate măsurării rezistenţei, impedanţei şi parametrilor ce alcătuiesc impedanţa. Există punţi de curent continuu şi punţi de curent alternativ.

Punţile de curent continuu cele mai cunoscute sînt puntea simplă Wheatstone destinată măsurării rezistenţei de valoare mijlocie şi puntea dublă Thomson destinată măsurării rezistenţei de valoare mică. Ele se compun din rezistoare etalon fixe şi variabile, adeseori în decade, şi indicatoare de nul (galvanometre obişnuite, indicatoare de nul electronice).

Punţile de curent alternativ sînt destinate măsurării impedanţei şi a parametrilor — rezistenţă, inductivitate, capacitate — ce o alcătuiesc. Ele se alimentează de la surse adecvate, fiind alcătuite din rezistoare etalon, bobine etalon, condensatoare etalon, fixe şi variabile şi indicatoare de nul (galvanometre vibratoare, osciloscoape catodice, căşti telefonice, indicatoare de nul electronice).

Precizia de măsurare a punţilor este mare, fiind determinată de clasa de precizie a rezistoarelor etalon, a bobinelor etalon, a condensatoarelor etalon, ce intră în componenţa lor şi de pragul de sensibilitate al punţilor. Printr-o alegere judicioasă a componentelor, pragul de sensibilitate al punţilor se poate reduce pînă la valori foarte mici.

Echilibrarea punţilor de curent alternativ este în general mai dificilă decît cea a punţilor de curent continuu. Ea se poate efectua prin reglarea a cel puţin doi parametri corespunzător aleşi ai punţilor de curent alternativ.

Problema 4.2.1. Puntea simplă din fig. 4.2.1 este în echilibru. Se transpune alimentarea acestei punţi din punctele *a* şi *b* în punctele *c* şi *d*, iar indicatorul de nul se desface de la punctele *c* şi *d* şi se leagă între punctele *a* şi *b*. Este şi puntea astfel legată în echilibru ?

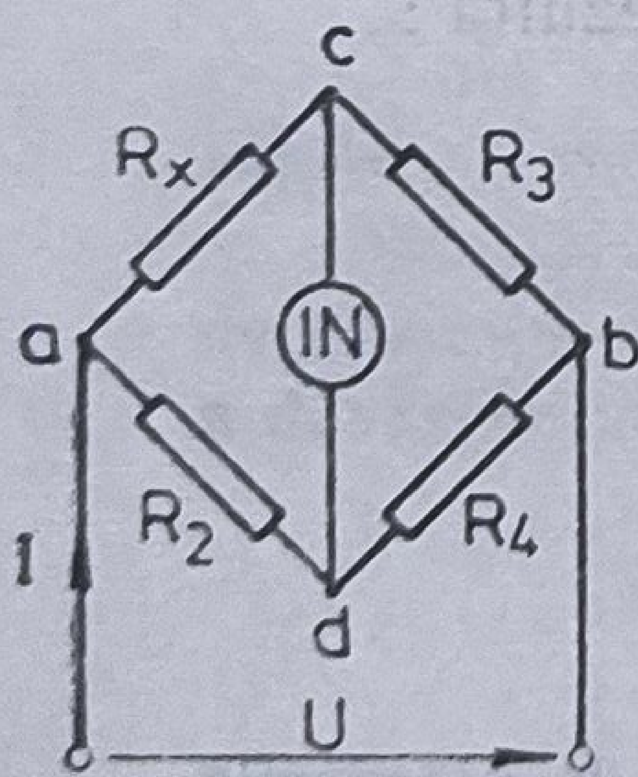


Fig. 4.2.1.

Soluţie. Da, deoarece în ambele situaţii relaţia de echilibru este :

$$R_xR_4 = R_2R_3 .$$

Problema 4.2.2. În puntea simplă din fig. 4.2.1 rezistenţele R_2, R_3 şi R_4 sînt realizate prin cutii de rezistoare de precizie cu comutatoare în decade. Fiecare cutie conţine cîte 10 rezistoare cu rezistenţe de (1 ; 10 ; 100 ; 1 000 ; 10 000) Ω, iar fiecare rezistor poate disipa puterea $P = 0{,}5$ W. Curentul maxim admisibil prin rezistenţa de măsurat este $I_{adm\,x} = 0{,}25$ A. În fiecare cutie au fost introduse în serie în circuit rezistoarele cu rezistenţele R_2 (2×1 000 ; 7 × 100 ; 5 × 10 ; 1 × 1) Ω, R_3 (1 × 10 000 ; 3 × 1 000 ; 6×100 ; 9×10 ; 1×1) Ω şi R_4 (9×1 000 ; 4×100 ; 5× 10 ; 7 × 1) Ω, puntea fiind în echilibru.

1. Să se afle valoarea rezistenţei R_x.

2. Să se determine tensiunea maximă admisibilă U_{adm} de alimentare a punţii la echilibru.

Soluție. 1. $R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} = \frac{2\,751 \cdot 13\,691}{9\,457} = 3982{,}65\ \Omega.$

2. Curentul maxim admisibil printr-un rezistor dintr-o cutie este :

$$I_{adm}{}^{s} = \sqrt{\frac{P}{R}},$$

în care R este rezistența rezistorului. Curentul maxim admisibil printr-o cutie de rezistoare este cel mai mic dintre curenții maxim admisibili ai rezistoarelor introduse în circuit, și anume :

$$I_{adm2} = \sqrt{\frac{0{,}5}{1\,000}} = 0{,}0224\ \text{A},$$

$$I_{adm3} = \sqrt{\frac{0{,}5}{10\,000}} = 0{,}00707\ \text{A},$$

$$I_{adm4} = \sqrt{\frac{0{,}5}{1\,000}} = 0{,}0224\ \text{A}.$$

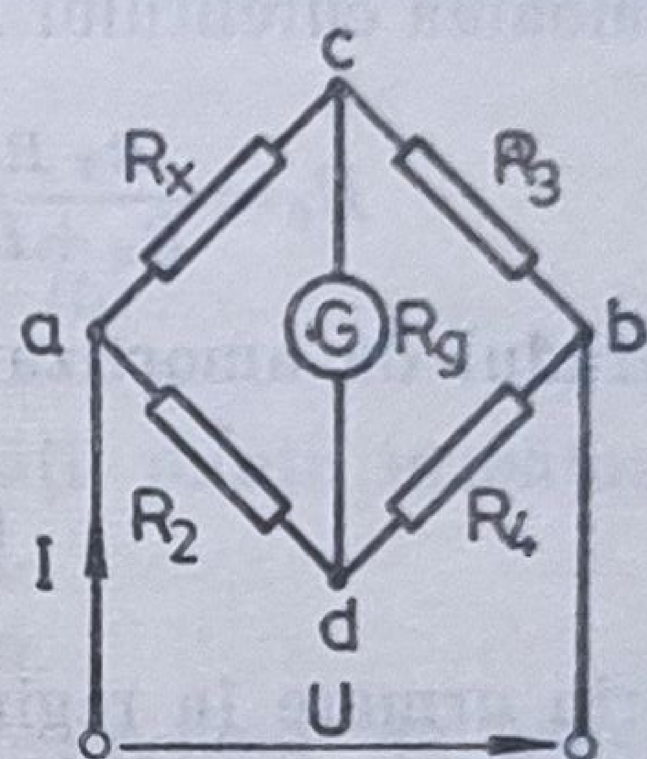


Fig. 4.2.2.

Se observă că $I_{adm3} < I_{admx}$ și $I_{adm2} = I_{adm4}$. Cînd puntea este în echilibru rezistoarele avînd rezistențele R_x și R_3 sînt parcurse de același curent, a cărui valoare maximă admisibilă este determinată de cutia de rezistoare cu rezistența R_3. Ca urmare tensiunea maximă admisibilă pentru această ramură a punții este :

$$U_{acb} = I_{adm2}\,(R_x + R_3) = 0{,}00707\ (3982{,}65 + 13\,691) = 124{,}95\ \text{V}.$$

În același timp tensiunea maximă admisibilă pentru cealaltă ramură a punții este :

$$U_{adb} = I_{adm2}\,(R_2 + R_4) = 0{,}0224\ (2\,751 + 9\,457) = 273{,}46\ \text{V}.$$

Întrucît $U_{acb} < U_{adb}$, tensiunea maximă admisibilă de alimentare a punții la echilibru este $U_{adm} = U_{acb} = 124{,}95$ V.

Problema 4.2.3. Puntea simplă din fig. 4.2.2 este în echilibru pentru următoarele valori ale rezistențelor : $R_2 = 550\ \Omega$, $R_3 = 833\ \Omega$ și $R_4 = 500\ \Omega$. Galvanometrul folosit ca indicator de nul are rezistența interioară $R_g = 150\ \Omega$, rezistența exterioară critică $R_{ek} = 1\,400\ \Omega$ și coeficientul de amortizare datorită frecării cu aerul neglijabil.

1. Să se determine valoarea rezistenței R_x.

2. Să se precizeze caracterul mișcării echipajului mobil al galvanometrului în regim tranzitoriu, puntea fiind în echilibru.

Soluție. 1. $R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} = \frac{550 \cdot 833}{500} = 916{,}3\ \Omega.$

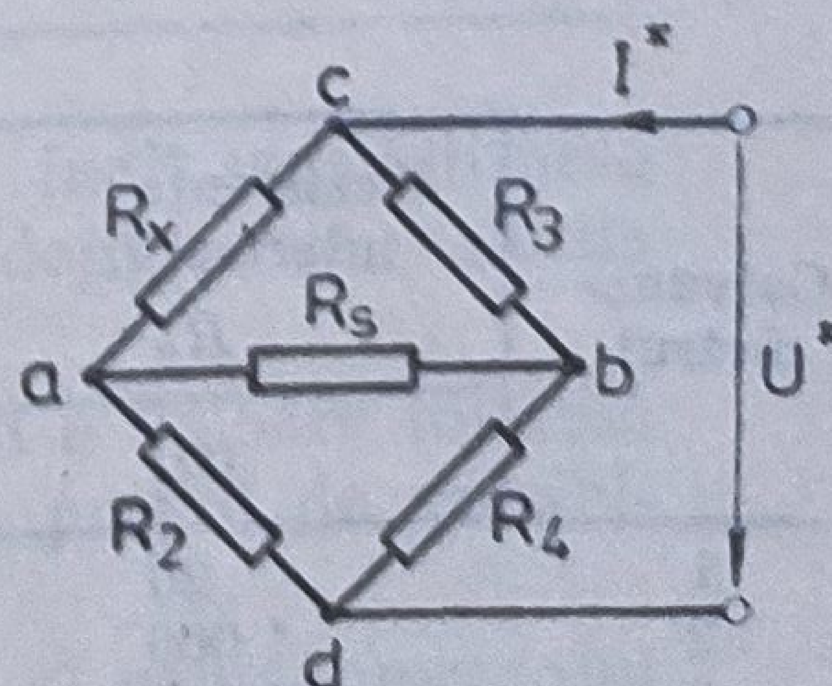


Fig. 4.2.3.

2. Caracterul mișcării echipajului mobil al galvanometrului este determinat în regimul tranzitoriu de gradul de amortizare β, care la rîndul lui depinde de rezistența R_e exterioară galvanometrului, în cazul de față rezistența echivalentă a ramurii de circuit cuprinsă între punctele c

și d (fig. 4.2.3). Cînd puntea este în echilibru rezistența R_e nu depinde de rezistența interioară R_s a sursei de alimentare. Această afirmație se verifică fie stabilind rezistența echivalentă a ramurii de circuit cuprinsă între punctele c și d, fie judecînd în felul următor: rezistența R_e reprezintă raportul dintre o tensiune continuă U^* aplicată între punctele c și d și curentul I^* pe care-l provoacă. Pe baza soluției problemei 4.2.1 rezultă că puntea alimentată între punctele c și d este în echilibru, iar punctele a și b sînt echipotențiale. Ca urmare, rezistența R_s nefiind parcursă de curent, nu influențează valoarea curentului I^* și nici valoarea rezistenței R_e. De aceea

$$R_e=\frac{R_x R_3}{R_x+R_3}+\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}=\frac{916{,}3\cdot 833}{916{,}3+833}+\frac{550\ 500}{550+500}=698{,}2\ \Omega.$$

Gradul de amortizare este:

$$\beta=\frac{R_g+R_{ek}}{R_g+R_e}=\frac{150+1\ 400}{150+698{,}2}=1{,}83>1.$$

Prin urmare în regimul tranzitoriu mișcarea echipajului mobil al galvanometrului este aperiodică amortizată.

Problema 4.2.4. Rezistența R_x, avînd valoarea aproximativă 5 200 Ω, se măsoară cu puntea simplă din fig. 4.2.2 alimentată de la o sursă de t.e.m., cu rezistența interioară $R_s=150\ \Omega$. Știind că galvanometrul folosit ca indicator de nul are rezistența interioară $R_g=5\ 700\ \Omega$, să se precizeze acele valori ale rezistențelor R_2, R_3 și R_4 care asigură punții sensibilitatea maximă.

Soluție. Sensibilitatea punții este maximă dacă:

$$R_2=\sqrt{\frac{R_x+R_g}{\dfrac{1}{R_x}+\dfrac{1}{R_s}}}=\sqrt{\frac{5\ 200+5\ 700}{\dfrac{1}{5\ 200}+\dfrac{1}{150}}}=1\ 260{,}6\ \Omega$$

și

$$R_3=\sqrt{\frac{R_x+R_s}{\dfrac{1}{R_x}+\dfrac{1}{R_g}}}=\sqrt{\frac{5\ 200+150}{\dfrac{1}{5\ 200}+\dfrac{1}{5\ 700}}}=3\ 849{,}7\Omega.$$

Puntea fiind în echilibru, rezultă apoi:

$$R_4=\frac{R_2R_3}{R_x}=\frac{1\ 260{,}6\cdot 3\ 849{,}7}{5\ 200}=933{,}3\ \Omega.$$

Problema 4.2.5. Puntea simplă din fig. 4.2.2 alimentată la tensiunea constantă $U=4{,}5$ V este în echilibru pentru $R_2=1\ 000\ \Omega$, $R_3=1\ 201{,}6\ \Omega$ și $R_4=1\ 000\ \Omega$.

Tabelul 4.2.1

Galvanometrul	Rezistența interioară, R_g [Ω]	Constanta de curent, C_I [A/div]
1	20	$1\cdot10^{-8}$
2	1 000	$5{,}9\cdot10^{-8}$
3	6 000	$3\cdot10^{-9}$

1. Să se determine valoarea rezistenței R_x.

2. Care din galvanometrele prezentate în tabelul 4.2.1 asigură sensibilitatea maximă punții din fig. 4.2.2?

3. Să se calculeze eroarea relativă procentuală limită determi-

nată de pragul de sensibilitate al punții, știind că deviația minimă sesizabilă la galvanometrul determinat la punctul 2 este $\alpha_{min} = \pm 0{,}1$ diviziuni.

Soluție. 1. La echilibru :

$$R_x = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_4} = \frac{1\,000 \cdot 1\,201{,}6}{1\,000} = 1\,201{,}6\,\Omega.$$

2. La echilibru sensibilitatea punții alimentată la tensiune constantă are expresia :

$$S = \frac{U}{C_I} \frac{R_4}{(R_x + R_3)[R_2 R_4 + R_g (R_2 + R_4)] + R_x R_3 (R_2 + R_4)}.$$

Cele trei galvanometre din tabelul 4.2.1 asigură sensibilității punții următoarele valori : (78,3 ; 72,9 ; 48) div/Ω.

Galvanometrul 1 asigură punții sensibilitatea maximă.

3. Eroarea relativă procentuală limită determinată de pragul de sensibilitate este :

$$\delta_{min} = \frac{100\, \alpha_{min}}{S \cdot R_x} = \frac{100 \cdot (\pm 0{,}1)}{78{,}3 \cdot 1201{,}6} = \pm 1{,}06 \cdot 10^{-4}\,\%.$$

Problema 4.2.6. Rezistența R_x, avînd valoarea aproximativă 150 Ω și curentul maxim admisibil $I_{adm\,x} = 0{,}1$ A, se măsoară cu puntea simplă din fig. 4.2.2 alimentată la tensiunea constantă $U = 4{,}5$ V. Cutii de rezistoare de precizie cu comutatoare în decade (vezi problema 4.2.1) servesc la realizarea rezistențelor R_2, R_3 și R_4, iar caracteristicile galvanometrelor disponibile sînt redate în tabelul 4.2.2.

Tabelul 4.2.2

Galvanometrul	Rezistența interioară, R_g	Rezistența exterioară critică, R_{ek}	Constanta de curent, C_I	Deviația min. sesizabilă, α_{min}
	[Ω]	[Ω]	[A/div]	[div]
1	110	400	$2{,}6 \cdot 10^{-6}$	±0,2
2	4 300	12 000	$5{,}5 \cdot 10^{-7}$	±0,2
3	110	540	$3{,}75 \cdot 10^{-7}$	±0,2
4	4 250	11 500	$1 \cdot 10^{-7}$	±0,2

1. Să se aleagă astfel valorile rezistențelor R_2, R_3 și R_4 încît sensibilitatea punții să fie maximă, iar curenții prin rezistoare să nu depășească valorile maxime admisibile.

2. Care dintre galvanometrele disponibile asigură punții o valoare minimă pentru eroarea relativă procentuală limită determinată de pragul de sensibilitate ?

3. Să se precizeze caracterul mișcării echipajului mobil al galvanometrului determinat la punctul 2 în regimul tranzitoriu, puntea fiind în echilibru.

4. Să se determine valoarea rezistenței R_x știind că la echilibru celelalte rezistențe au valorile $R_2=73\ \Omega$, $R_3=154\ \Omega$ și $R_4=75\ \Omega$.

5. Să se calculeze eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,lim\,Rx}$ de determinare a rezistenței R_x, știind că se folosește galvanometrul determinat la punctul 2, iar cutiile de rezistoare de precizie cu comutatoare în decade au clasa de precizie 0,05.

Soluție. 1. Sensibilitatea punții alimentată la tensiune constantă este maximă cînd rezistențele R_x, R_2, R_3 și R_4 îndeplinesc condițiile:

$$\frac{R_2}{R_x}=m=(0,1-1), \quad \frac{R_3}{R_x}=n\approx 1, \quad \frac{R_4}{R_x}=mn\approx(0,1-1).$$

Se aleg $m=0,5$ și $n=1$, adică $R_2=75\ \Omega$ (se introduc $(7\times10+5\times1)\ \Omega$), $R_3=$ $=150\ \Omega$ (se introduc $(1\times100+5\times10)\ \Omega$) și $R_4=75\ \Omega$ (se introduc $(7\times10+$ $+5\times1)\Omega$).

La echilibru tensiunea de alimentare maximă admisibilă a punții este $U_{adm}=21,21$ V. Întrucît $U<U_{adm}$, curenții prin rezistoare au valori mai mici decît cele maxime admisibile.

2. Eroarea relativă procentuală limită determinată de pragul de sensibilitate al punții alimentată la tensiune constantă este:

$$\delta_{min}=\frac{100\,a_{min}\,C_I\,R_x}{U}\,\frac{(1+n)\,[n\,(1+m)+p\,(1+n)]}{n}=$$

$$=\pm\,(2+2,67\ p)\,C_I\cdot10^3, \qquad [\%\ ;\ —,\ \text{A/div.}],$$

în care $p=R_g/R_x$. Înlocuind în această expresie datele galvanometrelor rezultă în ordine următoarele valori: ($\pm0,0103$; $\pm0,0432$; $\pm0,0015$; $\pm0,0078$). Deși nu are cea mai mică constantă de curent, galvanometrul 3 asigură valoarea minimă pentru eroarea relativă procentuală limită determinată de pragul de sensibilitate al punții.

3. Pe baza soluției problemei 4.2.3 rezultă că rezistența exterioară galvanometrului este

$$R_e=\frac{R_x\,R_3}{R_x+R_3}+\frac{R_2\cdot R_4}{R_2+R_4}=\frac{150\cdot150}{150+150}+\frac{75\cdot75}{75+75}=112,5\ \Omega.$$

Întrucît

$$R_e=112,5\ \Omega<R_{ek}=540\ \Omega,$$

mișcarea echipajului mobil al galvanometrului în regimul tranzitoriu este aperiodică amortizată.

4. $$R_x=\frac{R_2\cdot R_3}{R_4}=\frac{73\cdot154}{75}=149,89\ \Omega.$$

5. La echilibru $m=73/149,89=0,487$, $n=154/149,89=1,027$ și $p=$ $=110/149,89=0,794$, deci:

$$\delta_{min}=\frac{100\cdot(\pm0,2)\cdot3,75\cdot10^{-7}\cdot149,89}{4,5}\cdot\frac{(1+1,027)\,[1,027\,(1+0,487)+0,794\,(1+1,027)]}{1,027}=$$

$$=\pm\,0,0015\ \%$$

și

$$E_{r\,\lim R_x}=E_{r\,\lim R_2}+E_{r\,\lim R_3}+E_{r\,\lim R_4}+\delta_{min}=$$

$$=(\pm 0{,}05)+(\pm 0{,}05)+(\pm 0{,}05)+(\pm 0{,}0015)=\pm 0{,}1515\%.$$

Problema 4.2.7. Rezistența R_x avînd valoarea aproximativă 760 Ω se măsoară cu o punte simplă alimentată la tensiunea constantă $U=4$ V (fig. 4.2.2). Indicatorul de nul este un galvanometru, avînd rezistența interioară $R_g=140\ \Omega$, rezistența exterioară critică $R_{ek}=1\,000\ \Omega$ și constanta de curent $C_I=9\cdot 10^{-8}$ A/div.

1. Să se aleagă astfel valorile rezistențelor R_2, R_3 și R_4 încît la echilibru sensibilitatea punții să fie maximă, iar mișcarea echipajului mobil al galvanometrului în regimul tranzitoriu să fie aperiodică amortizată critică.

2. Să se afle valoarea rezistenței R_x, știind că la echilibru celelalte rezistențe din punte au avut valorile $R_2=1\,233\ \Omega$, $R_3=760\ \Omega$ și $R_4=1240{,}3\ \Omega$.

3. Să se calculeze eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,\lim R_x}$ de determinare a rezistenței R_x, cunoscînd că deviația minimă sesizabilă la galvanometru este $a_{min}=\pm 0{,}1$ diviziuni, iar rezistoarele R_2, R_3 și R_4 au clasa de precizie 0,1.

Soluție. 1. La echilibru sensibilitatea punții

$$S=\frac{U}{C_I\,(R_g+R_{ek})\,R_x}\,\frac{n}{(1+n)^2}$$

este maximă pentru $n=R_3/R_x=1$. Se alege $R_3=760\ \Omega$. Pentru ca mișcarea echipajului mobil al galvanometrului în regimul tranzitoriu să fie aperiodică amortizată critică se impune:

$$m=\frac{R_2}{R_x}=\frac{R_{ek}\,(1+n)}{R_x\cdot n}-1=\frac{1\,000\,(1+1)}{760\cdot 1}-1=1{,}632.$$

Rezultă:

$$R_2=mR_x=1{,}632\cdot 760=1\,240{,}3\ \Omega$$

și

$$R_4=mnR_x=1{,}632\cdot 1\cdot 760=1\,240{,}3\ \Omega.$$

2. $$R_x=\frac{R_2R_3}{R_4}=\frac{1\,233\cdot 760}{1240{,}3}=755{,}53\ \Omega.$$

3. Eroarea relativă procentuală limită de determinare a rezistenței R_x este:

$$E_{r\,\lim R_x}=E_{r\,\lim R_2}+E_{r\,\lim R_3}+E_{r\,\lim R_4}+\delta_{min},$$

unde δ_{min} reprezintă eroarea relativă procentuală limită determinată de pragul de sensibilitate al punții

$$\delta_{min}=\frac{100\,a_{min}\,C_I\,(R_g+R_{ek})}{U}\,\frac{(1+n)^2}{n}=\frac{100(\pm 0{,}1)\cdot 9\cdot 10^{8}\,(140+1\,000)}{4}\,\frac{(1+1)^2}{1}=$$

$$=\pm 0{,}001\%.$$

Deci :

$$E_{r\,lim\,Rx} = (\pm 0{,}1) + (\pm 0{,}1) + (\pm 0{,}1)\,(\pm 0{,}001) = \pm 0{,}301\%.$$

Problema 4.2.8. Rezistența R_x avînd valoarea aproximativă 1 200 Ω, se măsoară cu puntea simplă din fig. 4.2.2 alimentată la curentul constant $I=2$ mA. Indicatorul de nul este un galvanometru cu rezistența interioară $R_g=80\ \Omega$, rezistența exterioară critică $R_{ek}=500\ \Omega$ și constanta de curent $C_I=7{,}5\cdot 10^{-9}$ A/div.

1. Să se aleagă astfel valorile rezistențelor R_2, R_3 și R_4 încît sensibilitatea punții în echilibru să fie maximă, iar mișcarea echipajului mobil al galvanometrului în regimul tranzitoriu să fie aperiodică amortizată critică.

2. Cum se pot satisface condițiile impuse la punctul 1 în cazul în care rezistențele $R_3=R_4=1\,000\ \Omega$ sînt constante? Cît este în acest caz sensibilitatea punții față de cea obținută la punctul 1?

Soluție. 1. Se notează :

$$b = \frac{R_g + R_{ek}}{R_x} = \frac{80+500}{1\,200} = 0{,}483,$$

$$p = \frac{R_g}{R_x} = \frac{80}{1\,200} = 0{,}067.$$

Dacă

$$m = \frac{R_2}{R_x} = 1$$

și

$$n = \frac{R_3}{R_x} = \frac{b-p}{2-(b-p)} = \frac{0{,}483-0{,}067}{2-(0{,}483-0{,}067)} = 0{,}263,$$

adică

$$R_2 = mR_x = 1\,200\ \Omega, \qquad R_3 = nR_x = 315{,}6\ \Omega \quad \text{și} \quad R_4 = mnR_x = 315{,}6\ \Omega,$$

atunci sensibilitatea punții este maximă, avînd valoarea

$$S_{max} = \frac{I}{C_I R_x}\,\frac{b-p}{4b} = \frac{2\cdot 10^{-3}}{7{,}5\cdot 10^{-9}\cdot 1\,200}\cdot\frac{0{,}483-0{,}067}{4\cdot 0{,}483} = 47{,}8\ \text{div}/\Omega,$$

iar mișcarea echipajului mobil al galvanometrului în regimul tranzitoriu este aperiodică amortizată critică.

2. Valorile rezistențelor R_3 și R_4 nefiind corespunzătoare celor calculate la punctul 1, rezistența exterioară galvanometrului este mai mare decît rezistența exterioară critică R_{ek}. Legînd în paralel cu galvanometrul un rezistor cu rezistența

$$R_s = R_x\frac{n(1+m)(b-p)}{n(1+m)-(b-p)(1+n)} = 1\,200\,\frac{0{,}833\,(1+1)\,(0{,}483-0{,}067)}{0{,}833\,(1+1)-(0{,}483-0{,}067)\,(1+0{,}833)} = 921\ \Omega,$$

în care de data aceasta $n=1\,000/1\,200$, se asigură rezistenței exterioare galvanometrului valoarea rezistenței exterioare critice R_{ek} (fig. 4.2.4). Sensibilitatea punții are în acest caz expresia :

$$S = \frac{I}{C_I R_x}\,\frac{b-p}{b}\,\frac{m}{(1+m)^2},$$

fiind maximă pentru $m=1$, condiţie impusă şi anterior. Sensibilitatea maximă are aceeaşi valoare cu cea determinată la punctul 1.

Problema 4.2.9. O rezistenţă R_x, avînd valoarea aproximativă 800 Ω se măsoară cu puntea simplă din fig. 4.2.5 alimentată la tensiunea constantă $U=6$ V. Caracteristicile galvanometrelor, care sînt utilizabile, s-au redat în tabelul 4.2.3, iar cele două şunturi multiple disponibile au rezistenţele totale $R_{s1}=4\,000$ Ω şi $R_{s2}=10\,000$ Ω.

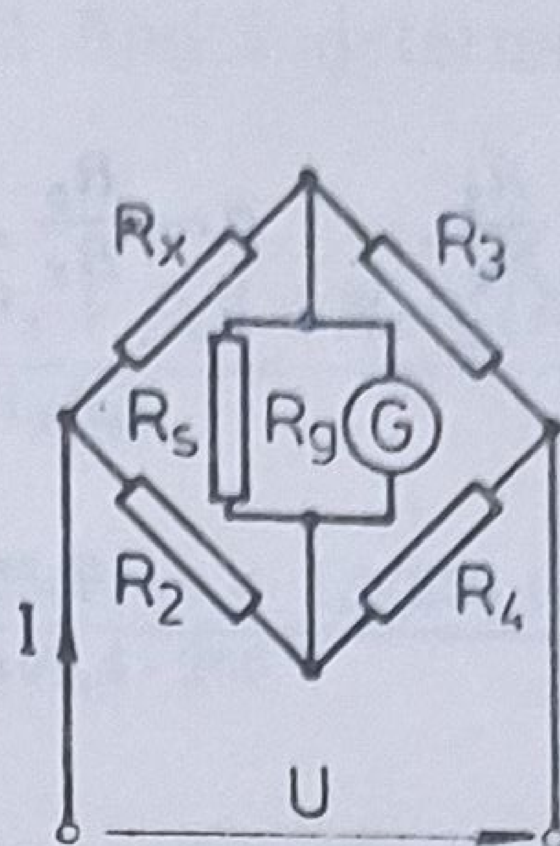


Fig. 4.2.4.

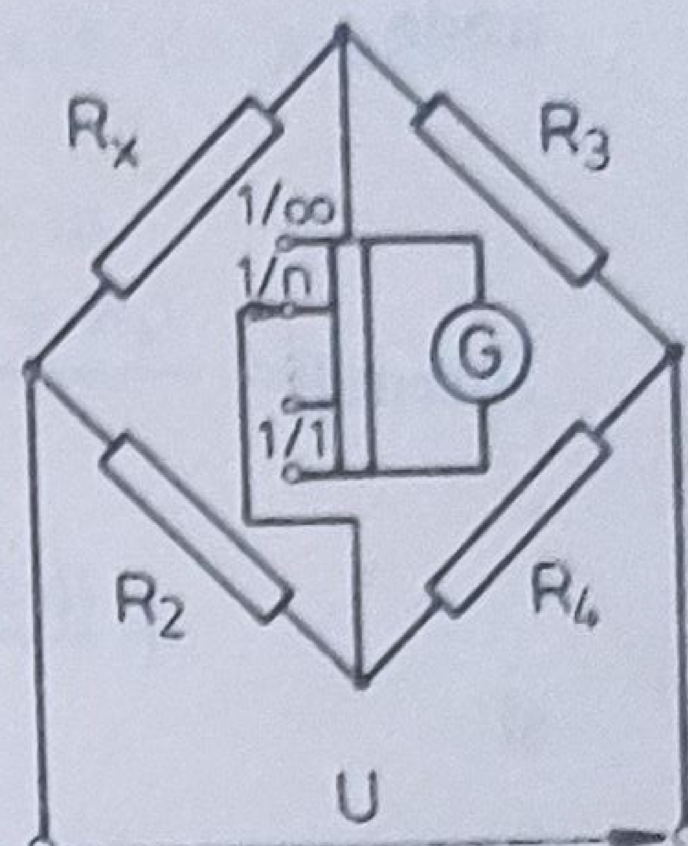


Fig. 4.2.5.

1. Să se aleagă valorile rezistenţelor R_2, R_3 şi R_4, galvanometrul şi şuntul multiplu astfel încît la echilibru în poziţia 1/1 a comutatorului şuntului sensibilitatea punţii să fie maximă, iar mişcarea echipajului mobil al galvanometrului în regimul tranzitoriu să fie aperiodică amortizată critică.

2. Să se determine valoarea rezistenţei R_x, ştiind că la echilibrul punţii $R_2=1\,928$ Ω, $R_3=800$ Ω şi $R_4=1\,940{,}6$ Ω.

Tabelul 4.2.3

Galvanometrul	Sensibilitatea faţă de tensiune, S_U [div/V]	Rezistenţa exterioară critică, R_{ek} [Ω]
1	$3{,}1\cdot10^4$	1 200
2	$5{,}4\cdot10^4$	110
3	$9{,}2\cdot10^3$	560

Soluţie. 1. Sensibilitatea punţii este cu atît mai mare cu cît rezistenţa totală a şuntului multiplu este mai mare. De aceea se alege şuntul multiplu cu rezistenţa totală R_{s2}.

Dintre galvanometre se pot accepta numai acelea a căror rezistenţă exterioară critică îndeplineşte condiţia

$$\frac{R_x R_{s2}}{R_x+2R_{s2}}<R_{ek}<R_{s2}.$$

Această condiţie este îndeplinită de galvanometrele 1 şi 3. Folosind galvanometrul 2 care nu respectă această condiţie, rezistenţa R_2 rezultă negativă.

Dintre galvanometrele 1 şi 3 se alege acela, care prezintă cea mai mare valoare a expresiei $S_U\,[1-(R_{ek}/R_{s2})]$ şi anume galvanometrul 1.

Sensibilitatea punţii este maximă la echilibrul în poziţia 1/1 a comutatorului şuntului, iar mişcarea echipajului mobil al galvanometrului în regimul tranzitoriu este aperiodică amortizată critică, dacă sînt respectate condiţiile:

$$m=\frac{2sq}{s-q}-1 \quad \text{şi} \quad n=1,$$

unde

$$m=\frac{R_2}{R_x},\qquad n=\frac{R_3}{R_x},\qquad q=\frac{R_{ek}}{R_x}\quad \text{și}\quad s=\frac{R_s}{R_x}.$$

Întrucît:

$$q=\frac{1\,200}{800}=1{,}5$$

și

$$s=\frac{10\,000}{800}=12{,}5,$$

rezultă

$$m=\frac{2\cdot 12{,}5\cdot 1{,}5}{12{,}5-1{,}5}-1=2{,}41,$$

$$R_2=mR_x=1\,928\ \Omega,\qquad R_3=nR_x=800\ \Omega\qquad \text{și}\ R_4=mnR_x=1\,928\ \Omega.$$

Sensibilitatea maximă a punții este:

$$S_{max}=\frac{US_U}{4R_x}\left(1-\frac{q}{s}\right)=\frac{6\cdot 3{,}1\cdot 10^4}{4\cdot 800}\left(1-\frac{1{,}5}{12{,}5}\right)=51{,}15\ \text{div}/\Omega.$$

2. $$R_x=\frac{R_2R_3}{R_4}=\frac{1\,928\cdot 800}{1\,940{,}6}=794{,}8\ \Omega.$$

Problema 4.2.10. Puntea simplă din fig. 4.2.2 este alimentată la tensiunea constantă $U=10$ V, galvanometrul avînd rezistența interioară $R_g=1{,}5\ \Omega$ și constanta de curent $C_I=10^{-6}$ A/div. Dacă rezistențele au valorile $R_2=250\ \Omega$, $R_3=531\ \Omega$ și $R_4=266\ \Omega$ atunci galvanometrul indică $a_1=4{,}7$ diviziuni în stînga gradației zero a scării. Mărind rezistența R_3 cu cea mai mică treaptă $r_3=1\ \Omega$, indicația galvanometrului trece la $a_2=8{,}2$ diviziuni în dreapta gradației zero a scării.

1. Să se determine valoarea rezistenței R_x.

2. Să se calculeze eroarea relativă procentuală limită de determinare a rezistenței R_x, știind că rezistențele R_2, R_3 și R_4 se cunosc cu erorile relative procentuale limită $E_{r\,\lim R_2}=E_{r\,\lim R_3}=E_{r\,\lim R_4}=\pm 0{,}1\%$, iar deviația minimă sesizabilă la galvanometru este $a_{min}=\pm 0{,}2$ div.

Soluție. 1. Valoarea rezistenței R_x se determină stabilind prin interpolare liniară valoarea rezistenței R_3' corespunzătoare echilibrului punții. Rezultă:

$$R_x=\frac{R_2R_3'}{R_4}=\frac{R_2}{R_4}\left(R_3+r_3\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)=\frac{250}{266}\left(531+1\cdot\frac{4{,}7}{4{,}7+8{,}2}\right)=499{,}4\ \Omega.$$

2. Eroarea relativă procentuală limită de determinare a rezistenței R_x este:

$$E_{r\,\lim R_x}=E_{r\,\lim R_2}+E_{\ \lim R_3}+E_{r\,\lim R_4}+\frac{100r_3}{R_3}\cdot\frac{a_{min}}{a_1+a_2}+\delta_{min},$$

în care δ_{min} este eroarea relativă procentuală limită determinată de pragul de sensibilitate al punții. Întrucît :

$$\delta_{min} = \frac{100\, C_I\, \alpha_{min}}{U}\, \frac{(R_x + R_3')\,[R_2R_4 + R_g\,(R_3 + R_4)] + R_xR_3'(R_2 + R_4)}{R_xR_4} =$$

$$= \frac{100 \cdot 10^{-6}\,(\pm 0,2)}{10} \left\{ \frac{(499,4+531,36)[250 \cdot 266 + 1,5(250+266)]}{499,4 \cdot 266} + \right.$$

$$\left. + \frac{499,4 \cdot 531,36\,(250+266)}{499,4 \cdot 266} \right\} = \pm\, 0,003\,\%\,,$$

rezultă

$$E_{r\,\lim Rx} = (\pm 0,1) + (\pm 0,1) + (\pm 0,1) + \frac{100 \cdot 1}{499,4} \cdot \frac{(\pm 0,2)}{4,7+8,2} + (\pm 0,003) =$$

$$= \pm 0,306\,\%\,.$$

Problema 4.2.11. Rezistența R_x a unui șunt se măsoară cu o punte dublă (fig. 4.2.6), folosindu-se ca indicator de nul un galvanometru cu rezistența interioară $R_g = 1,5\ \Omega$, constanta de curent $C_I = 10^{-5}$ A/div și deviația minimă sesizabilă $\alpha_{min} = \pm 0,1$ diviziuni. Rezistorul etalon are rezistența $R_e = 0,01\ \Omega$ și clasa de precizie 0,05. La echilibru rezistențele din punte au valorile $R_1 = R_3 = 11,2\ \Omega$ și $R_2 = R_4 = 25,8\ \Omega$, iar curentul prin punte este $I = 6$ A.

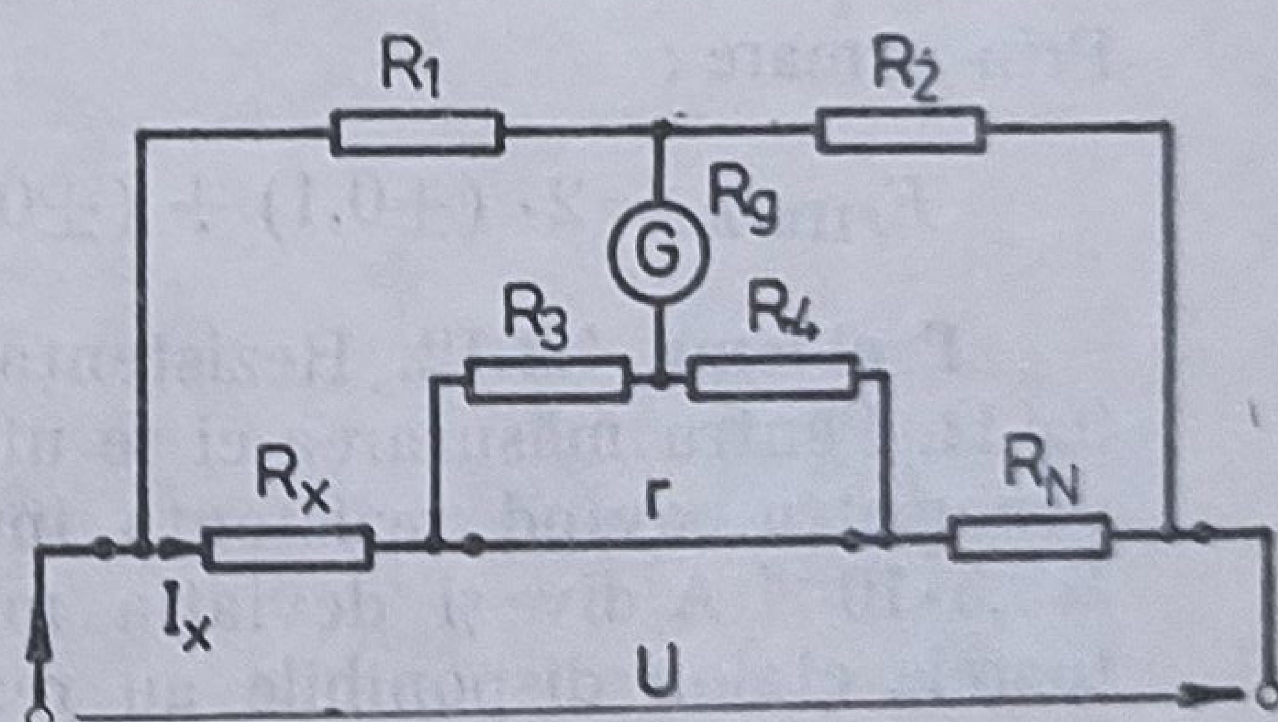


Fig. 4.2.6.

1. Să se determine valoarea rezistenței R_x a șuntului.

2. Să se afle eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,\lim Rx}$ de determinare a rezistenței șuntului, știind că rezistențele R_1, R_2, R_3 și R_4 au clasa de precizie 0,1, iar rezistența $r = 8 \cdot 10^{-4}\ \Omega$.

Soluție. 1. $R_x = \dfrac{R_1R_e}{R_2} = \dfrac{11,2 \cdot 0,01}{25,8} = 0,00434\ \Omega = 4,34\ \text{m}\Omega.$

2. Eroarea relativă procentuală limită are expresia

$$E_{r\,\lim Rx} = 2E_{r\,\lim R} + E_{r\,\lim Re} + \Delta + \delta_{min}\,,$$

în care $E_{r\,\lim R}$ și $E_{r\,\lim Re}$ reprezintă erorile relative procentuale limită corespunzătoare claselor de precizie ale rezistoarelor R_1, R_2, R_3 și R_4 și rezistorului etalon R_e, Δ este valoarea relativă procentuală a termenului

$$d = \frac{R_4 r}{R_3 + R_4 + r} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_3}{R_4}\right),$$

neglijat la determinarea rezistenței R_x, iar δ_{min} reprezintă eroarea relativă procentuală limită determinată de pragul de sensibilitate al punții.

Notînd

$$m=\frac{R_1}{R_x}=\frac{11,2}{0,00434}=2\,580,6,$$

$$n=\frac{R_e}{R_x}=\frac{0,01}{0,00434}=2,3,$$

$$p=\frac{R_g}{R_x}=\frac{1,5}{0,00434}=345,6,$$

şi considerînd că curentul prin rezistenţa necunoscută este $I_x \approx I=6$ A, rezultă :

$$\Delta=\frac{r}{R_x}\frac{4\,E_{r\,\lim R}}{n+1}=\frac{8\cdot 10^{-4}}{0,00434}\cdot\frac{4\cdot(\pm 0,1)}{2,3+1}=\pm\, 0,022\,\%$$

şi

$$\delta_{min}=\frac{100\, a_{min}\, C_I}{I_x}\left[2m+p\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=$$

$$=\frac{100\cdot(\pm\, 0,1)\cdot 10^{-5}}{6}\left[2\cdot 2580,6+345,6\left(1+\frac{1}{2,3}\right)\right]=\pm 0,094\%\,.$$

Prin urmare :

$$E_{r\lim Rx}=2\cdot(\pm 0,1)+(\pm 0,05)+(\pm 0,022)+(\pm 0,094)=\pm 0,366\%$$

Problema 4.2.12. Rezistenţa R_x a unui şunt are valoarea aproximativă 0,4 Ω. Pentru măsurarea ei se utilizează puntea dublă din fig. 4.2.6 cu un galvanometru, avînd rezistenţa interioară $R_g=6$ Ω, constanta de curent $C_I=5,5\cdot 10^{-8}$ A/div şi deviaţia minimă sesizabilă $a_{min}=\pm 0,2$ diviziuni. Rezistoarele etalon disponibile au rezistenţele $R_e=(0,01\,;\,0,1\,;\,1\,;\,10)$ Ω, puterea maximă admisibilă $P_e=0,5$ W şi clasa de precizie 0,02. Rezistoarele cu rezistenţele R_1, R_2, R_3 şi R_4 au clasa de precizie 0,05, iar rezistenţa legăturii dintre R_x şi R_e are valoarea $r=0,01$ Ω.

1. Să se aleagă valorile rezistenţelor R_e, R_1, R_2, R_3 şi R_4 din punte astfel încît la echilibru eroarea relativă procentuală limită de determinare a rezistenţei R_x a şuntului să fie cît mai mică.

2. Să se calculeze rezistenţa R_x şi eroarea relativă procentuală limită $E_{r\lim Rx}$ de determinare a ei, dacă la echilibru $R_e=1$ Ω, $R_1=R_3=10,1$ Ω şi $R_2=R_4=26$ Ω.

Soluţie. 1. Eroarea relativă procentuală limită de determinare a rezistenţei R_x este :

$$E_{r\lim Rx}=2E_{r\lim R}+E_{r\lim Re}+\Delta+\delta_{min},$$

în care $E_{r\lim R}$ şi $E_{r\lim Re}$ sînt erorile relative procentuale limită corespunzătoare claselor de precizie ale rezistoarelor cu rezistenţele R_1, R_2, R_3 şi R_4 şi a rezistorului etalon R_e, Δ este eroarea relativă procentuală cauzată de neglijarea unui termen din relaţia de echilibru, iar δ_{min} eroarea relativă procentuală limită determinată de pragul de sensibilitate al punţii. Dacă se notează $m=$

$=R_1/R_x$, $n=R_e/R_x$ și $p=R_g/R_x$ și se consideră că rezistorul etalon este solicitat la puterea maximă admisibilă, atunci :

$$\Delta=\frac{r}{R_x}\,\frac{4\,E_{r\,lim\,R}}{n+1}$$

și

$$\delta_{min}=\frac{100\,a_{min}\,C_I\sqrt{R_x}}{\sqrt{P_e}}\cdot\frac{p\,(n+1)+2mn}{\sqrt{n}}\,.$$

Termenul Δ scade odată cu creșterea lui n în timp ce termenul δ_{min} este cu atît mai mic cu cît m este mai mic. Dar pentru a elimina influența rezistențelor de contact se recomandă ca rezistențele R_1, R_2, R_3 și R_4 să nu fie mai mici decît 10 Ω, cu alte cuvinte valoarea minimă a lui m este :

$$\frac{10}{R_x}=\frac{10}{0{,}4}=25.$$

Eroarea relativă procentuală limită δ_{min} determinată de pragul de sensibilitate al punții este minimă pentru :

$$n=\frac{p}{p+2m}=\frac{15}{15+2\cdot 25}=0{,}23$$

Alegînd însă $n<1$, termenul Δ rezultă prea mare față de termenul δ_{min}. Pentru a obține o eroare relativă procentuală limită de măsurare apropiată de cea minimă, se alege $n\geqslant 1$, fără ca prin aceasta termenul δ_{min} să crească prea mult. De aceea se alege rezistența etalon ce are rezistența $R_e=1$ Ω, astfel încît :

$$n=\frac{R_e}{R_x}=\frac{1}{0{,}4}=2{,}5.$$

Deci :

$$R_1=R_3=mR_x=25\cdot 0{,}4=10\ \Omega$$

și

$$R_2=R_4=mnR_x=25\cdot 2{,}5\cdot 0{,}4=25\ \Omega.$$

2. Rezistența șuntului

$$R_x=\frac{R_1R_e}{R_2}=\frac{10{,}1\cdot 1}{26}=0{,}3885\ \Omega$$

se determină cu eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,lim\,Rx}=0{,}1215$ % stabilită pe baza relațiilor de la punctul 1.

Problema 4.2.13. Indicatorul de nul al unei punți de c. a. pentru măsurarea impedanței Z_x este un osciloscop catodic (fig. 4.2.7). Tensiunea de dezechilibru U_{dez} se aplică prin intermediul amplificatorului A plăcilor de deviație pe verticală a spotului tubului catodic, plăcile de deviație pe orizontală fiind legate la tensiunea de alimentare U a punții de c.a. Tensiunea de ieșire a

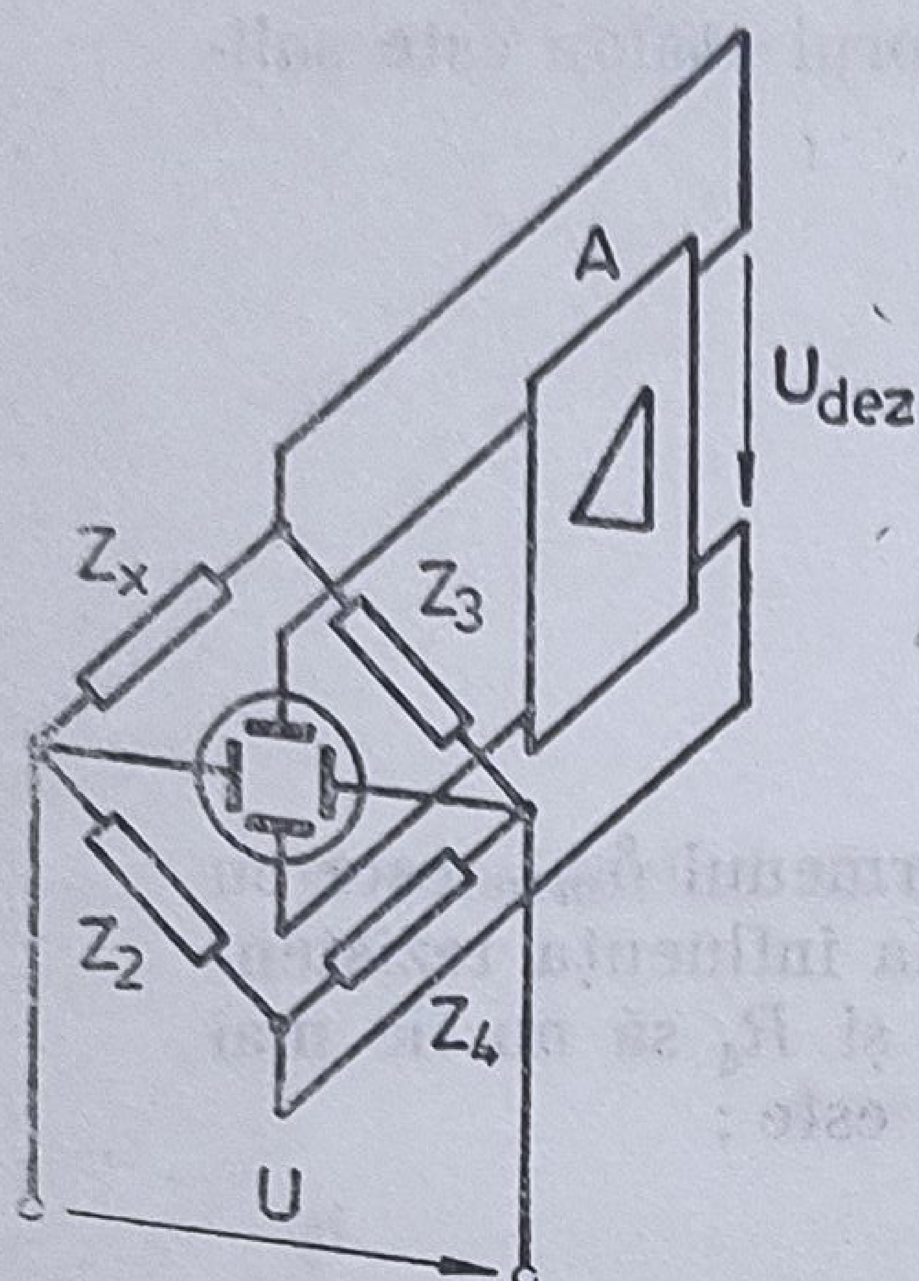


Fig. 4.2.7.

amplificatorului A nu este defazată față de tensiunea de intrare, iar puntea și indicatorul de nul sînt în perfectă stare de funcționare. În decursul folosirii punții de c.a., pe ecranul osciloscopului pot apare diferite figuri geometrice și anume: 1. punct, 2. segment de dreaptă orizontală, 3. segment de dreaptă oblică, 4. cerc, 5. elipsă cu axele verticală și orizontală, 6. elipsă cu axele oblice. Să se precizeze în care din aceste situații puntea de c.a. este în echilibru. Ce se poate afirma în cazul apariției celorlalte figuri geometrice?

Soluție. Puntea de c.a. este în echilibru în situația 2, deoarece în acest caz tensiunea de dezechilibru U_{dez} a punții este nulă, spotul tubului catodic deplasîndu-se numai sub acțiunea tensiunii de alimentare U a punții de c. a.

În celelalte cazuri:

1. Lipsește tensiunea de alimentare U;

3. Puntea de c.a. nu este în echilibru, tensiunea de dezechilibru U_{dez} fiind în fază sau în opoziție de fază cu tensiunea de alimentare U;

4 și 5. Puntea de c. a. nu este în echilibru, tensiunea de dezechilibru U_{dez} fiind defazată cu $\pm\pi/2$ rad față de tensiunea de alimentare U;

6. Puntea de c. a. nu este în echilibru.

Problema 4.2.14. Valorile aproximative ale inductivității L_x și rezistenței R_x ale unei bobine sînt 0,2 H și 110 Ω. Pentru determinarea lor mai precisă ele se compară prin intermediul punții de c.a. Maxwell din fig. 4.2.8 cu o bobină etalon, avînd inductivitatea $L_e=0{,}1$ H și rezistența $R_e=16{,}8$ Ω. Puntea se alimentează cu o tensiune alternativă, avînd valoarea efectivă $U=10$ V și frecvența $f=800$ Hz.

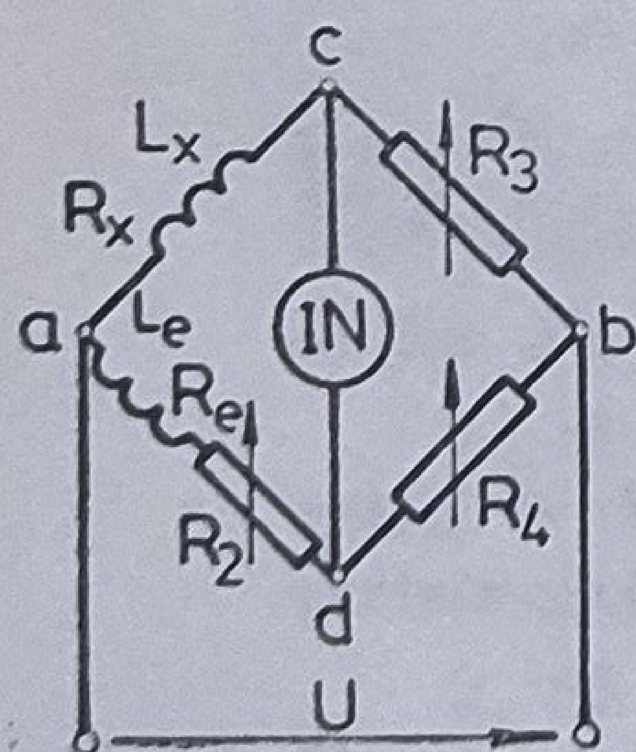


Fig. 4.2.8.

1. Să se aleagă astfel valorile rezistențelor R_3 și R_4 încît la echilibru sensibilitatea punții față de tensiune să fie maximă.

2. Știind că la echilibru valorile rezistențelor din punte sînt $R_2=38$ Ω, $R_3=1\,010{,}8$ Ω și $R_4=496$ Ω, să se determine inductivitatea L_x și rezistența R_x ale bobinei.

3. De cîte ori este mai mică sensibilitatea punții față de tensiune, dacă alimentarea ei se face între punctele c și d?

Soluție. 1. Sensibilitatea față de tensiune a punții de c.a. din fig. 4.2.8 este:

$$S_U=\frac{U}{Z_x}\,\frac{a}{1+2a\cos\theta+a^2},$$

în care

$$Z_x=\sqrt{(2\pi fL_x)^2+R_x^2}=\sqrt{(2\cdot3{,}14\cdot800\cdot0{,}2)^2+110^2}=1\,010{,}8\ \Omega,$$

$$a=\frac{Z_x}{R_3}$$

şi

$$\theta=\operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi f L_x}{R_x}\right).$$

Deoarece sensibilitatea S_U are valoarea maximă cînd $a=1$, se alege $R_3=Z_x=$ $=1\,010{,}8\ \Omega$. Valoarea rezistenţei R_4 rezultă din :

$$R_4=\frac{L_e R_3}{L_x}=\frac{0{,}1\cdot 1010{,}8}{0{,}2}=505{,}4\ \Omega.$$

2. $$L_x=\frac{R_3 L_e}{R_4}=\frac{1010{,}8\cdot 0{,}1}{496}=0{,}204\ \mathrm{H},$$

$$R_x=\frac{R_3(R_e+R_2)}{R_4}=\frac{1010{,}8\cdot(16{,}8+38)}{496}=111{,}7\ \Omega.$$

3. Impedanţa măsurată are valoarea :

$$Z_x=\sqrt{(2\cdot 3{,}14\cdot 800\cdot 0{,}204)^2+111{,}7^2}=1\,031\ \Omega.$$

Dacă puntea se alimentează între punctele a şi b, atunci

$$a=\frac{Z_x}{R_3}=\frac{1\,031}{1010{,}8}=1{,}02,$$

$$\theta=\operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi f L_x}{R_x}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 800\cdot 0{,}204}{111{,}7}\right)=1{,}462\ \mathrm{rad}$$

$$S_U=\frac{10}{1\,031}\,\frac{1{,}02}{1+2\cdot 1{,}02\cdot\cos 1{,}462+1{,}02^2}=0{,}00434\ \mathrm{V}/\Omega,$$

iar dacă alimentarea punţii are loc între punctele c şi d, atunci

$$a=\frac{Z_x}{\sqrt{(2\pi f L_e)^2+(R_e+R_2)^2}}=\frac{1\,031}{\sqrt{(2\cdot 3{,}14\cdot 800\cdot 0{,}1)^2+(16{,}8+38)^2}}=2{,}05$$

$$\theta=\operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi f L_x}{R_x}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi f L_e}{R_e+R_2}\right)=0$$

$$S_U=\frac{10}{1\,031}\,\frac{2{,}05}{1+2\cdot 2{,}05\cos 0+2{,}05^2}=0{,}00214\ \mathrm{V}/\Omega.$$

Sensibilitatea faţă de tensiune a punţii alimentată între punctele c şi d este de 2,03 ori mai mică decît sensibilitatea punţii alimentată între punctele a şi b.

Problema 4.2.15. Se presupune că rezistenţa R_2 din fig. 4.2.8 este legată în serie cu bobina, avînd inductivitatea L_x şi rezistenţa R_x, restul schemei rămînînd neschimbat. Să se determine inductivitatea L_x şi rezistenţa R_x, ştiind că la echilibru $L_e=0{,}1$ H, $R_e=35{,}2\ \Omega$, $R_2=12\ \Omega$, $R_3=1\,221\ \Omega$ şi $R_4=$

$=715\ \Omega$. Care dintre bobine are constanta de timp mai mare și cum influențează aceasta asupra posibilității de echilibrare a punții de c.a. din fig. 4.2.8 ?

Soluție. $L_x=\frac{R_3L_e}{R_4}=\frac{1\,221\cdot 0{,}1}{715}=0{,}171$ H,

$$R_x=\frac{R_eR_3}{R_4}-R_2=\frac{35{,}2\cdot 1\,221}{715}-12=48{,}1\ \Omega.$$

Bobina etalon are constanta de timp mai mică :

$$\tau_e=\frac{L_e}{R_e}=\frac{0{,}1}{35{,}2}=2{,}84\cdot 10^{-3}\text{ s}<\tau_x=\frac{L_x}{R_x}=\frac{0{,}171}{48{,}1}=3{,}56\cdot 10^{-3}\text{ s}.$$

Puntea se poate echilibra numai dacă rezistența R_2 este legată în serie cu bobina avînd constanta de timp mai mare.

Problema 4.2.16. Puntea de c.a. Maxwell din fig. 4.2.8 este în echilibru pentru $L_e=0{,}01$ H, $R_e=15\ \Omega$, $R_2=32\ \Omega$, $R_3=103\ \Omega$ și $R_4=77\ \Omega$. Tensiunea de alimentare a punții are valoarea efectivă $U=5$ V și frecvența $f=1\,000$ Hz, iar indicatorul de nul are – la aceeași frecvență – pragul de sensibilitate $I_{min}=\pm 6\cdot 10^{-6}$ A și impedanța $Z_i=(110+j.100)\ \Omega$.

1. Să se determine inductivitatea L_x și rezistența R_x.

2. Știind că inductivitatea L_e are clasa de precizie 1, rezistențele R_e, R_2, R_3 și R_4 au clasa de precizie 0,1, iar impedanța interioară a sursei de alimentare a punții e neglijabilă, să se determine erorile relative procentuale limită $E_{r\lim Lx}$ și $E_{r\lim Rx}$ de determinare a inductivității L_x și a rezistenței R_x.

Soluție. 1. $L_x=\frac{R_3L_e}{R_4}=\frac{103\cdot 0{,}01}{77}=0{,}0134$ H,

$$R_x=\frac{R_3(R_e+R_2)}{R_4}=\frac{103\,(15+32)}{77}=62{,}9\ \Omega.$$

2. Se calculează valoarea expresiei :

$$N=|(R_x+j\,2\pi fL_x)(R_e+R_2+R_4+j\,2\pi fL_e)R_3+$$
$$+(R_e+R_2+j\,2\pi fL_x)(R_x+R_3+j\,2\pi fL_x)R_4+$$
$$+\underline{Z}_i(R_x+R_3+j\,2\pi fL_x)(R_e+R_2+R_4+j\,2\pi fL_e)|=$$
$$=|(62{,}9+j.\,2\cdot 3{,}14\cdot 1\,000\cdot 0{,}0134)(15+32+77+j\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 1\,000\cdot 0{,}01)\cdot 103+$$
$$+(15+32+j\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 1\,000\cdot 0{,}01)(62{,}9+103+j\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 1\,000\cdot 0{,}0134)\cdot 77+$$
$$+(110+j\cdot 100)(62{,}9+103+j\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 1\,000\cdot 0{,}0134)(15+32+77+$$
$$+j\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 1\,000\cdot 0{,}01)|=3{,}297\cdot 10^7\Omega^3.$$

La determinarea inductivității eroarea relativă procentuală limită determinată de pragul de sensibilitate al punții este :

$$\delta_{min\,Lx} = \frac{100\,I_{min}\,N}{2\pi f L_x R_4 U} = \frac{100\,(\pm 6)\cdot 10^{-6}\cdot 3{,}297\cdot 10^{7}}{2\cdot 3{,}14\cdot 1\,000\cdot 0{,}0134\cdot 77\cdot 5} = \pm 0{,}611\%,$$

iar la determinarea rezistenței R_x

$$\delta_{min\,Rx} = \frac{100\,I_{min}\,N}{R_x R_4 U} = \frac{100\cdot(\pm 6)\cdot 10^{-6}\cdot 3{,}297\cdot 10^{7}}{62{,}9\cdot 77\cdot 5} = \pm 0{,}817\ \%.$$

Notînd cu $E_{r\,lim\,Le}$, $E_{r\,lim\,Re}$, $E_{r\,lim\,R2}$, $E_{r\,lim\,R3}$ și $E_{r\,lim\,R4}$ erorile relative procentuale limită cu care se cunosc L_e, R_e, R_2, R_3 și R_4, eroarea relativă procentuală limită de determinare a inductivității L_x este :

$$E_{r\,lim\,x} = E_{r\,lim\,R3} + E_{r\,lim\,R4} + E_{r\,lim\,Le} + \delta_{min\,Lx} =$$
$$= (\pm 0{,}1) + (\pm 0{,}1) + (\pm 1) + (\pm 0{,}611) = \pm 1{,}811\%,$$

iar eroarea relativă procentuală limită de determinare a rezistenței R_x

$$E_{r\,lim\,Rx} = E_{r\,lim\,R3} + E_{r\,lim\,R4} + \frac{R_e E_{r\,lim\,Re} + R_2 E_{r\,lim\,R2}}{R_e + R_2} + \delta_{min\,Rx} =$$

$$= (\pm 0{,}1) + (\pm 0{,}1) + \frac{15\cdot(\pm 0{,}1) + 32\cdot(\pm 0{,}1)}{15+32} + (\pm 0{,}817) = \pm 1{,}117\%.$$

Problema 4.2.17. Valorile aproximative ale inductivității L_x și rezistenței R_x ale unei bobine sînt 0,4 H și 80 Ω. Pentru măsurarea lor mai precisă se realizează puntea de c.a. Maxwell-Wien din fig. 4.2.9, în care rezistențele R_2, R_3 și R_4 sînt reglabile între 0 și 10 000 Ω, iar capacitatea C_4 între 0 și 1 μF. Tensiunea de alimentare a punții are valoarea efectivă U și frecvența $f = 800$ Hz, iar indicatorul de nul are impedanța interioară foarte mare.

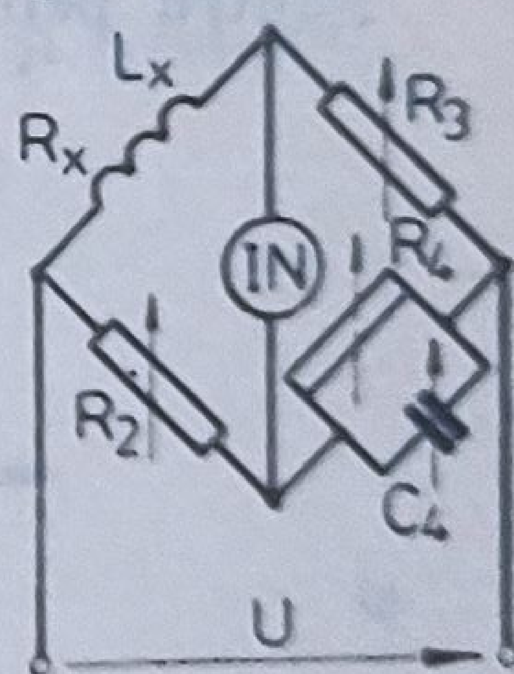


Fig. 4.2.9.

1. Să se aleagă valorile parametrilor R_2, R_3, R_4 și C_4 și să se precizeze perechea de parametri, care trebuie reglați, pentru a asigura în imediata apropiere a echilibrului punții sensibilitatea maximă față de tensiune și convergența optimă.

2. Să se determine inductivitatea L_x și rezistența R_x, știind că la echilibru $R_2 = 248{,}6$ Ω, $R_3 = 2\,011{,}2$ Ω, $R_4 = 6\,140{,}1$ Ω și $C_4 = 0{,}822$ μF.

Soluție. 1. Dacă impedanța interioară a indicatorului de nul este infinită, atunci sensibilitatea față de tensiune a punții din fig. 4.2.9 este :

$$S_U = \frac{U}{Z_x}\,\frac{a}{1 + 2a\cos\theta + a^2},$$

unde

$$Z_x = \sqrt{(2\pi f L_x)^2 + R_x^2} = \sqrt{(2\cdot 3{,}14\cdot 800\cdot 0{,}4)^2 + 80^2} = 2011{,}2\ \Omega,$$

$$a = \frac{Z_x}{R_3},$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left|\frac{2\pi f L_x}{R_x}\right|.$$

Întrucît sensibilitatea S_U este maximă cînd $a = 1$ se alege $R_3 = Z_x = 2011{,}2\Omega$.

O punte de c.a. are convergența cu atît mai bună cu cît unghiul de convergență $\varkappa$ este mai apropiat de $\pi/2$ rad, adică raportul $2\varkappa/\pi$ mai apropiat de 1. Pentru perechea de parametri R_2 și R_4

$$\varkappa_1 = 2\,\mathrm{arctg}\,(2\,\pi f R_4 C_4) - \mathrm{arctg}\left(\frac{2\,\pi f L_x}{R_x}\right).$$

Deorece la echilibru $R_4C_4 = L_x/R_x$, rezultă :

$$\varkappa_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{2\,\pi f L_x}{R_x}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 800\cdot 0{,}4}{80}\right) = 1{,}53 \text{ rad}$$

și

$$\frac{2\varkappa_1}{\pi} = \frac{2\cdot 1{,}53}{3{,}14} = 0{,}975.$$

Pentru perechea de parametri R_2 și C_4

$$\varkappa_2 = \mathrm{arctg}\left(\frac{R_x}{2\pi f L_x}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{80}{2\cdot 3{,}14\cdot 800\cdot 0{,}4}\right) = 0{,}04 \text{ rad}$$

și

$$\frac{2\varkappa_2}{\pi} = \frac{2\cdot 0{,}04}{3{,}14} = 0{,}025.$$

Pentru perechea de parametri R_4 și C_4

$$\varkappa_3 = \mathrm{arctg}\left(\frac{2\,\pi f L_x}{R_x}\right) + \mathrm{arctg}\left(\frac{R_x}{2\,\pi f L_x}\right) =$$

$$= \mathrm{arctg}\left(\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 800\cdot 0{,}4}{80}\right) + \mathrm{arctg}\left(\frac{80}{2\cdot 3{,}14\cdot 800\cdot 0{,}4}\right) = 1{,}57 \text{ rad}$$

și

$$\frac{2\varkappa_3}{\pi} = \frac{2\cdot 1{,}57}{3{,}14} = 1.$$

Convergența optimă se obține la reglarea parametrilor R_4 și C_4.

Alegerea valorilor parametrilor R_2, R_4 și C_4 poate fi făcută arbitrar. Dacă se consideră $C_4 = 0{,}8\ \mu\mathrm{F}$, atunci rezultă

$$R_2 = 248{,}6\ \Omega \text{ și } R_4 = 6249{,}8\ \Omega.$$

2. $L_x = R_2R_3C_4 = 248{,}6\cdot 2\,111{,}2\cdot 0{,}822\cdot 10^{-6} = 0{,}411$ H,

$$R_x = \frac{R_2R_3}{R_4} = \frac{248{,}6\cdot 2\,011{,}2}{6\,144} = 81{,}4\ \Omega.$$

Problema 4.2.18. Inductivitatea mutuală M_x se măsoară prin comparație cu inductivitatea mutuală etalon M_e, folosindu-se puntea Maxwell-Campbell din fig. 4.2.10.

1. Să se precizeze tensiunea de alimentare şi indicatorul de nul, care se pot folosi în cazul punţii din fig. 4.2.10.

2. Să se calculeze inductivitatea mutuală M_x, ştiind că bobina etalon are inductivitatea mutuală $M_e=0{,}1$ H, inductivităţile de dispersie neglijabile şi rezistenţa $R_e = 123\ \Omega$, iar la echilibru $R_x=8{,}9\ \Omega$, $R_1=1\,320\ \Omega$ şi $R_2=5\,783\ \Omega$.

3. Să se determine eroarea relativă procentuală limită de măsurare a inductivităţii mutuale M_x, ştiind că inductivitatea M_e are clasa de precizie 1, rezistenţele R_1 şi R_2 au clasele de precizie 0,1 şi rezistenţele R_e şi R_x se cunosc cu erorile relative procentuale limită $E_{r\,\lim R} = \pm 0{,}6\,\%$, iar sensibilitatea indicatorului de nul este foarte mare.

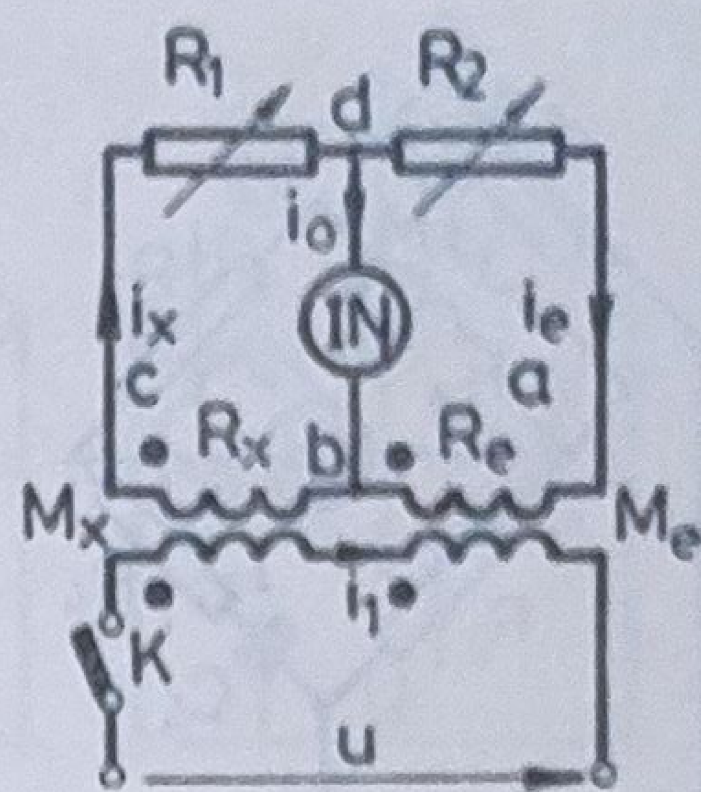


Fig. 4.2.10.

Soluţie. 1. Măsurarea poate avea loc cu ajutorul punţii din fig. 4.2.10 numai dacă în circuitul *abcd* se induce t. e. m., adică atunci cînd curentul i_1 este variabil în funcţie de timp.

Tensiunea de alimentare poate fi continuă, caz în care măsurarea are loc în regimul tranzitoriu produs prin închiderea sau deschiderea întrerupătorului *K*. drept indicator de nul folosindu-se un galvanometru balistic.

Măsurarea poate avea loc şi dacă tensiunea de alimentare este alternativă. În acest caz indicatorul de nul este un galvanometru vibrator sau un indicator de nul electronic, ambele acordate la frecvenţa tensiunii de alimentare.

Dacă frecvenţa tensiunii de alimentare alternative are valoarea apropiată de 1 kHz, atunci este avantajoasă folosirea drept indicator de nul a unei căşti telefonice, sensibilitatea auditivă fiind deosebit de ridicată la această frecvenţă.

2. Cînd puntea din fig. 4.2.10 este în echilibru, atunci $i_0=0$ şi $i_e=i_x\neq 0$. Conform teoremelor lui Kirchhoff rezultă :

$$M_e \frac{di_1}{dt} = (R_2+R_e)\, i_e,$$

$$M_x \frac{di_1}{dt} = (R_1+R_x)\, i_x.$$

Din cele două ecuaţii se obţine :

$$M_x= \frac{R_1 + R_x}{R_2 + R_e} M_e = \frac{1\,320 + 8{,}9}{5\,783 + 123}\, 0{,}1=0{,}0225 \text{ H}.$$

3. Notînd cu $E_{r\,\lim M_e}=\pm 1\%$ eroarea relativă procentuală limită cu care se cunoaşte inductivitatea mutuală M_e şi cu $E_{r\,\lim R_1}=E_{r\,\lim R_2}=\pm\, 0{,}1\%$ erorile relative procentuale limită corespunzătoare rezistenţelor R_1 şi R_2, eroarea relativă procentuală limită de determinare a inductivităţii mutuale M_x este :

$$E_{r\,\lim M_x} = E_{r\,\lim M_e} + \frac{R_1}{R_1 + R_x} E_{r\,\lim R_1} + \frac{R_1}{R_1+R_e} E_{r\,\lim R_2} + \frac{R_x}{R_1 + R_x} E_{r\,\lim R} +$$

$$+ \frac{R_e}{R_2 + R_e} E_{r\,\lim R} = (\pm 1) + \left(\frac{1\,320}{1\,320 + 8{,}9} + \frac{5\,783}{5\,783 + 123}\right)(\pm 01) +$$

$$+ \left(\frac{8{,}9}{1\,320 + 8{,}9} + \frac{123}{5\,783 + 123}\right)(\pm\, 0{,}6) = \pm\, 1{,}199\%.$$

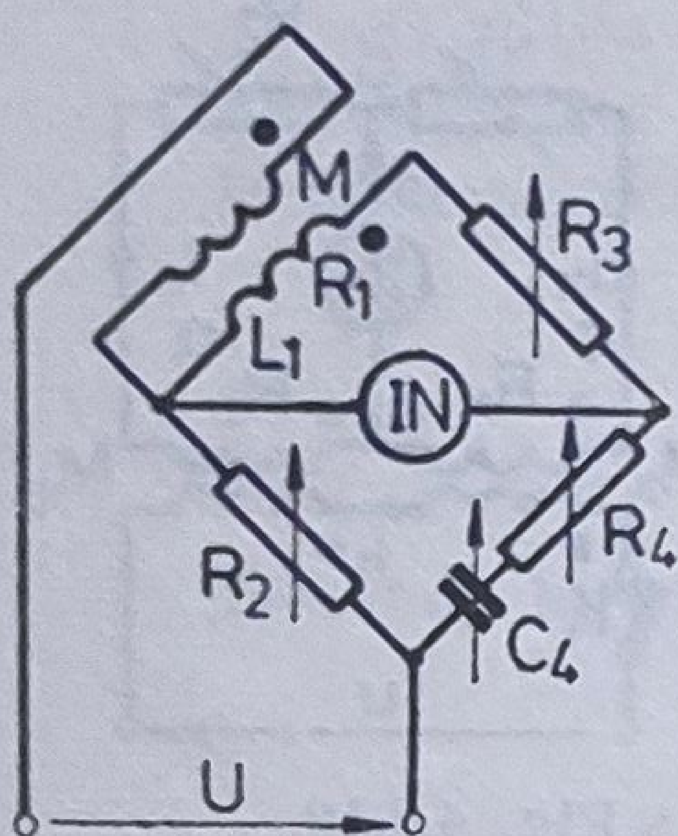


Fig. 4.2.11.

Problema 4.2.19. Puntea de c.a. Chaterjee din fig. 4.2.11 este în echilibru cînd $R_2 = 226\ \Omega$, $R_3 = 181{,}2\ \Omega$, $R_4 = 104\ \Omega$ și $C_4 = 6{,}2\ \mu F$. Să se determine inductivitatea mutuală M dintre cele două înfășurări și inductivitatea L_1 a înfășurării a cărei rezistență este $R_1 = 35{,}6\ \Omega$. Se poate echilibra puntea dacă $M > L_1$?

Soluție. $M = (R_1 + R_3)\, R_2 C_4 = (35{,}6 + 181{,}2)\, 226 \cdot 6{,}2 \cdot 10^{-6} = 0{,}304$ H,

$L_1 = (R_1 + R_3)(R_2 + R_4)\, C_4 = (35{,}6 + 181{,}2)(226 + 104)\, 6{,}2 \cdot 10^{-6} = 0{,}444$ H.

La echilibru între cele două inductivități există relația:

$$M = \frac{R_2 L_1}{R_2 + R_4}.$$

Întrucît

$$\frac{R_2}{R_2 + R_4} < 1,$$

rezultă că puntea se poate echilibra numai dacă $M < L_1$.

Problema 4.2.20. Capacitatea C a unui condensator fără pierderi se măsoară prin intermediul punții de c.a. din fig. 4.2.12. Știind că impedanța $\underline{Z}_2$ are caracter pur rezistiv, să se determine caracterul impedanțelor $\underline{Z}_3$ și $\underline{Z}_4$ astfel încît puntea să poată fi echilibrată.

Soluție. Se notează cu ω frecvența circulară a tensiunii alternative U de alimentare a punții, cu $\underline{Z}_1 = -j/\omega C$ impedanța condensatorului C și cu φ_1, φ_2, φ_3 și φ_4 argumentele impedanțelor $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$, și $\underline{Z}_4$. Cînd puntea de c.a. este în echilibru, atunci

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \underline{Z}_3$$

sau

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$$

și

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3.$$

Întrucît $\varphi_1 = -\pi/2$ rad și $\varphi_2 = 0$, rezultă:

$$\varphi_3 = \varphi_4 = \frac{\pi}{2}.$$

Această condiție este satisfăcută pentru impedanțele $\underline{Z}_3$ și $\underline{Z}_4$ redate în tabelul 4.2.4.

Tabelul 4.2.4

$\underline{Z}_3$	φ_3 [rad]	$\underline{Z}_4$	φ_4 [rad]
Rezist. pură	0	Ind. pură	$\pi/2$
Cap. cu pierd.	între $-\pi/2$ și 0	Ind. cu pierd.	între 0 și $\pi/2$
Cap. fără pierd.	$-\pi/2$	Rezist. pură	0

Problema 4.2.21. Pentru măsurarea capacității C_x și a tangentei unghiului de pierderi $\operatorname{tg} \delta_x$ ale unui condensator se folosește puntea de c. a. De Sauty din fig. 4.2.13. Indicatorul de nul are impedanța interioară foarte mare, iar tensiunea de alimentare a punții are valoarea efectivă $U = 10$ V și frecvența $f = 1\,000$ Hz.

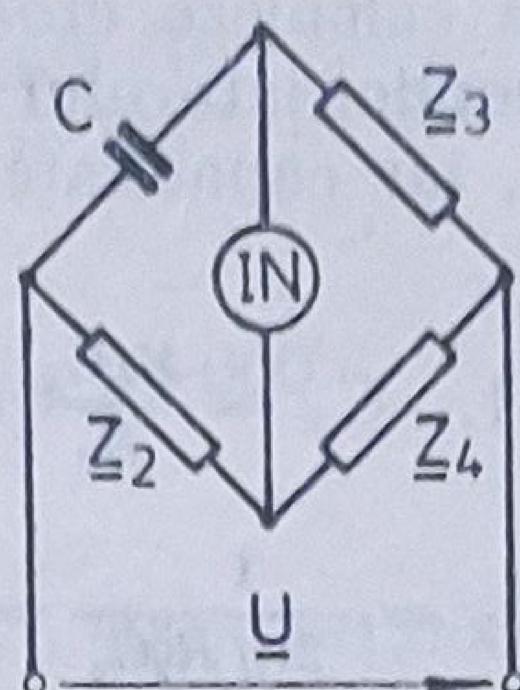


Fig. 4.2.12.

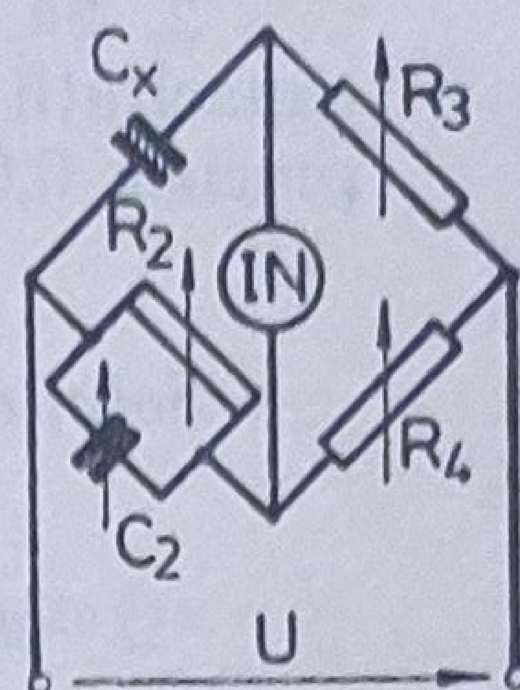


Fig. 4.2.13.

1. Să se determine capacitatea C_x și tangenta unghiului de pierderi $\operatorname{tg} \delta_x$ ale condensatorului, știind că la echilibru $C_2 = 0{,}5$ µF, $R_2 = 20\,300\ \Omega$, $R_3 = 318\ \Omega$ și $R_4 = 300\ \Omega$.

2. Să se calculeze sensibilitatea relativă față de tensiune S'_U a punții considerate și tensiunea de dezechilibru U_{dez} produsă de modificarea cu 10^{-3} a tangentei unghiului de pierderi $\operatorname{tg} \delta_x$ a condensatorului față de valoarea determinată la punctul 1.

Soluție. 1. $C_x = \dfrac{R_4 C_2}{R_3} = \dfrac{300 \cdot 0{,}5}{318} = 0{,}472\ \mu\text{F},$

$$\operatorname{tg} \delta_x = \frac{1}{2\pi f\, R_2 C_2} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1\,000 \cdot 20\,300 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}} = 0{,}0157.$$

2. Sensibilitatea relativă față de tensiune a punții este:

$$S'_U = \frac{aU}{1 + 2a \cos \theta + a^2},$$

în care

$$a = \frac{Z_x}{R_3} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_x}}{2\pi f\, R_3 C_x} = \frac{\sqrt{1 + 0{,}0157^2}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1\,000 \cdot 318 \cdot 0{,}472 \cdot 10^{-6}} = 1{,}061$$

și

$$\theta = \delta_x - \frac{\pi}{2} = 0{,}0157 - 1{,}5708 = -1{,}5551 \text{ rad.}$$

Rezultă:

$$S'_U = \frac{1{,}061 \cdot 10}{1 + 2 \cdot 1{,}061 \cos(-1{,}5551) + 1{,}061^2} = 4{,}91 \text{ V.}$$

Tensiunea de dezechilibru este:

$$U_{dez} = \frac{10^{-3} S'_U}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_x}} \approx 10^{-3} S'_U = 0{,}00491 \text{ V} = 4{,}91 \text{ mV.}$$

Problema 4.2.22. Cu ajutorul punții de c.a. De Sauty din fig. 4.2.13 se măsoară capacitatea C_x și tangenta unghiului de pierderi $\operatorname{tg} \delta_x$ ale unui condensator. Puntea este în echilibru cînd $C_2 = 0{,}245$ µF, $R_2 = 59\,630\ \Omega$, $R_3 = 837\ \Omega$ și $R_4 = 1\,000\ \Omega$. Tensiunea de alimentare a punții are valoarea efectivă $U = 50$ V și frecvența $f = 800$ Hz, iar indicatorul de nul are — la aceeași frecvență — pragul de sensibilitate $I_{min} = \pm 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ A și impedanța $\underline{Z}_i = (5000 + j \cdot 5\,800)\ \Omega$.

1. Să se determine capacitatea C_x și tangenta unghiului de pierderi $\operatorname{tg} \delta_x$ ale condensatorului.

2. Să se calculeze eroarea relativă procentuală limită de determinare a capacității condensatorului C_x, știind că rezistențele R_3 și R_4 au clasa de precizie 0,05, iar capacitatea C_2 are clasa de precizie 0,2.

Soluție. 1. $C_x = \frac{R_4 C_2}{R_3} = \frac{1\,000 \cdot 0{,}245}{837} = 0{,}293 \mu\ \mathrm{F}$,

$$\operatorname{tg} \delta_x = \frac{1}{2\pi f R_x C_x} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 800 \cdot 59\,630 \cdot 0{,}245 \cdot 10^{-6}} = 0{,}0136.$$

2. Pierderilor în condensator le corespunde rezistența R_x legată în paralel cu capacitatea C_x. Valoarea acestei rezistențe este:

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} = \frac{59\,630 \cdot 837}{1\,000} = 49\,910\ \Omega.$$

Se determină valoarea expresiei:

$$N = \left| \left[\frac{R_x}{1+(2\pi f R_x C_x)^2} - j \frac{2\pi f R_x^2 C_x}{1+(2\pi f R_x)^2} \right] \left[\frac{R_2}{(1+(2\pi f R_2 C_2)^2} + R_4 - j \frac{2\pi f R_2^2 C_2}{1+(2\pi f R_2 C_2)^2} \right] R_3 + \right.$$

$$+ \left[\frac{R_2}{(1+(2\pi f R_2 C_2)^2} - j \frac{2\pi f R_2^2 C_2}{1+(2\pi f R_2 C_2)^2} \right] \left[\frac{R_x}{1+(2\pi f R_x C_x)^2} + R_3 - j \frac{2\pi f R_x^2 C_x}{1+(2\pi f R_x C_x)^2} \right] R_4 +$$

$$+ \left[\frac{R_x}{1+(2\pi f R_x C_x)^2} + R_3 - j \frac{2\pi f R_x^2 C_x}{1+(2\pi f R_x C_x)^2} \right] \left[\frac{R_2}{1+(2\pi f R_2 C_2)^2} + \right.$$

$$\left. + R_4 - j \frac{2\pi f R_2^2 C_2}{1+(2\pi f R_2 C_2)^2} \right] Z_i \Bigg| = \left| \left[\frac{49\,910}{1+(2 \cdot 3{,}14 \cdot 800 \cdot 49\,910 \cdot 0{,}293 \cdot 10^{-6})^2} - \right. \right.$$

$$\left. - j \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 800 \cdot 49\,910^2 \cdot 0{,}293 \cdot 10^{-6}}{1+(2 \cdot 3{,}14 \cdot 800 \cdot 0{,}293 \cdot 10^{-6})^2} \right] \cdot \left[\frac{59\,630}{1+(2 \cdot 3{,}14 \cdot 800 \cdot 59\,630 \cdot 0{,}245 \cdot 10^{-6})^2} + 1\,000 - \right.$$

$$\left. - j \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 800 \cdot 59\,630^2 \cdot 0{,}245 \cdot 10^{-6}}{1+(2 \cdot 3{,}14 \cdot 800 \cdot 59\,630 \cdot 0{,}245 \cdot 10^{-6})^2} \right] \cdot 837 +$$

$$+ \left[\frac{59\,630}{1+(2 \cdot 3{,}14 \cdot 800 \cdot 59\,630 \cdot 0{,}245 \cdot 10^{-6})^2} - j \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 800 \cdot 59\,630^2 \cdot 0{,}245 \cdot 10^{-6}}{1+(2 \cdot 3{,}14 \cdot 800 \cdot 59\,630 \cdot 0{,}245\ 10^{-6})^2} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{49\,910}{1+(2 \cdot 3{,}14 \cdot 800 \cdot 49\,910 \cdot 0{,}293 \cdot 10^{-6})^2} + 837 - \right.$$

$$\left. - j \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 800 \cdot 49\,910^2 \cdot 0{,}293 \cdot 10^{-6}}{1+(2 \cdot 3{,}14 \cdot 800 \cdot 49\,910 \cdot 0{,}293 \cdot 10^{-6})^2} \right] \cdot 1\,000 +$$

$$+ \left[\frac{49\,910}{1+(2 \cdot 3{,}14 \cdot 800 \cdot 49\,910 \cdot 0{,}293 \cdot 10^{-6})^2} + 837 - \right.$$

$$-j\,\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 800\cdot 49\,910^2\cdot 0{,}293\cdot 10^{-6}}{1+(2\cdot 3{,}14\cdot 800\cdot 49\,910\cdot 0{,}293\cdot 10^{-6})^2}\Bigg|\cdot$$

$$\cdot\Bigg|\frac{59\,630}{1+(2\cdot 3{,}14\cdot 800\cdot 59\,630\cdot 0{,}245\cdot 10^{-6})^2}+1\,000-$$

$$-j\,\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 800\cdot 59\,630^2\cdot 0{,}245\cdot 10^{-6}}{1+(2\cdot 3{,}14\cdot 800\cdot 59\,630\cdot 0{,}245\cdot 10^{-6})^2}\Bigg|\cdot(5\,000+j\,5\,800)|=1{,}063\cdot 10^{10}\,\Omega^3$$

Eroarea relativă procentuală limită determinată de pragul de sensibilitate al punții la determinarea capacității C_x este:

$$\delta_{min\,Cx}=\frac{100\,I_{min}\cdot N\cdot 2\pi f C_x}{R_4 U}=\frac{100\cdot(\pm 1{,}2)\cdot 10^{-7}\cdot 1{,}063\cdot 10^{10}\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 800\cdot 0{,}293\cdot 10^{-6}}{1\,000\cdot 50}=$$

$$=\pm 3{,}76\cdot 10^{-3}\%.$$

Notînd cu $E_{r\lim R}=\pm 0{,}05\%$ eroarea relativă procentuală limită corespunzătoare rezistențelor R_3 și R_4 și cu $E_{r\lim}=\pm 0{,}2\%$ cea corespunzătoare capacității C_2, rezultă eroarea relativă procentuală limită de determinare a capacității C_x:

$$E_{r\lim Cx}=E_{r\lim}+2E_{r\lim R}+\delta_{min\,Cx}=$$

$$=(\pm 0{,}2)+2\,(\pm 0{,}05)+(\pm 3{,}76\cdot 10^{-3})\approx \pm 0{,}304\%.$$

Problema 4.2.23. Cu ajutorul punții de c.a. De Sauty din fig. 4.2.14 se determină capacitatea C_x și tangenta unghiului de pierderi tg δ_x ale unui condensator. Cînd puntea este în echilibru parametrii au următoarele valori: $C_2=0{,}733\ \mu$F, $R_2=2{,}1\ \Omega$, $R_3=500\ \Omega$ și $R_4=1\,000\Omega$.

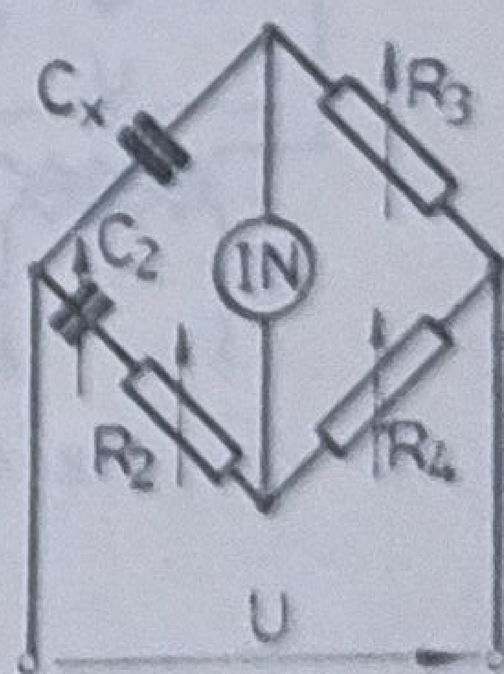


Fig. 4.2.14.

1. Să se determine capacitatea C_x și rezistența de pierderi R_x a condensatorului, presupunînd că ele sînt legate în serie.

2. Știind că frecvența tensiunii de alimentare a punții este $f=400$ Hz, să se determine tangenta unghiului de pierderi tg δ_x a condensatorului.

3. Să se calculeze capacitatea C'_x și rezistența de pierderi R'_x ale condensatorului presupunînd că ele sînt legate în paralel.

Soluție. 1. $C_x=\frac{R_4C_2}{R_3}=\frac{1\,000\cdot 0{,}733}{500}=1{,}466\ \mu\text{F},$

$$R_x=\frac{R_2R_3}{R_4}=\frac{2\cdot 1\cdot 500}{1\,000}=1{,}05\ \Omega.$$

2. $\text{tg}\,\delta_x=2\pi fR_xC_x=2\cdot 3{,}14\cdot 400\cdot 1{,}05\cdot 1{,}466\cdot 10^{-6}=3{,}87\cdot 10^{-3}.$

3. Între parametrii schemelor echivalente serie și paralel ale unui condensator există relațiile:

$$R'_x = R_x\left(1+\frac{1}{\mathrm{tg}^2\,\delta_x}\right) = 1{,}05\left[1+\frac{1}{(3{,}87\cdot 10^{-3})^2}\right] = 70\ 109\ \Omega,$$

$$C'_x = \frac{C_x}{1+\mathrm{tg}^2\,\delta_x} = \frac{1{,}466}{1+(3{,}87\cdot 10^{-3})^2} = 1{,}466\ \mu\mathrm{F}.$$

Problema 4.2.24. Capacitatea C_x și tangenta unghiului de pierderi tg δ_x ale unui condensator se măsoară cu puntea de c. a. Schering din fig. 4.2.15. în care $C_2=50$ nF și $R_3=1\ 000\ \Omega$. Puntea se alimentează cu o tensiune înaltă, avînd frecvența $f=50$ Hz, și este în echilibru cînd $C_4=0{,}122\ \mu$F și $R_4=6\ 532\ \Omega$.

Să se determine capacitatea C_x și tangenta unghiului de pierderi tg δ_x ale condensatorului.

Soluție. $C_x = \frac{R_4C_2}{R_3} = \frac{6\ 532\cdot 50}{1\ 000} = 326{,}6$ nF,

$$\mathrm{tg}\,\delta_x = 2\pi f R_4 C_4 = 2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 6\ 532\cdot 0{,}122\cdot 10^{-6} = 0{,}25.$$

Problema 4.2.25. Puntea de c.a. Schering din fig. 4.2.15 este în echilibru cînd $C_2=20$ nF, $C_4=2{,}11$ nF, $R_3=10\ 000\ \Omega$ și $R_4=4\ 650\ \Omega$. Tensiunea de alimentare a punții are valoarea efectivă $U=220$ V și frecvența $f=50$ Hz, iar galvanometrul vibrator folosit ca indicator de nul are constanta de curent $C_I=5\cdot 10^{-8}$ Am/mm, distanța dintre scara și oglinda indicatorului luminos $l=0{,}25$ m, deviația minimă sesizabilă $\alpha_{min}=\pm 0{,}5$ mm, impedanța interioară $Z_g=50\ \Omega$ și frecvența de rezonanță $f_0=50$ Hz.

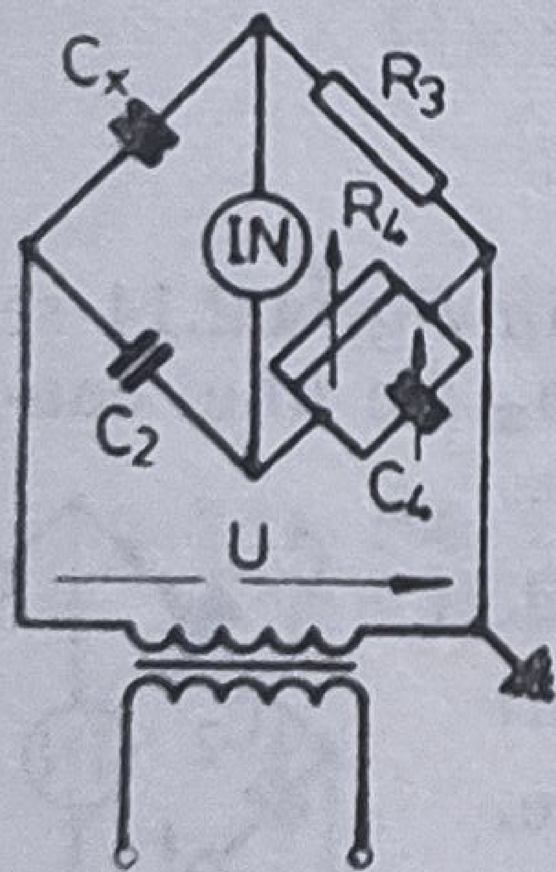


Fig. 4.2.15.

1. Să se determine capacitatea C_x și tangenta unghiului de pierderi tg δ_x ale condensatorului.

2. Știind că rezistențele R_3 și R_4 se cunosc cu eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,\mathrm{lim}\,R}=\pm 0{,}1\%$, iar capacitățile C_2 și C_4 cu $E_{r\,\mathrm{lim}\,C}=\pm 0{,}5\%$, să se determine eroarea relativă procentuală limită de măsurare a capacității C_x a condensatorului.

Soluție. 1. $C_x = \frac{R_4C_2}{R_3} = \frac{4\ 650\cdot 20}{10\ 000} = 9{,}3$ nF,

$$\mathrm{tg}\,\delta_x = 2\pi f R_4 C_4 = 2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 4\ 650\cdot 2{,}11\cdot 10^{-9} = 3{,}08\cdot 10^{-3}.$$

2. Pierderilor în condensator le corespunde rezistența R_x legată în serie cu capacitatea C_x. Valoarea acestei rezistențe este:

$$R_x = \frac{C_4R_3}{C_2} = \frac{2{,}11\cdot 10\ 000}{20} = 1\ 055\ \Omega.$$

Se calculează valoarea expresiei :

$$N = \left|\left(R_x - j\frac{1}{2\pi f C_x}\right)\left[\frac{R_4}{1+(2\pi f R_4 C_4)^2} - j\frac{1}{2\pi f C_2} - j\frac{2\pi f R_4^2 C_4}{1+(2\pi f R_4 C_4)^2}\right]\cdot R_3 -\right.$$

$$-j\frac{1}{2\pi f C_2}\left[\frac{R_4}{1+(2\pi f R_4 C_4)^2} - j\frac{2\pi f R_4^2 C_4}{1+(2\pi f R_4 C_4)^2}\right]\left(R_x + R_3 - j\frac{1}{2\pi f C_x}\right) +$$

$$\left. + Z_g\left(R_x + R_3 - j\frac{1}{2\pi f C_x}\right)\left[\frac{R_4}{1+(2\pi f R_4 C_4)^2} - j\frac{1}{2\pi f C_2} - j\frac{2\pi f R_4^2 C_4}{1+(2\pi f R_4 C_4)^2}\right]\right| =$$

$$= \left|\left(1\,055 - j\frac{1}{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 9{,}3\cdot 10^{-9}}\right)\left[\frac{4\,650}{1+(2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 4650\cdot 2{,}11\cdot 10^{-9})^2} -\right.\right.$$

$$\left. - j\frac{1}{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 20\cdot 10^{-9}} - j\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 4\,650^2\cdot 2{,}11\cdot 10^{-9}}{1+(2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 4\,650\cdot 2{,}11\cdot 10^{-9})^2}\right]\cdot 10\,000 -$$

$$-j\frac{1}{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 20\cdot 10^{-9}}\left[\frac{4\,650}{1+(2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 4\,650\cdot 2{,}11\cdot 10^{-9})^2} -\right.$$

$$\left. -j\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 4\,650^2\cdot 2{,}11\cdot 10^{-9}}{1+(2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 4\,650\cdot 2{,}11\cdot 10^{-9})^2}\right]\cdot\left(1\,055 + 10\,000 - j\frac{1}{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 9{,}3\cdot 10^{-9}}\right) +$$

$$+50\left(1\,055 + 10\,000 - j\frac{1}{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 9{,}3\cdot 10^{-9}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{4\,650}{1+(2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 4\,650\cdot 2{,}11\cdot 10^{-9})^2} - j\frac{1}{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 20\cdot 10^{-9}} -\right.$$

$$\left.\left. -j\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 4\,650^2\cdot 2{,}11\cdot 10^{-9}}{1+(2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 4\,650\cdot 2{,}11\cdot 10^{-9})^2}\right]\right| = 80{,}2\cdot 10^{13}\,\Omega^3.$$

Pragul de sensibilitate al galvanometrului vibrator este :

$$I_{g\,min} = \frac{a_{min}\cdot C_I}{l} = \frac{(\pm 0{,}5)\cdot 5\cdot 10^{-8}}{0{,}25} = \pm 10^{-7}\,\text{A}.$$

Eroarea relativă procentuală limită determinată de pragul de sensibilitate al punţii la determinarea capacităţii C_x este :

$$\delta_{min\,C_x} = \frac{100\cdot I_{g\,min} N\cdot 2\pi f C_x\sqrt{1+(2\pi f R_4 C_4)^2}}{R_4 U}$$

$$= \frac{100(\pm 10^{-7})\cdot 80{,}2\cdot 10^{13}\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 9{,}3\cdot 10^{-9}\sqrt{1+(2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 4\,650\cdot 2{,}11\cdot 10^{-9})^2}}{4\,650\cdot 220} =$$

$$= \pm 2{,}29\cdot 10^{-2}\%.$$

Eroarea relativă procentuală limită de măsurare a capacității C_x este:

$$E_{r\,lim\,Cx} = E_{r\,lim\,C} + 2E_{r\,lim\,R} + \delta_{min\,Cx} =$$
$$= (\pm 0{,}5) + 2(\pm 0{,}1) + (\pm 2{,}29 \cdot 10^{-2}) = \pm 0{,}72\%.$$

Problema 4.2.26. Să se arate că convergența optimă a punții de c. a. Schering din fig. 4.2.15 se asigură la reglarea rezistenței R_4 și a capacității C_4.

Soluție. Unghiurile de convergență $\varkappa$ precum și rapoartele $2\varkappa/\pi$ pentru perechile de parametri reglabili se prezintă în tabelul 4.2.5.

Tabelul 4.2.5

Parametri reglabili	$\varkappa$	$2\varkappa/\pi$
R_3 și R_4	$\text{arctg}\, 2\pi f R_4 C_4 = 0{,}245$ rad	0,156
R_3 și C_4	$\text{arctg} \frac{1}{2\pi f R_4 C_4} = 1{,}325$ rad	0,844
R_4 și C_4	$\text{arctg}\, 2\pi f R_4 C_4 + \text{arctg} \frac{1}{2\pi f R_4 C_4} = 1{,}57$ rad	1

Întrucît pentru perechea de parametri R_4 și C_4 unghiul de convergență este egal cu $\pi/2$ rad, iar raportul $2\varkappa/\pi$ este egal cu 1, reglarea lor asigură punții convergența optimă.

4.3. MĂSURAREA REZISTENȚEI, INDUCTIVITĂȚII, CAPACITĂȚII ȘI IMPEDANȚEI PRIN METODE INDIRECTE

Uneori rezistența, inductivitatea, capacitatea și impedanța se măsoară indirect, folosind diferite relații în care ele intervin (de ex. legea lui Ohm, legea lui Joule, teoremele lui Kirchhoff). Erorile relative procentuale limită ale rezultatelor măsurărilor se determină, folosind relațiile (1.5 – 1.7). De obicei erorile aferente rezultatelor acestor măsurări sînt mari, uneori chiar deosebit de mari.

Problema 4.3.1. Se determină caracteristica statică a unei diode semiconductoare avînd curentul direct maxim $I_{d\,max} = 30$ mA și tensiunea inversă maximă $U_{i\,max} = 50$ V.

1. Să se aleagă schemele de măsurare care permit determinarea caracteristicii statice cu eroarea relativă procentuală sistematică minimă atît în sensul direct cît și în sensul invers de conducție a diodei, știind că miliampermetrul

utilizat are caracteristicile din tabelul 4.3.1, iar voltmetrul are intervalele de măsurare $U_n = (3 ; 6 ; 12 ; 30 ; 60 ; 120)$ V și numărul de ohmi pe volt $1/I_v = 50$ kΩ/V.

2. Să se reprezinte grafic caracteristica statică a diodei, cunoscînd că aparatele din schemele alese conform punctului 1 au măsurat valorile redate în tabelele 4.3.2 și 4.3.3.

Tabelul 4.3.1

Intervalul de măsurare, I_n	[mA]	0,12	0,6	3	12	60	300
Rezistența interioară, R_a	[Ω]	3 215	845	174	43,7	8,9	1,8

Tabelul 4.3.2

I_d	[mA]	1	2	3	4	6	8	10	15	20	25	30
U_d	[V]	0,35	0,57	0,71	0,78	0,92	1,02	1,16	1,36	1,45	1,6	1,7

Tabelul 4.3.3

I_i	[mA]	0,01	0,025	0,046	0,07	0,10	0,14	0,18	0,24	0,30	0,39
U_i	[V]	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

3. Să se reprezinte grafic dependența rezistenței statice directe R_d față de curentul direct I_d și rezistenței statice inverse R_i față de tensiunea inversă U_i.

Soluție. 1. O diodă semiconductoare are rezistența directă mică și rezistența inversă mare. Schemele de măsurare, care permit determinarea caracteristicii statice cu erori relative procentuale sistematice minime sînt pentru sensul direct cea din fig. 4.3.1.1 și pentru sensul invers cea din fig. 4.3.1.2.

2. Caracteristica statică a diodei semiconductoare s-a redat în fig. 4.3.2.

3. Eroarea relativă procentuală sistematică la determinarea rezistenței statice în sens direct (fig. 4.3.1.1) este :

$$E_{rs1} = -\frac{100}{\frac{U_n}{I_v} \cdot \frac{I_d}{U_d}},$$

iar a celei în sens invers (fig. 4.3.1.2)

$$E_{rs2} = \frac{100}{\frac{U_i}{R_a I_i} - 1}.$$

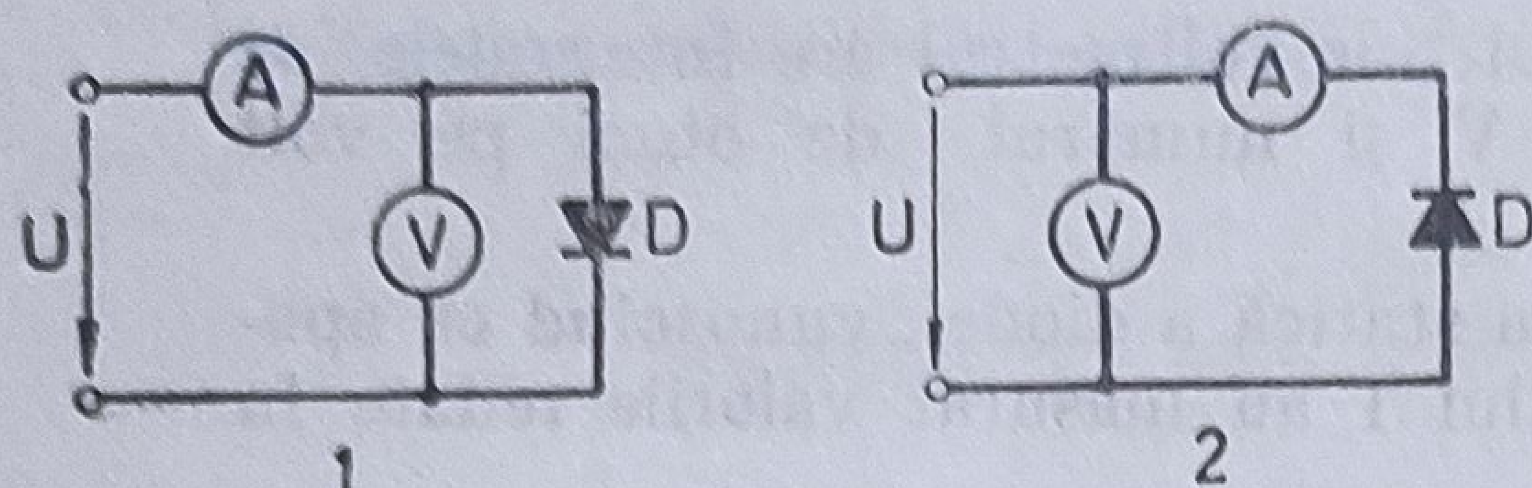


Fig. 4.3.1.

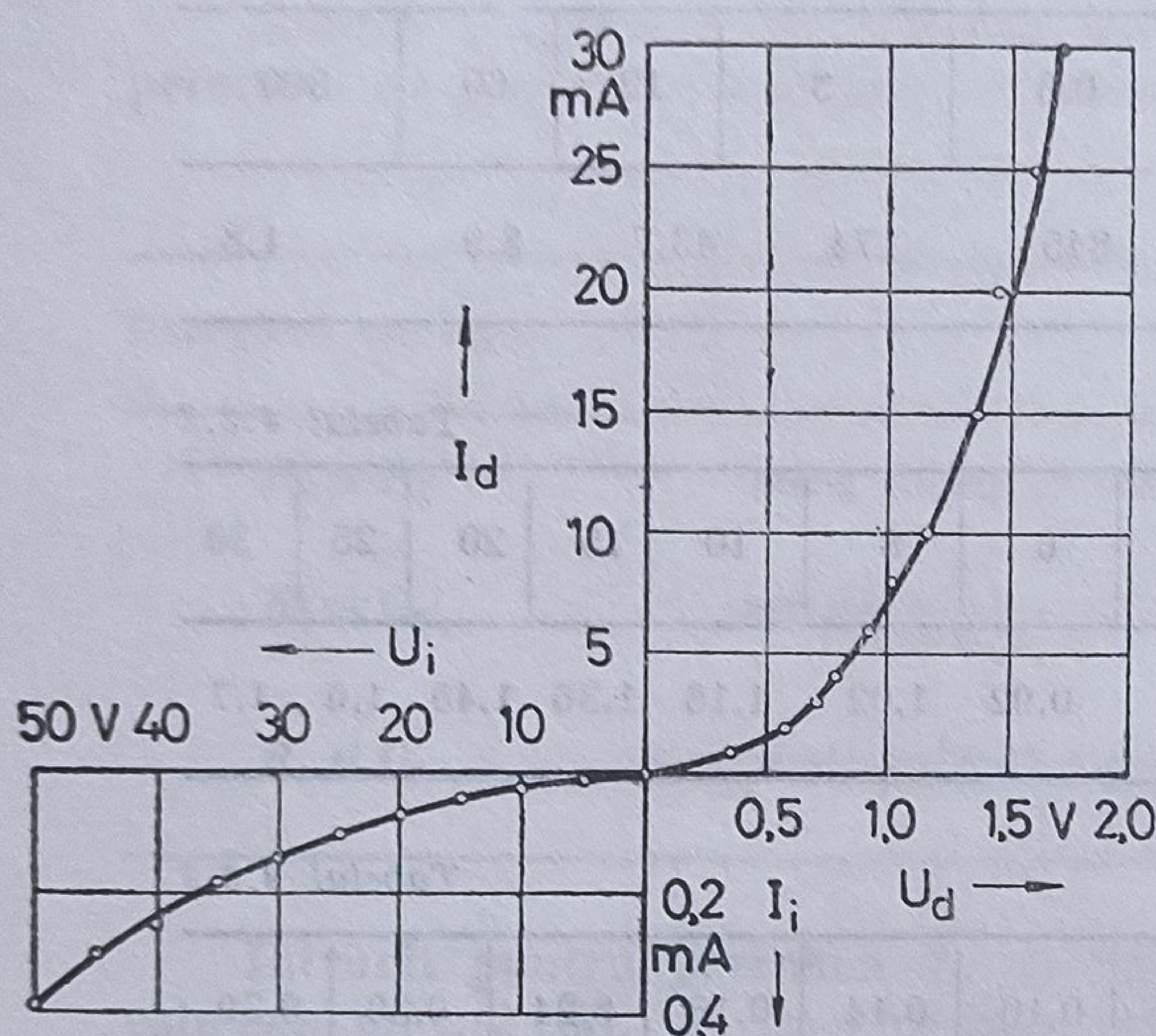


Fig. 4.3.2.

Considerînd că la fiecare măsurare aparatele sînt conectate pe cel mai mic interval de măsurare posibil, rezultă că valorile extreme ale erorilor relative procentuale sistematice sînt $E_{rs1} = -0{,}23\ \%$ și $E_{rs2} = 1{,}3\%$. La reprezentarea grafică a dependenței rezistenței statice directe R_d față de curentul direct I_d (fig. 4.3.3) și a rezistenței statice inverse R_i față de tensiunea inversă U_i (fig. 4.3.4) aceste erori s-au neglijat.

Problema 4.3.2. În schema din fig. 4.3.5 ampermetrul are intervalul de măsurare $I_n = 0{,}006$ A, indicația $I = 0{,}003$ A și clasa de precizie 1, iar voltmetrul are intervalul de măsurare $U_n = 130$ V, indicația $U = 130$ V și clasa de precizie 1,5.

1. Să se afle rezistența interioară R_v a voltmetrului.

2. Să se calculeze eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,lim\,Rv}$ de determinare a rezistenței R_v.

Soluție. 1. $R_v = \frac{U}{I} = \frac{130}{0{,}003} = 43\ 333\ \Omega.$

2. $E_{r\,lim\,Rv} = E_{r\,lim\,U} + E_{r\,lim\,I} = (\pm 1{,}5)\frac{130}{130} + (\pm 1)\frac{0{,}006}{0{,}003} = \pm 3{,}5\%.$

Problema 4.3.3. În schema din fig. 4.3.6 alimentată la tensiune continuă voltmetrul cu intervalul de măsurare $U_n = 1{,}5$ V și clasa de precizie 0,5 indică

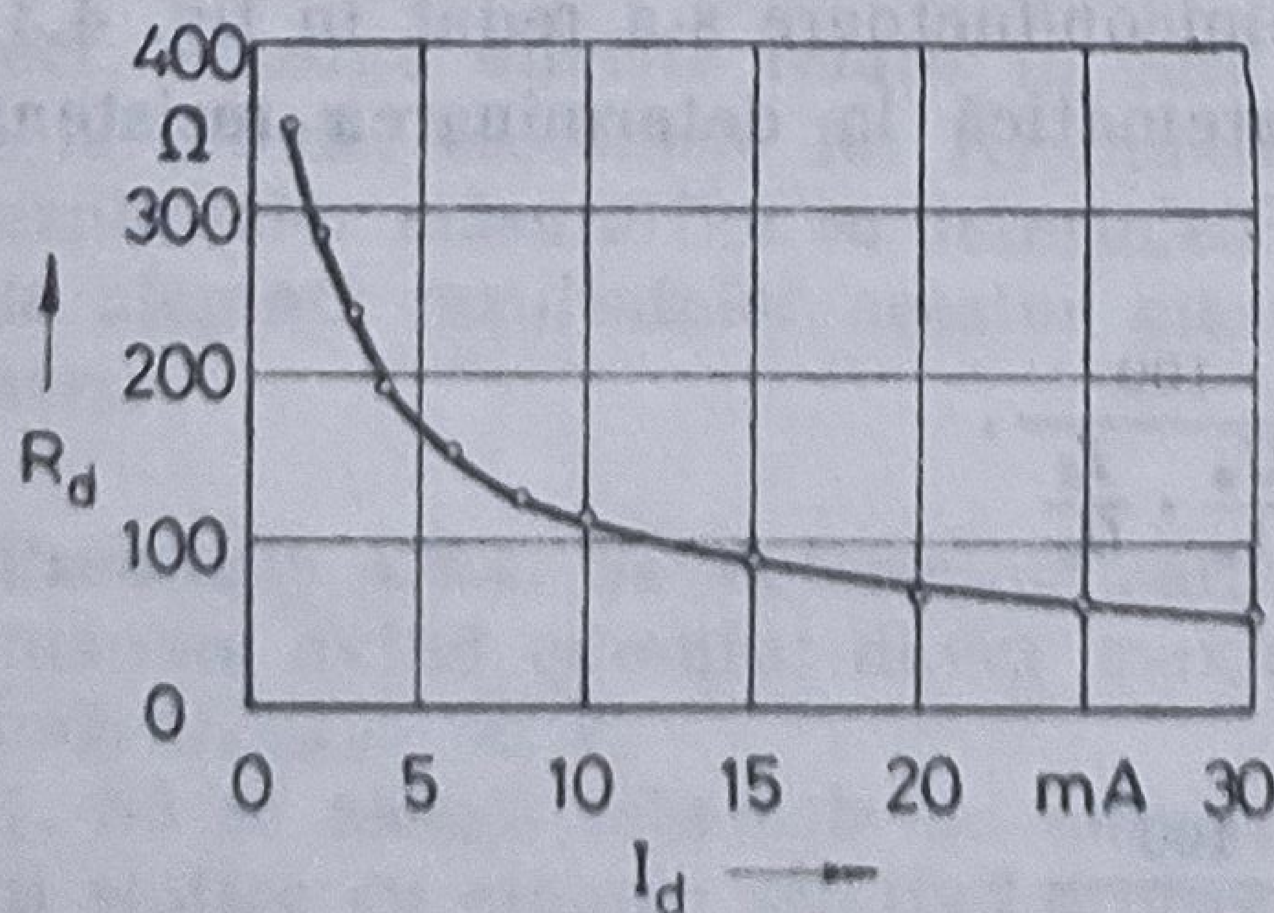


Fig. 4.3.3.

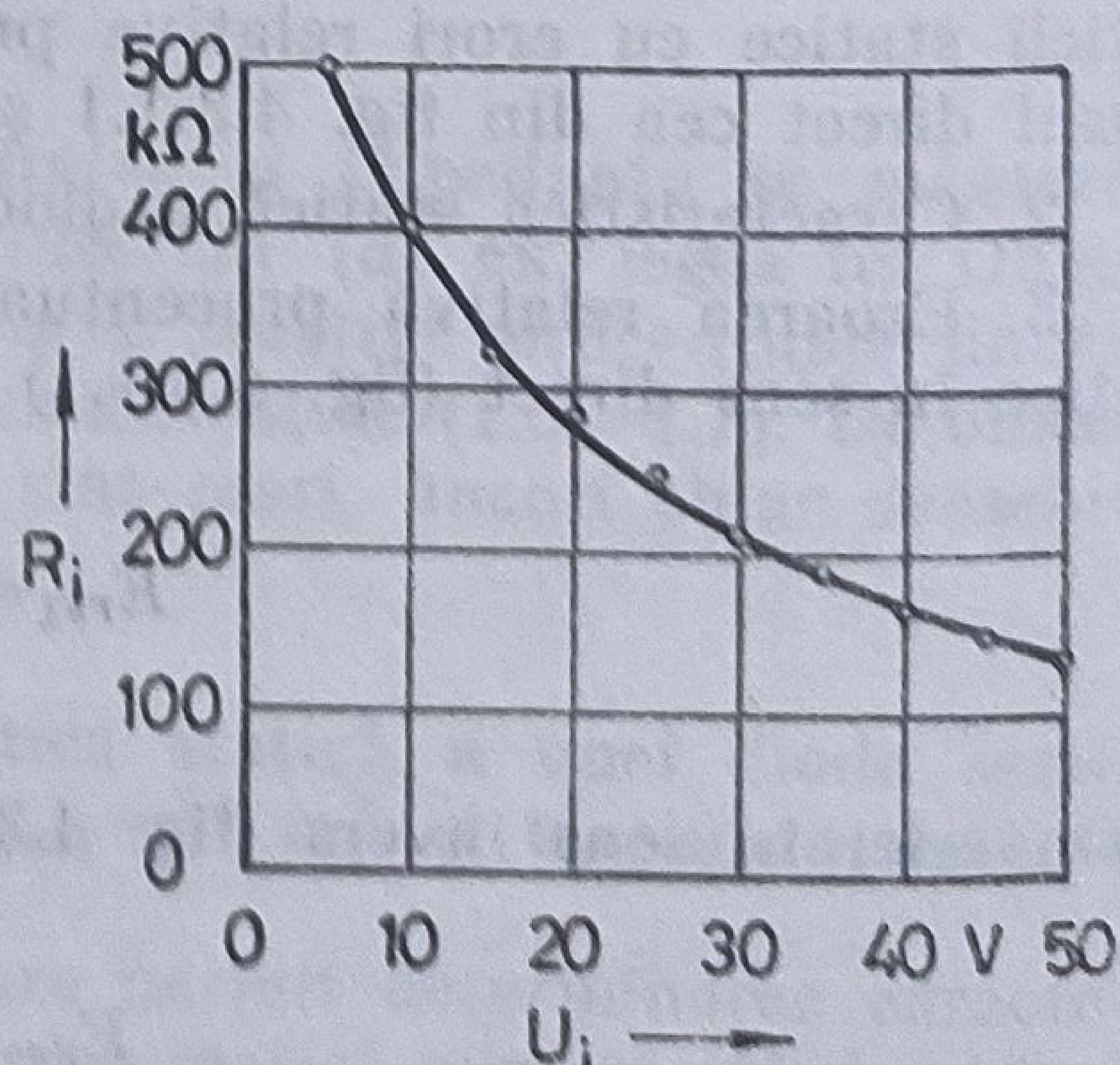


Fig. 4.3.4.

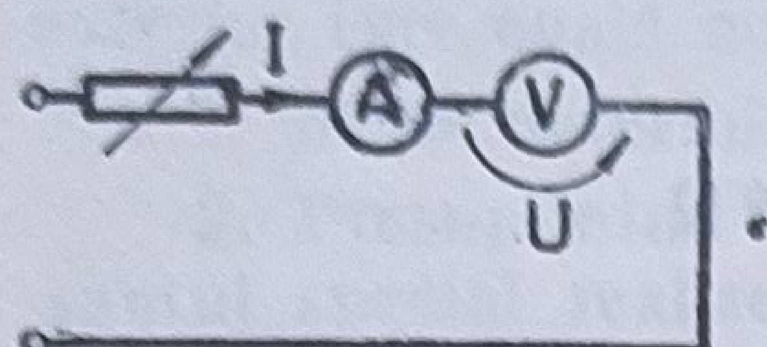


Fig. 4.3.5.

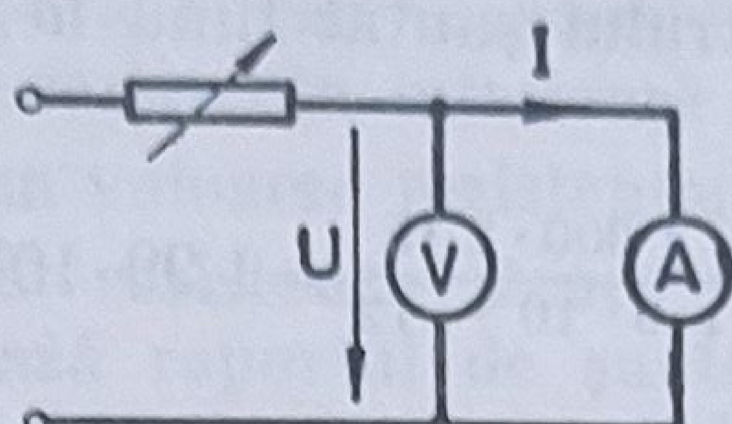


Fig. 4.3.6.

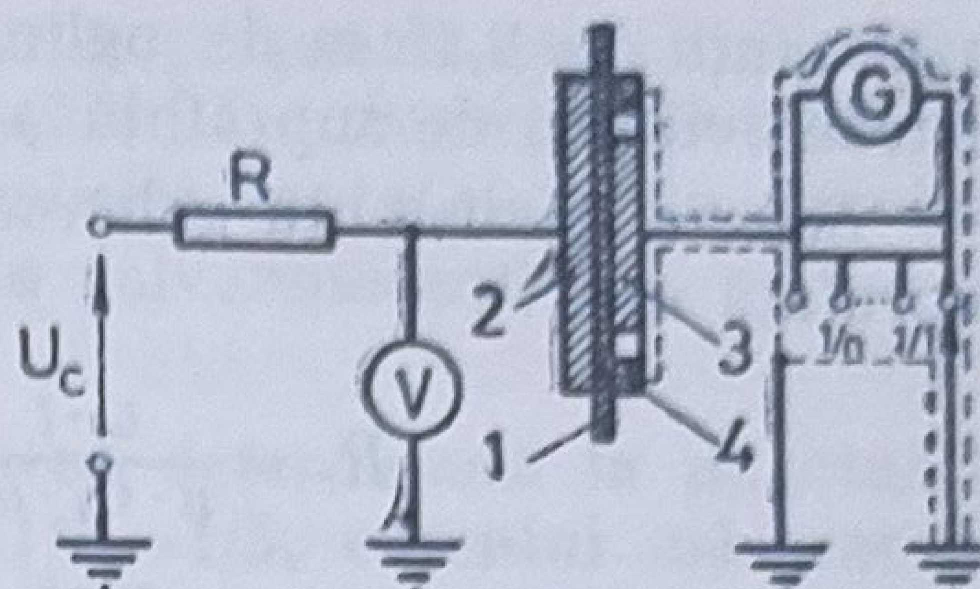


Fig. 4.3.7.

tensiunea $U=0,64$ V, iar ampermetrul cu intervalul de măsurare $I_n=5$ A și clasa de precizie 1 indică curentul $I=4$ A.

1. Să se afle rezistența interioară R_a a ampermetrului.
2. Să se calculeze eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,\lim Ra}$ de determinare a rezistenței R_a.

Soluție. 1. $R_a=\frac{U}{I}=\frac{0,64}{4}=0,16\ \Omega.$

2. $E_{r\lim Ra}=E_{r\lim v}+E_{r\lim a}=(\pm 0,5)\frac{1,5}{0,64}+(\pm 1)\frac{5}{4}=\pm 2,42\%.$

Problema 4.3.4. În schema din fig. 4.3.7 cartonul electrotehnic 1 are grosimea $\delta=0,25$ mm, electrozii metalici 2 și 3 sînt cilindrici, iar electrodul metalic 4 are formă inelară (toroidală). Diametrul bazei electrodului 3 este $d=4,95$ cm. Voltmetrul electrostatic măsoară tensiunea continuă $U=1\,000$ V, iar galvanometrul, avînd constanta de curent $C_I=9\cdot 10^{-9}$ Am/mm, indică în poziția $1/n=1/10$ a comutatorului șuntului multiplu $a=44$ mm pe o scară aflată la distanța $l=1,65$ m de oglindă. Să se determine rezistența de volum R_v și rezistivitatea de volum ρ_v a cartonului electrotehnic.

Soluție. Neglijînd rezistența galvanometrului șuntat, se determină rezistența de volum

$$R_v=\frac{U\cdot l}{n\cdot C_I\cdot a}=\frac{1\,000\cdot 1,65}{10\cdot 9\cdot 10^{-9}\cdot 44}=4,17\cdot 10^{8}\Omega$$

și rezistivitatea de volum

$$\rho_v=\frac{\pi d^2 R_v}{4\delta}=\frac{3,14\cdot 0,0495^2\cdot 4,17\cdot 10^{8}}{4\cdot 0,25\cdot 10^{-3}}=3,21\cdot 10^{9}\ \Omega\text{m}.$$

Problema 4.3.5. În schema din fig. 4.3.8 peste materialul izolant 1, se dispune electrodul metalic cilindric 2 cu diametrul bazei $d_1=3,15$ cm și electrodul metalic inelar (toroidal) 3 cu diametrul interior $d_2=5,15$ cm. Voltmetrul electrostatic măsoară tensiunea continuă $U=1\,000$ V, iar galvanometrul cu constanta de curent $C_I=9\cdot 10^{-9}$ Am/mm indică în poziția $1/n=1/1$ a comutatorului șuntului multiplu $a=12$ mm pe o scară aflată

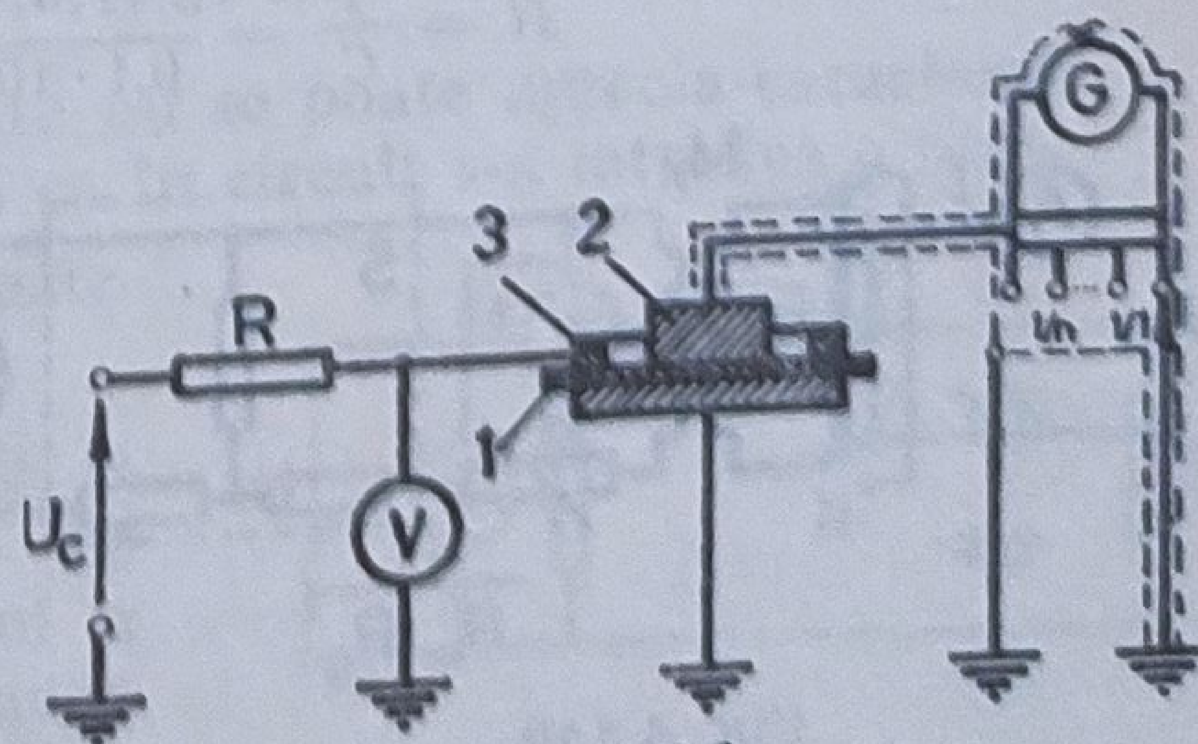


Fig. 4.3.8.

la distanța $l=2{,}15$ m de oglindă. Să se determine rezistența de suprafață R_s și rezistivitatea de suprafață ρ_s a materialului izolant.

Soluție. Rezistența galvanometrului șuntat fiind neglijabilă, rezistența de suprafață este:

$$R_s = \frac{U \cdot l}{n \cdot C_I \cdot a} = \frac{1\,000 \cdot 2{,}15}{1 \cdot 9 \cdot 10^{-9} \cdot 12} = 1{,}99 \cdot 10^{10}\ \Omega,$$

iar rezistivitatea de suprafață

$$\varrho_s = \frac{\pi\,(d_2 + d_1)\,R_s}{d_2 - d_1} = \frac{3{,}14\,(5{,}15 + 3{,}15) \cdot 1{,}99 \cdot 10^{10}}{5{,}15 - 3{,}15} = 2{,}6 \cdot 10^{11}\ \Omega.$$

Problema 4.3.6. Rezistența interioară a miliampermetrului din schema din fig. 4.3.9 este $R_a=10\ \Omega$. Dacă rezistența variabilă R are valoarea $R_1=10\Omega$, atunci curentul măsurat de miliampermetru este $I_1=10$ mA, iar dacă rezistenței variabile R i se dă valoarea $R_2=200\ \Omega$, atunci miliampermetrul măsoară curentul $I_2=7{,}3$ mA. Să se determine rezistența interioară R_s a sursei de t.e.m.

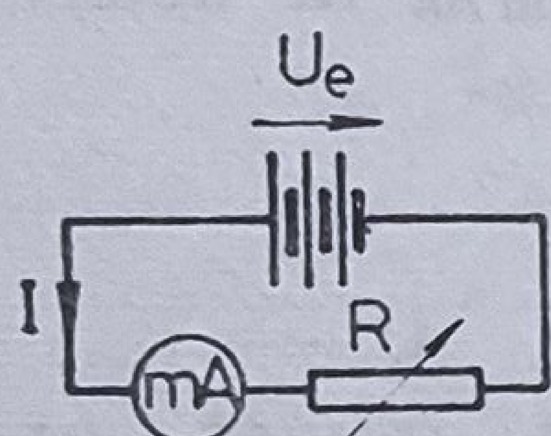


Fig. 4.3.9.

Soluție. $R_s = \dfrac{I_2\,(R_2 + R_a) - I_1\,(R_1 + R_a)}{I_1 - I_2} =$

$$= \frac{7{,}3\,(200 + 10) - 10\,(10 + 10)}{10 - 7{,}3} = 493{,}7\ \Omega.$$

Problema 4.3.7. Un condensator, avînd capacitatea $C=0{,}1\ \mu$F, se încarcă la tensiunea $U_1=1\,000$ V. Tensiunea dintre armăturile condensatorului se măsoară din nou după $t=10$ h prin intermediul unui voltmetru electrostatic cu capacitatea neglijabilă și rezistența de izolație foarte mare, obținîndu-se valoarea $U_2=900$ V. Să se determine rezistența de izolație R a condensatorului.

Soluție. Rezistența de izolație R este legată în paralel cu capacitatea C, reprezentînd schema echivalentă a condensatorului. Capacitatea C încărcată la tensiunea U_1 se descarcă peste rezistența R, constanta de timp a descărcării fiind:

$$\tau = \frac{t}{\ln \dfrac{U_1}{U_2}} = \frac{10}{\ln \dfrac{900}{1\,000}} = 95{,}93\ \text{h} = 3{,}417 \cdot 10^5\ \text{s}.$$

Rezultă:

$$R = \frac{\tau}{C} = \frac{3{,}417 \cdot 10^5}{0{,}1 \cdot 10^{-6}} = 3{,}417 \cdot 10^{12}\ \Omega = 3{,}417\ \text{T}\Omega.$$

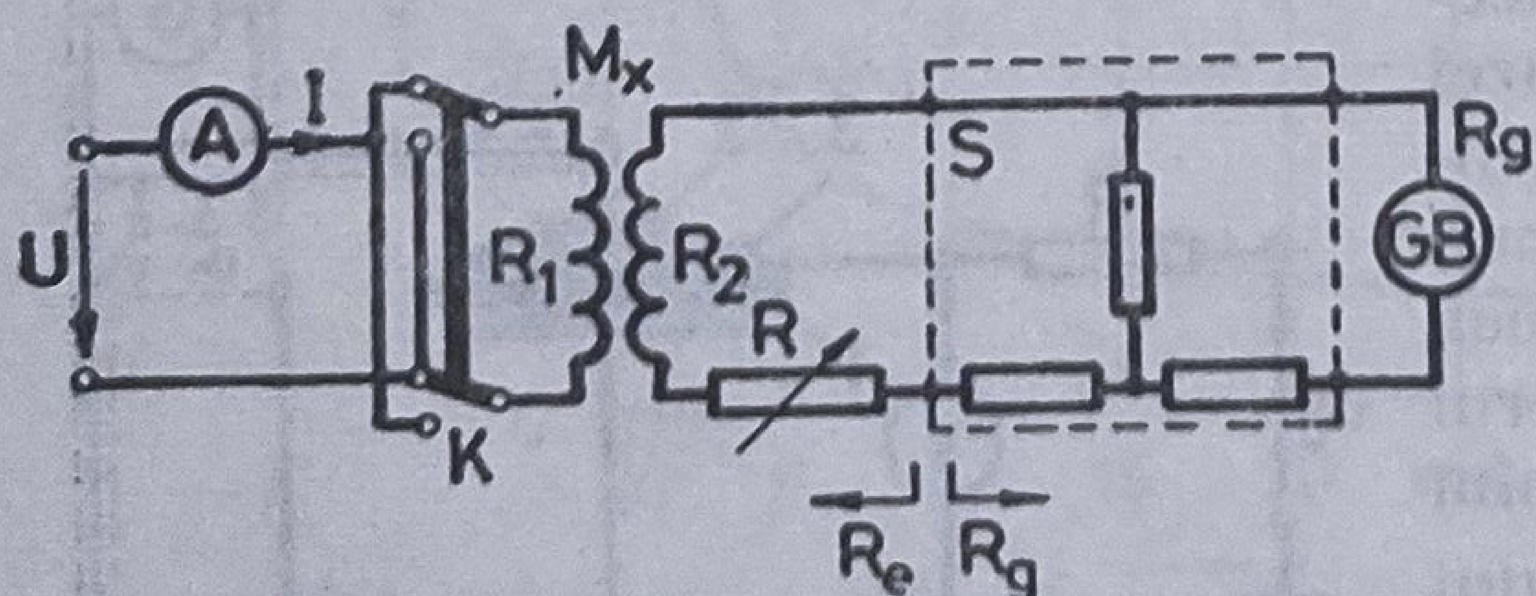


Fig. 4.3.10.

Problema 4.3.8. Cu ajutorul unui galvanometru balistic șuntat cu șuntul special S se măsoară inductivitatea mutuală M_x a două bobine ale căror înfășurări au rezistențele $R_1=R_2=15\Omega$ (fig. 4.3.10). Galvanometrul balistic are constanta balistică față de impulsul de curent $C_Q=5 \cdot 10^{-7}$ C/div, rezistența

sa interioară $R_g=250\,\Omega$ corespunzînd valorii înscrise pe șuntul special. Circuitul exterior galvanometrului balistic șuntat trebuie să aibă rezistența $R_e=1\,000\,\Omega$, iar rezistența echivalentă a galvanometrului balistic șuntat față de circuitul exterior este egală cu rezistența interioară R_g a galvanometrului.

1. Să se determine valoarea rezistenței R.

2. Presupunînd că rezistența R are valoarea determinată la punctul 1, șuntul special realizează raportul de șuntare $1/n=1/5$, curentul măsurat de ampermetru este $I_1=2{,}22$ A, iar prima elongație a galvanometrului balistic după inversarea sensului curentului I_1 prin intermediul comutatorului K este $\alpha_{max}=37{,}5$ diviziuni, să se determine inductivitatea mutuală M_x.

Soluție. 1. $R=R_e-R_2=1\,000-15=985\,\Omega$.

$$2.\ M_x=\frac{(R_2+R+R_g)\,n\,C_Q\,\alpha_{max}}{2I_1}=\frac{(15+985+250)\cdot 5\cdot 5\cdot 10^{-7}\cdot 37{,}5}{2\cdot 2{,}22}=0{,}0264\text{ H}.$$

Problema 4.3.9. Un condensator încărcat la tensiunea $U=20$ V se descarcă peste galvanometrul balistic prezentat în problema 2.7.4. Prima elongație a spotului luminos citită pe scară la poziția $1/n=1/100$ a comutatorului șuntului multiplu este $a_1=86$ mm. Să se determine capacitatea C a condensatorului.

$$\textit{Soluție.}\ C=\frac{C_{Q1}\cdot n\cdot a_1}{U}=\frac{5{,}21\cdot 10^{-8}\cdot 100\cdot 86}{20}=22{,}4\cdot 10^{-6}\text{ F}=22{,}4\ \mu\text{F}.$$

Problema 4.3.10. Impedanța Z se măsoară cu ajutorul schemei din fig. 4.3.11 alimentată la tensiune alternativă. Ampermetrul măsoară curentul $I=2.31$ A, voltmetrul tensiunea $U=112$ V, iar wattmetrul puterea activă $P=138$ W.

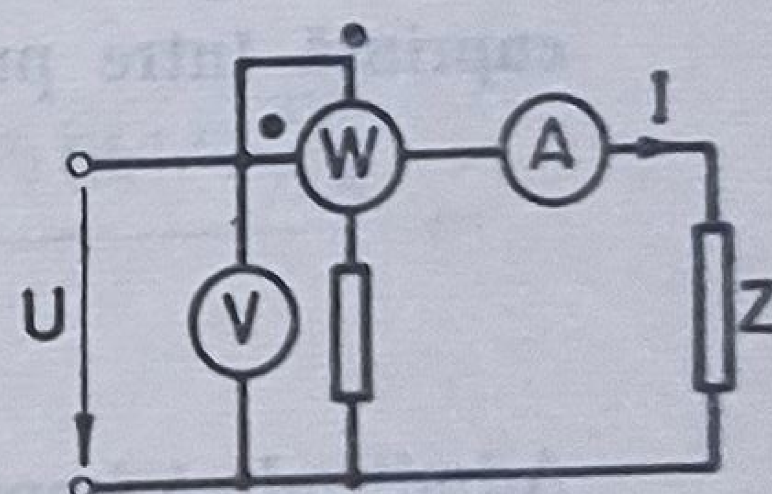


Fig. 4.3.11.

1. Știind că consumul aparatelor de măsură este neglijabil, să se determine impedanța Z, precum și rezistența R și reactanța X, care legate în serie alcătuiesc impedanța Z.

2. Cum se poate determina caracterul reactanței X?

Soluție. 1. $Z=\frac{U}{I}=\frac{112}{2{,}31}=48{,}5\,\Omega$,

$$R=\frac{P}{I^2}=\frac{138}{2{,}31^2}=25{,}9\,\Omega,$$

$$X=\sqrt{Z^2-R^2}=\sqrt{48{,}5^2-25{,}9^2}=41\,\Omega.$$

2. Pe baza rezultatelor măsurării efectuate nu se poate aprecia caracterul reactanței X. Dacă măsurarea se repetă după ce în circuit s-a introdus o reactanță cunoscută, atunci se poate deduce caracterul reactanței X.

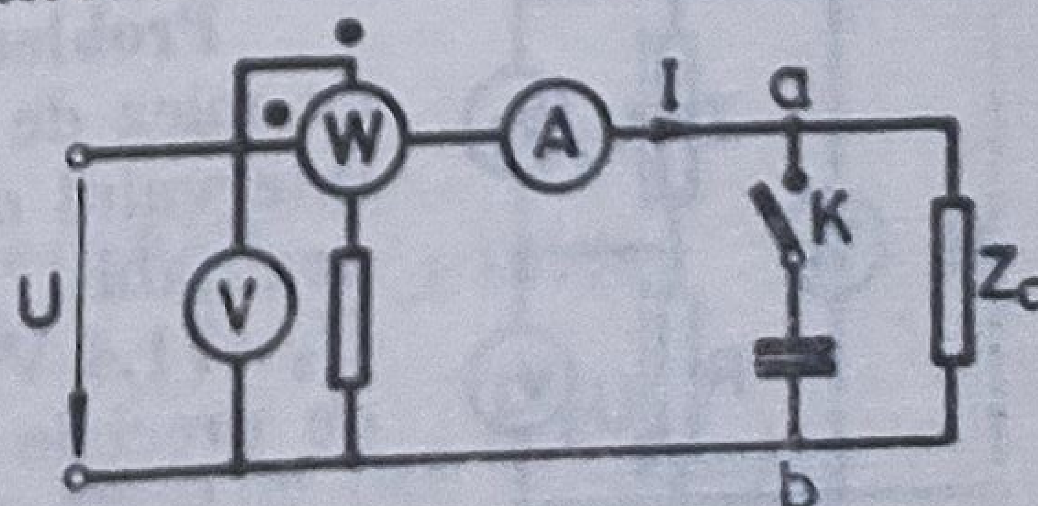


Fig. 4.3.12.

Problema 4.3.11. Schema din fig. 4.3.12 se alimentează la tensiune alternativă. Înainte de închiderea întrerupătorului K, ampermetrul a măsurat curentul $I_1=1{,}66$ A, voltmetrul tensiunea $U_1=62$ V, iar wattmetrul puterea activă $P_1=62{,}3$W.

După închiderea întrerupătorului K aceleași aparate au măsurat curentul $I_2=1,15$ A, tensiunea $U_2=64$ V și puterea $P_2=66,5$ W. Consumul aparatelor de măsură a fost neglijabil.

1. Să se determine impedanța Z_c, precum și rezistența R_s și reactanța inductivă X_s, care legate în serie formează impedanța Z_c.

2. Să se determine rezistența R_p și reactanța inductivă X_p, care legate în paralel alcătuiesc impedanța Z_c.

3. Să se calculeze capacitatea C, frecvența tensiunii de alimentare a schemei fiind $f=50$ Hz.

Soluție. 1. $Z_c=\frac{U_1}{I_1}=\frac{62}{1,66}=37,3\ \Omega,$

$$R_s=\frac{P_1}{I_1^2}=\frac{62.3}{1,66^2}=22,6\ \Omega,$$

$$X_s=\sqrt{Z_c^2-R_s^2}=\sqrt{37,3^2-22,6^2}=29,7\ \Omega.$$

2. $R_p=\frac{U_1^2}{P_1}=\frac{62^2}{62,3}=61,7\ \Omega,$

$$X_p=\frac{R_pZ_c}{\sqrt{R_p^2-Z_c^2}}=\frac{61,7\cdot 37,3}{\sqrt{61,7^2-37,3^2}}=46,8\ \Omega.$$

3. După închiderea întrerupătorului K impedanța ramurii de circuit cuprinsă între punctele a și b (fig. 4.3.12) este:

$$Z=\frac{U_2}{I_2}=\frac{64}{1,15}=55,7\ \Omega.$$

Admițînd că impedanța Z_c este alcătuită din rezistența R_p și reactanța inductivă X_p legate în paralel rezultă

$$X=\frac{R_pZ}{\sqrt{R_p^2-Z^2}}=\frac{61,7\cdot 55,7}{\sqrt{61,7^2-55,7^2}}=129,5\ \Omega$$

și

$$C=\frac{X-X_p}{2\pi fXX_p}=\frac{129,5-46,8}{2\cdot 3,14\cdot 50\cdot 129,5\cdot 46,8}=43,5\cdot 10^{-6}\ \text{F}=43,5\ \mu\text{F}.$$

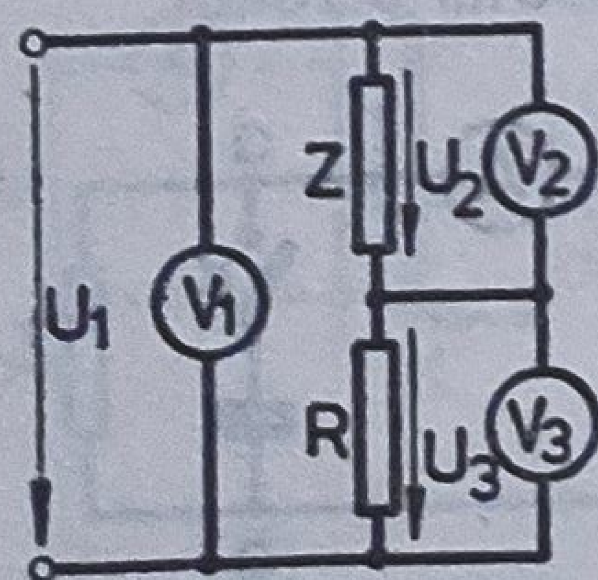


Fig. 4.3.13.

Problema 4.3.12. Se măsoară impedanța Z a unei bobine cu miez de fier, utilizînd schema din fig. 4.3.13. Voltmetrele au intervalul de măsurare 120 V, clasa de precizie 1,5 și consumul neglijabil, indicațiile lor fiind $U_1=107$ V, $U_2=67,5$ V și $U_3=71,4$ V. Rezistorul etalon are rezistența $R=200\ \Omega$ și clasa de precizie 0,5.

1. Să se determine impedanța Z, rezistența în c. a. R_a și reactanța X ale bobinei.

2. Să se calculeze erorile relative procentuale limită $E_{r\,\lim Z}$, $E_{r\,\lim Ra}$ și $E_{r\,\lim X}$ de determinare a impedanței Z, a rezistenței R_a și a reactanței X.

3. Știind că în c. c. rezistența $R_c=20,4\ \Omega$ a bobinei a fost măsurată cu eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,\lim Rc}=\pm 0,33\%$, să se calculeze eroarea relativă procentuală limită cu care se determină diferența ei pînă la rezistența R_a a bobinei în c.a.

Soluție. 1. $Z=\frac{U_2}{U_3}R=\frac{67,5}{71,4}200=189,1\ \Omega$,

$$R_a=\frac{R}{2}\left(\frac{U_1^2}{U_3^2}-\frac{U_2^2}{U_3^2}-1\right)=\frac{200}{2}\left(\frac{107^2}{71,4^2}-\frac{67,5^2}{71,4^2}-1\right)=35,2\ \Omega,$$

$$X=\sqrt{Z^2-R_a^2}=\sqrt{189,1^2-35,2^2}=185,8\ \Omega.$$

2. Notînd cu $E_{r\,\lim 1}$, $E_{r\,\lim 2}$ și $E_{r\,\lim 3}$ erorile relative procentuale limită de măsurare a tensiunilor U_1, U_2 și U_3, rezultă:

$$E_{r\,\lim Z}=E_{r\,\lim 2}+E_{r\,\lim 3}+E_{r\,\lim R}=$$

$$=(\pm 1,5)\frac{120}{67,5}+(\pm 1,5)\frac{120}{71,4}+(\pm 0,5)=\pm 5,69\ \%,$$

$$E_{r\,\lim Ra}=E_{r\,\lim R}+2\frac{U_1^2E_{r\,\lim 1}+U_2^2E_{r\,\lim 2}+(U_1^2-U_2^2)\,E_{r\,\lim 3}}{U_1^2-U_2^2-U_3^2}=$$

$$=(\pm 0,5)+2\frac{107^2(\pm 1,5)\frac{120}{107}+67,5^2(\pm 1,5)\frac{120}{67,5}+(107^2-67,5^2)(\pm 1,5)\frac{120}{71,4}}{107^2-67,5^2-71,4^2}=$$

$$=\pm 54,9\%,$$

$$E_{r\,\lim X}=\frac{Z^2E_{r\,\lim Z}+R_a^2E_{r\,\lim Ra}}{Z^2-R_a^2}=\frac{189,1^2(\pm 5,69)+35,2^2(\pm 54,9)}{189,1^2-35,2^2}=\pm 7,86\%.$$

3. Datorită efectului pelicular în conductorul bobinei și pierderilor de energie în miezul de fier, rezistența în c. a. R_a a bobinei este mai mare decît rezistența ei în c. c. R_c. Diferența lor

$$R'=R_a-R_c=35,2-20,4=14,8\ \Omega$$

se determină cu eroarea relativă procentuală limită

$$E_{r\,\lim R'}=\frac{R_a\,E_{r\,\lim Ra}+R_cE_{r\,\lim Rc}}{R_a-R_c}=\frac{35,2(\pm 54,9)+20,4(\pm 0,33)}{35,2-20,4}=\pm 131\%.$$

Problema 4.3.13. Impedanța Z a unei bobine cu miez de fier se măsoară folosind schema din fig. 4.3.14. Ampermetrul A_1 cu intervalul de măsurare

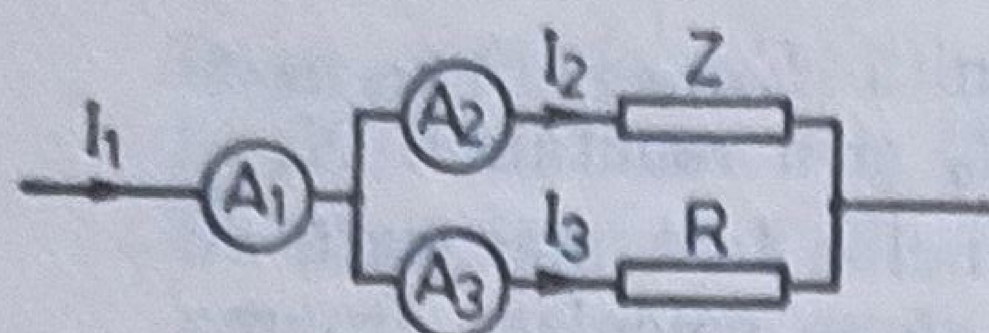


Fig. 4.3.14.

0,6 A și clasa de precizie 1,5 măsoară curentul $I_1=0{,}41$ A, iar ampermetrele A_2 și A_3 cu intervalul de măsurare 0,3 A și clasa de precizie 1,5 măsoară curenții $I_2=0{,}24$ A și $I_3=0{,}2$ A. Consumurile celor trei ampermetre sînt neglijabile, iar rezistorul etalon are rezistența $R=500\ \Omega$ și clasa de precizie 0,2.

1. Să se determine impedanța Z, rezistența în c. a. R_a și reactanța X ale bobinei.

2. Să se calculeze erorile relative procentuale limită $E_{r\lim Z}$, $E_{r\lim Ra}$ și $E_{r\lim X}$ de determinare a impedanței Z, a rezistenței R_a și a reactanței X.

3. Știind că în c.c. rezistența $R_c=109{,}2\ \Omega$ a bobinei a fost măsurată cu eroarea relativă procentuală limită $E_{r\lim Rc}=\pm 0{,}6\,\%$, să se calculeze eroarea relativă procentuală limită cu care se determină diferența ei pînă la rezistența R_a a bobinei în c.a.

Soluție. 1. $Z=\frac{I_3}{I_2}R=\frac{0{,}2}{0{,}24}500=416{,}7\ \Omega,$

$$R_a=\frac{R}{2}\left(\frac{I_1^2}{I_2^2}-\frac{I_3^2}{I_2^2}-1\right)=\frac{500}{2}\left(\frac{0{,}41^2}{0{,}24^2}-\frac{0{,}2^2}{0{,}24^2}-1\right)=306\ \Omega,$$

$$X=\sqrt{Z^2-R_a^2}=\sqrt{416{,}7^2-306^2}=282{,}8\ \Omega.$$

2. Notînd cu $E_{r\lim 1}$, $E_{r\lim 2}$ și $E_{r\lim 3}$ erorile relative procentuale limită de măsurare ale curenților I_1, I_2 și I_3, rezultă:

$$E_{r\lim Z}=E_{r\lim 2}+E_{r\lim 3}+E_{r\lim R}=(\pm 1{,}5)\frac{0{,}3}{0{,}24}+(\pm 1{,}5)\frac{0{,}3}{0{,}2}+(\pm 0{,}2)=\pm 4{,}3\,\%,$$

$$E_{r\lim Ra}=E_{r\lim R}+2\frac{I_1^2E_{r\lim 1}+(I_1^2-I_3^2)E_{r\lim 2}+I_3^2E_{r\lim 3}}{I_1^2-I_2^2-I_3^2}=$$

$$=(\pm 0{,}2)+2\frac{0{,}41^2\cdot(\pm 1{,}5)\frac{0{,}6}{0{,}32}+(0{,}41^2-0{,}2^2)(\pm 1{,}5)\frac{0{,}3}{0{,}24}+0{,}2^2\cdot(\pm 1{,}5)\frac{0{,}3}{0{,}2}}{0{,}41^2-0{,}24^2-0{,}2^2}=\pm 20\,\%.$$

$$E_{r\lim X}=\frac{Z^2E_{r\lim Z}+R_a^2E_{r\lim Ra}}{Z^2-R_a^2}=\frac{416{,}7^2(\pm 4{,}3)+306^2(\pm 20)}{416{,}7^2-306^2}=\pm 32{,}7\%.$$

Datorită efectului pelicular în conductorul bobinei și pierderilor de energie în miezul de fier, rezistența în c.a. R_a a bobinei este mai mare decît rezistența ei în c.c. R_c, diferența lor fiind:

$$R'=R_a-R_c=306-109{,}2=196{,}8\ \Omega.$$

Această diferență se determină cu eroarea relativă procentuală limită:

$$E_{r\lim R'}=\frac{R_aE_{r\lim Ra}+R_cE_{r\lim Rc}}{R_a-R_c}=\frac{306(\pm 20)+109{,}2(\pm 0{,}6)}{306-109{,}2}=\pm 31{,}4\%.$$

Se observă că unele erori sînt deosebit de mari.

4.4. MĂSURAREA REZISTENȚEI PRIZELOR DE PĂMÎNT

Datorită distribuției spațiale a densității de curent și a potențialului în jurul prizelor de pămînt, rezistența acestora nu poate fi presupusă concentrată. De această particularitate se ține seama la măsurarea rezistenței prizelor de pămînt.

Se utilizează adeseori aparate de măsură speciale destinate măsurării rezistenței prizelor de pămînt. Stabilirea rezultatelor măsurărilor și a erorilor aferente lor are loc pe baza documentațiilor tehnice și a instrucțiunilor ce însoțesc aceste aparate de măsură.

Dacă nu există aparate de măsură speciale, atunci rezistența prizelor de pămînt se măsoară prin metode indirecte bazate pe folosirea unor aparate de măsură uzuale. Erorile relative procentuale limită ale rezultatelor măsurărilor se determină utilizînd relațiile (1.5 – 1.7).

Problema 4.4.1. Între doi electrozi A și B, de forma unor emisfere cu razele $r_A=0{,}2$ m și $r_B=0{,}1$ m, plasați la distanța $2l=20$ m într-un sol omogen de rezistivitate uniformă $\rho=10^2\ \Omega$m se aplică tensiunea $U_{AB}=220$ V (fig. 4.4.1).

1. Să se reprezinte grafic distribuția tensiunii la suprafața solului după axa Ox, care trece prin centrele celor două emisfere și are originea O la jumătatea distanței dintre centrele electrozilor A și B.

2. Să se determine rezistența de punere la pămînt a fiecărui electrod și rezistența totală de punere la pămînt a celor doi electrozi.

3. Să se calculeze la ce distanță de cei doi electrozi tensiunile reprezintă 1 % din căderile de tensiune pe electrozi.

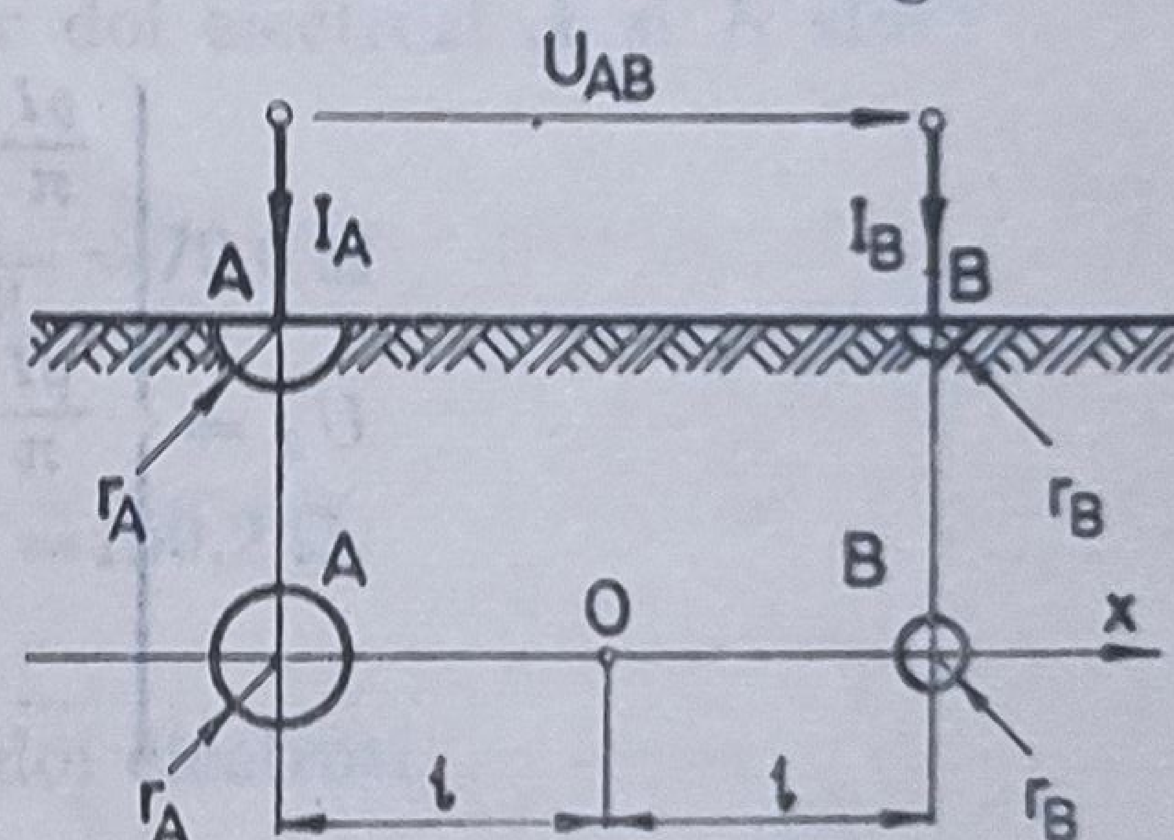


Fig. 4.4.2.

4. Să se recalculeze rezistența totală de punere la pămînt și distanțele la care tensiunile scad la 1% din căderile de tensiune pe electrozi pentru aceiași electrozi plasați la distanța de 2 000 m.

Soluție. 1. Fie I_A curentul ce intră în pămînt prin electrodul A, electrodul B fiind considerat la infinit. Pentru o distribuție radială uniformă a densității de curent J_A intensitatea cîmpului electric într-un punct cu abscisa x de pe axa Ox este

$$E_{Ax}=\rho J_{Ax}=\frac{\rho I_A}{2\pi(x+l)^2}.$$

Căderea de tensiune produsă de trecerea prin sol a curentului I_A de la electrodul A la punctul cu abscisa x este:

$$\Delta U_{Ax}=\int_A^x E_{Ax}\,dx=\frac{\rho I_A}{2\pi}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{|x+l|}\right).$$

Distribuţia tensiunii după axa Ox este:

$$U_{Ax}=\Delta U_{A\infty}-\Delta U_{Ax}=\frac{\rho I_A}{2\pi}\frac{1}{|x+l|}.$$

Raţionînd în mod identic în cazul electrodului B se obţine:

$$\Delta U_{Bx}=\frac{\rho I_B}{2\pi}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{|x-l|}\right)$$

şi

$$U_{Bx}=\frac{\rho I_B}{2\pi}\frac{1}{|x-l|}.$$

Considerînd simultan cei doi electrozi rezultă $I_A=-I_B=I$, astfel încît prin suprapunere se obţine distribuţia tensiunii la suprafaţa solului după axa Ox:

$$U_x=U_{Ax}+U_{Bx}=\frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{|x+l|}-\frac{1}{|x-l|}\right)$$

sau

$$U_x=\begin{cases}\frac{\rho I}{\pi}\frac{1}{x^2-l^2} & (x\leqslant -l-r_A),\\ \frac{\rho I}{\pi}\frac{x}{x^2-l^2} & (-l+r_A\leqslant x\leqslant l-r_B),\\ -\frac{\rho I}{\pi}\frac{l}{x^2-l^2} & (x\geqslant l+r_B).\end{cases}$$

Curentul I se calculează cunoscînd tensiunea U_{AB} aplicată între cei doi electrozi:

$$U_{AB}=U_{-l+r_A}-U_{l-r_B}=220\ \text{V}.$$

Rezultă:

$$I=\frac{\pi U_{AB}}{\rho\left[\frac{l-r_A}{r_A(2l-r_A)}+\frac{l-r_B}{r_B(2l-r_B)}\right]}=\frac{3{,}14\cdot 220}{10^2\left[\frac{10-0{,}2}{0{,}2\,(20-0{,}2)}+\frac{10-0{,}1}{0{,}1\,(20-0{,}1)}\right]}=0{,}928\ \text{A}$$

şi apoi

$$U_x=\begin{cases}\frac{295{,}5}{x^2-100} & (x\leqslant -l-r_A),\\ \frac{29{,}6x}{x^2-100} & (-l+r_A\leqslant x\leqslant l-r_B),\\ -\frac{295{,}5}{x^2-100} & (x\geqslant l+r_B).\end{cases}$$

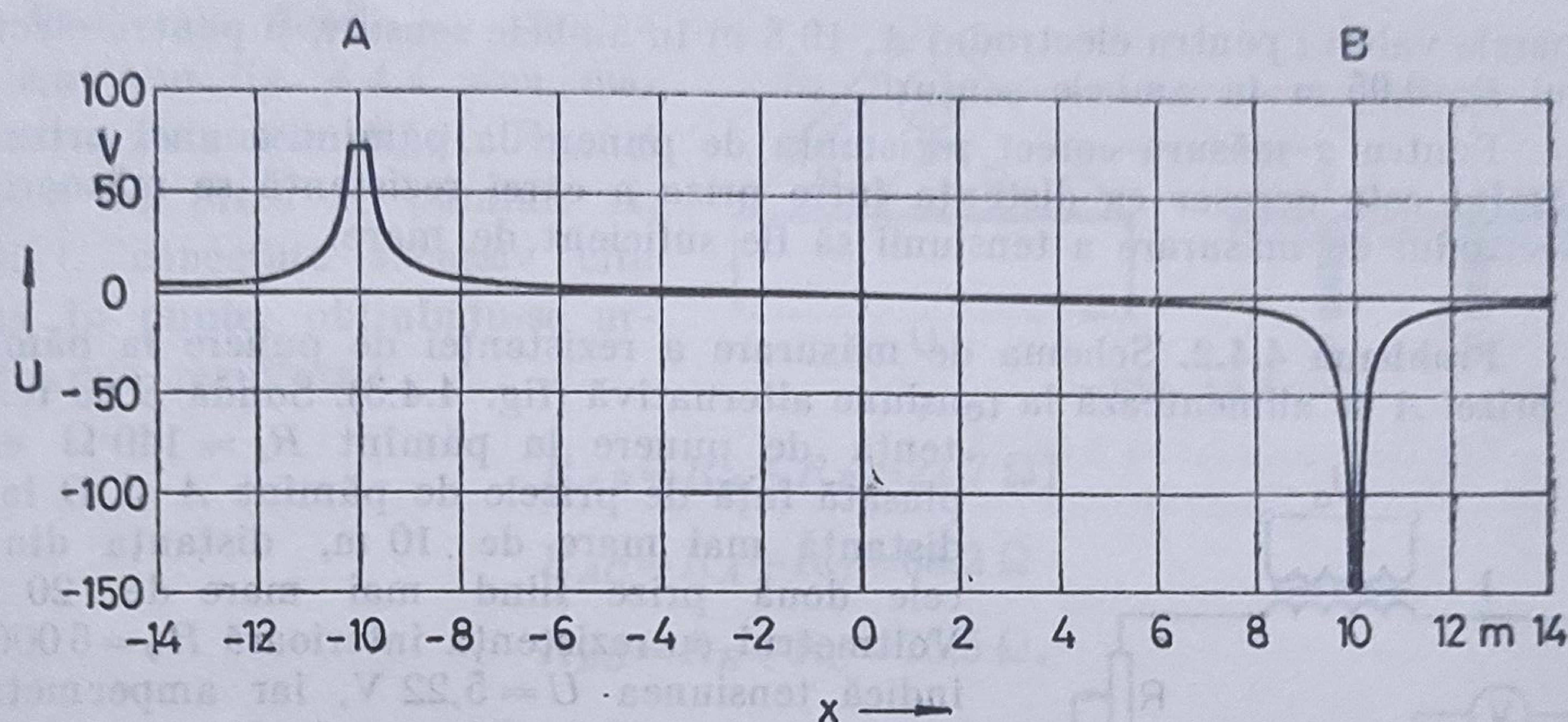


Fig. 4.4.1.

Distribuția tensiunii la suprafața solului după axa Ox s-a redat în fig. 4.4.2.

2. Rezistențele de punere la pămînt ale celor doi electrozi A și B sînt:

$$R_A = \frac{\Delta U_{A\infty}}{I_A} = \frac{\rho}{2\pi r_A} = \frac{10^2}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2} = 79{,}6\ \Omega$$

și

$$R_B = \frac{\Delta U_{B\infty}}{I_B} = \frac{\rho}{2\pi r_B} = \frac{10^2}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1} = 159{,}2\ \Omega,$$

iar rezistența totală de punere la pămînt a celor doi electrozi

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{220}{0{,}928} = 237{,}1\ \Omega.$$

Se observă că $R_{AB} = 237{,}1\ \Omega < R_A + R_B = 238{,}8\ \Omega$.

3. Căderile de tensiune corespunzătoare celor doi electrozi sînt:

$$U_A = U_{-l+r_A} = \frac{\rho I}{\pi} \frac{l - r_A}{r_A(2l - r_A)} = \frac{10^2 \cdot 0{,}928}{3{,}14} \frac{10 - 0{,}2}{0{,}2\,(20 - 0{,}2)} = 73{,}1\ \text{V},$$

$$U_B = U_{l-r_B} = \frac{\rho I}{\pi} \frac{l - r_B}{r_B(r_B - 2l)} = \frac{10^2 \cdot 0{,}928}{3{,}14} \frac{10 - 0{,}1}{0{,}1\,(0{,}1 - 20)} = -146{,}9\ \text{V}.$$

Tensiunile reprezintă 1% din căderile de tensiune pe electrozi la următoarele distanțe: pentru electrodul A, 12,42 m în afara electrozilor și 7,67 m între electrozi, iar pentru electrodul B, 7,35 m în afara electrozilor și 5,88 m între electrozi.

4. Rezistența totală de punere la pămînt a celor doi electrozi plasați la distanța de 2 000 m are valoarea de 238,6 Ω. Recalcularea distanțelor la care tensiunile reprezintă 1% din căderile de tensiune pe electrozi conduce la urmă-

toarele valori : pentru electrodul A, 19,8 m în ambele sensuri, şi pentru electrodul B, 9,95 m în ambele sensuri.

Pentru a măsura corect rezistenţa de punere la pămînt a unei prize de pămînt este necesar ca distanţa între priza a cărei rezistenţă se măsoară şi electrodul de măsurare a tensiunii să fie suficient de mare.

Problema 4.4.2. Schema de măsurare a rezistenţei de punere la pămînt a prizei A se alimentează la tensiune alternativă (fig. 4.4.3). Sonda S cu rezistenţa de punere la pămînt $R_s = 140\ \Omega$ este plasată faţă de prizele de pămînt A şi B la o distanţă mai mare de 10 m, distanţa dintre cele două prize fiind mai mare de 20 m. Voltmetrul cu rezistenţa interioară $R_v = 6\,000\ \Omega$ indică tensiunea $U = 5{,}22$ V, iar ampermetrul curentul $I = 1{,}45$ A. Să se calculeze rezistenţa R_A de punere la pămînt a prizei A în următoarele ipoteze :

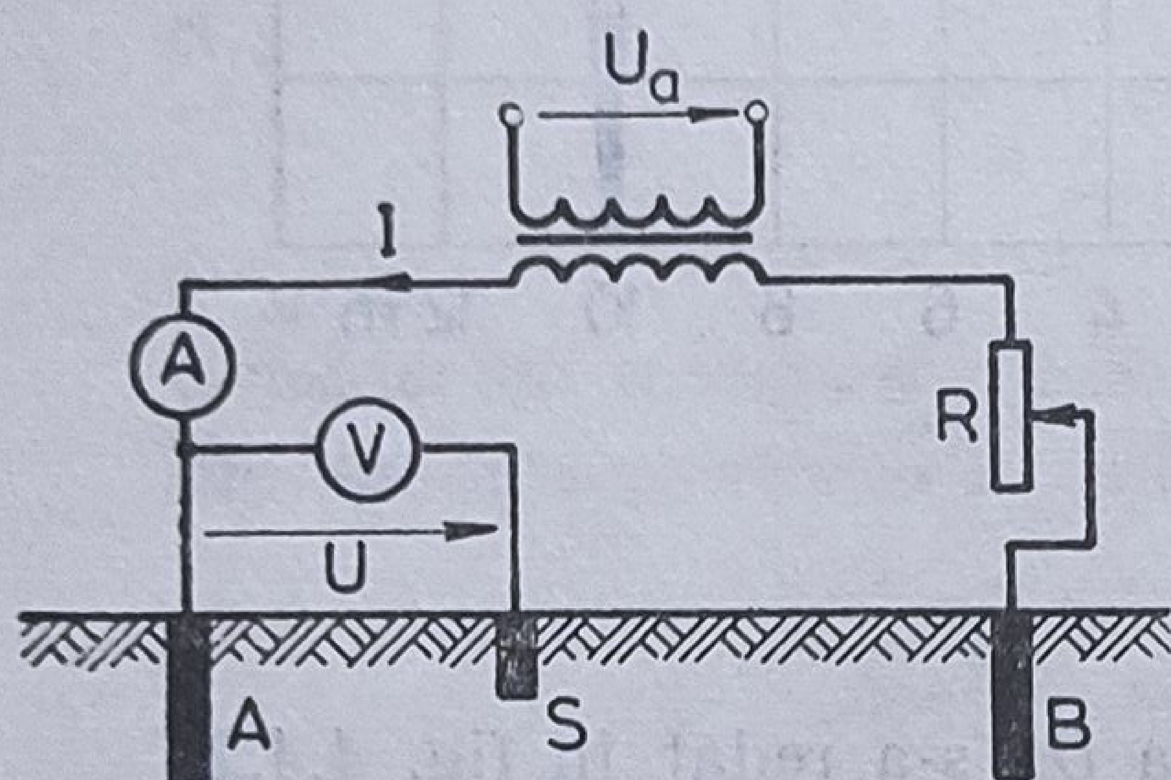


Fig. 4.4.3.

1. Ţinînd seama de rezistenţele R_v şi R_s ;
2. Neglijînd influenţa rezistenţei R_v ;
3. Neglijînd rezistenţa R_s.

Care sînt erorile relative procentuale sistematice E_{rs2} şi E_{rs3} la determinarea rezistenţei R_A de punere la pămînt a prizei A în ipotezele 2 şi 3 faţă de ipoteza 1 ?

Soluţie. 1. Căderea de tensiune pe priza A este :

$$U_A = U\frac{R_v + R_s}{R_v} = 5{,}22\,\frac{6\,000 + 140}{6\,000} = 5{,}34\ \text{V}$$

şi deci

$$R_{A1} = \frac{U_A}{I - \dfrac{U}{R_v}} = \frac{5{,}34}{1{,}45 - \dfrac{5{,}22}{6\,000}} = 3{,}685\ \Omega.$$

2. $R_{A2} = \dfrac{U_A}{I} = \dfrac{5{,}34}{1{,}45} = 3{,}683\ \Omega,$

$$E_{rs2} = -\frac{100U}{IR_v} = -\frac{100\cdot 5{,}22}{1{,}45\cdot 6\,000} = -0{,}06\%.$$

3. $R_{A3} = \dfrac{U_A}{I - \dfrac{U_A}{R_v}} = \dfrac{5{,}34}{1{,}45 - \dfrac{5{,}34}{6\,000}} = 3{,}685\ \Omega,$

$$E_{rs3} = \frac{100\,(U_A - U)}{IR_v - U_A} = \frac{100\,(5{,}34 - 5{,}22)}{1{,}45\cdot 6\,000 - 5{,}34} = 0{,}0014\%.$$

Se observă că influenţa rezistenţei interioare R_v a voltmetrului asupra rezultatului măsurării este neînsemnată.

Problema 4.4.3. Cu puntea de c.a. din fig. 4.4.4 s-au măsurat rezistențele R_{AB}, R_{AC} și R_{BC} a trei prize de pămînt. A, B și C conectate succesiv cîte două în punte, obținîndu-se următoarele rezultate :

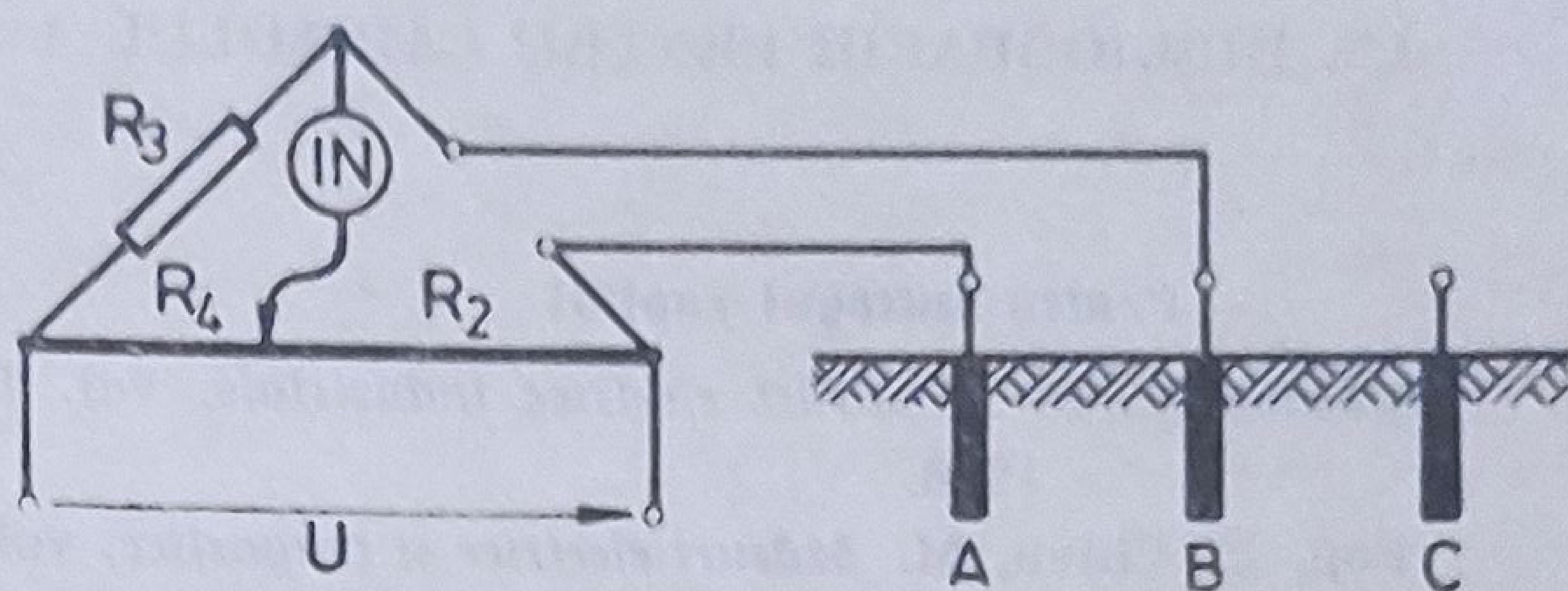


Fig. 4.4.4.

$$R_{AB}=R_A+R_B=21{,}7\ \Omega$$

$$R_{AC}=R_A+R_C=68{,}2\ \Omega$$

$$R_{BC}=R_B+R_C=75{,}5\ \Omega.$$

Știind că eroarea relativă procentuală limită de măsurare cu puntea de c. a. folosită este $E_{r\,\lim}=\pm 1\%$, să se calculeze rezistențele R_A, R_B și R_C ale prizelor de pămînt A, B și C, precum și erorile relative procentuale limită $E_{r\,\lim A}$, $E_{r\,\lim B}$ și $E_{r\,\lim C}$ de determinare a lor.

Soluție. $R_A=\dfrac{R_{AB}+R_{AC}-R_{BC}}{2}=\dfrac{21{,}7+68{,}2-75{,}5}{2}=7{,}2\ \Omega.$

În mod asemănător se obțin $R_B=14{,}5\ \Omega$ și $R_C=61\ \Omega$. Apoi

$$E_{r\,\lim A}=\frac{E_{r\,\lim}(R_{AB}+R_{AC}+R_{BC})}{2R_A}=\frac{(\pm 1)\,(21{,}7+68{,}2+78{,}5)}{2\cdot 7{,}2}\ \pm 11{,}49\%$$

și în mod asemănător

$$E_{r\,\lim B}=\pm 5{,}7\,\% \quad \text{și} \quad E_{r\,\lim C}=\pm 1{,}36\,\%.$$

De obicei nu se impune o anumită precizie a măsurării ci se cere să se stabilească dacă rezistența unei prize de pămînt se încadrează în limitele admise. În cazul prizelor de pămînt A, B și C rezultă :

$$7{,}2\left(1-\frac{11{,}49}{100}\right)\leqslant R_A\leqslant 7{,}2\left(1+\frac{11{,}49}{100}\right),$$

sau

$$6{,}37\ \Omega\leqslant R_A\leqslant 8{,}03\ \Omega$$

și de asemenea

$$13{,}67\ \Omega\leqslant R_B\leqslant 15{,}33\ \Omega,$$

$$60{,}17\ \Omega\leqslant R_c\leqslant 61{,}83\ \Omega.$$

4.5. BIBLIOGRAFIE PENTRU CAPITOLUL 4

— Pentru întregul capitol

Manolescu, P. *Măsurări electrice industriale*, vol. I, cap. 4 și 5. Editura tehnică, București, 1966.

Pop, E. Chivu, M. *Măsuri electrice și magnetice*, vol. II, cap. 14, 15 și 16. Institutul politehnic Timișoara, 1969.

— Pentru paragraful 4.4.

STAS 6119-68. *Instalații electrice pînă la* 1 000 V *exclusiv. Instalații de legare la pămînt de protecție.*

STAS 6271-73. *Prize de pămînt pentru instalații de telecomunicații.*

STAS 7334-70. *Instalații electrice de* 1 000 V *și peste* 1 000 V *Instalații de legare la pămînt de protecție.*

— Pentru anumite probleme

4.2.8, 4.2.9. Gherman Gh. *Sensibilitatea punților simple de curent continuu, cu indicator de nul șuntat în regim de amortizare critică.* Calitatea producției și metrologie, nr. 8, 1973, p. 494 – 497.

CAPITOLUL 5

MĂSURAREA FRECVENȚEI, FAZEI ȘI FACTORULUI DE PUTERE

Frecvența și faza mărimilor alternative, precum și factorul de putere se măsoară direct cu frecvențmetrul, fazmetrul și cosfimetrul sau indirect folosind expresii în care aceste mărimi intervin. Erorile relative procentuale limită ale rezultatelor măsurării frecvenței, fazei și factorului de putere se determină folosind relațiile (1.5 – 1.7).

Problema 5.1. Electromagnetul unui frecvențmetru de vibrație are miezul din fier moale, gradul de amortizare al lamelelor fiind $\beta=2\cdot10^{-3}$. Se aplică acestui frecvențmetru o tensiune alternativă cu frecvența $f=50$ Hz. Să se determine raportul dintre amplitudinile oscilațiilor lamelelor corespunzătoare indicațiilor $f_1=50$ Hz și $f_2=49{,}5$ Hz, știind că sub acțiunea unei tensiuni continue aplicate frecvențmetrului deviația permanentă a tuturor lamelelor este aceeași.

Soluție. Întrucît electromagnetul are miezul din fier moale, frecvențele circulare de oscilație liberă ale lamelelor corespunzătoare indicațiilor f_1 și f_2 sînt:

$$\omega_{10}=2\cdot2\pi f_1=2\cdot2\cdot3{,}14\cdot50=628 \text{ rad/s}$$

și

$$\omega_{20}=2\cdot2\pi f_2=2\cdot2\cdot3{,}14\cdot49{,}5=621{,}7 \text{ rad/s}.$$

Frecvența circulară a cuplului activ alternativ, care acționează asupra lamelelor fiind:

$$\omega=2\cdot2\pi f=2\cdot2\cdot3{,}14\cdot50=628 \text{ rad/s},$$

raportul amplitudinilor oscilațiilor celor două lamele este

$$\frac{a_{m1}}{a_{m2}}=\frac{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{20}^2}\right)+4\beta^2\frac{\omega^2}{\omega_{20}^2}}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{10}^2}\right)+4\beta^2\frac{\omega^2}{\omega_{10}^2}}}=5{,}2.$$

Înseamnă că chiar în cazul unei indicații exacte a frecvențmetrului de vibrație, are loc o vibrație sesizabilă a lamelelor învecinate celei corespunzătoare indicației exacte.

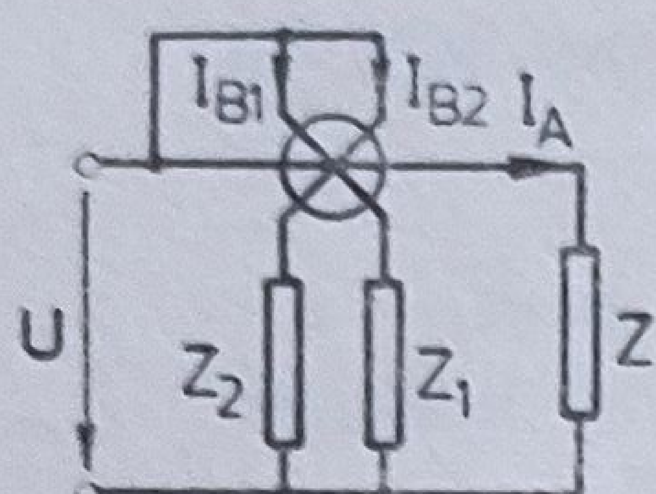


Fig. 5.1.

Problema 5.2. Înfășurările unui logometru electrodinamic utilizat la măsurarea frecvenței (fig. 5.1) prezintă rezistențe și inductivități, ce nu se pot neglija. Ce caracter trebuie să aibă impedanțele Z, Z_1 și Z_2 legate în serie cu înfășurările, pentru ca sensibilitatea instrumentului față de frecvența f a tensiunii alternative U să fie cît mai ridicată?

Soluție. În curent alternativ deviația permanentă a unui logometru electrodinamic este proporțională cu raportul:

$$\frac{I_{B1} \cos(\widehat{I_A, I_{B1}})}{I_{B2} \cos(\widehat{I_A, I_{B2}})},$$

în care I_A este valoarea efectivă a curentului prin bobina fixă, iar I_{B1} și I_{B2} sînt valorile efective ale curenților prin bobinele mobile. Circuitelor corespunzătoare bobinelor li se pot asigura caracter rezistiv (aproape pur), inductiv sau capacitiv (nici unul pur), rezultînd 18 variante de combinații distincte posibile, dintre care două se utilizează mai des.

La prima variantă circuitul bobinei fixe are caracterul rezistiv asigurat de impedanța Z cu caracter capacitiv, care compensează inductivitatea bobinei fixe. Circuitele bobinelor mobile au caracter inductiv și capacitiv, impedanțele Z_1 și Z_2 fiind în acest caz bobină și condensator.

La a doua variantă cele trei circuite au caracter inductiv, impedanțele circuitelor depinzînd în mod diferit de frecvență. În acest caz impedanțele Z, Z_1 și Z_2 sînt bobine.

Problema 5.3. Cu ajutorul schemei din fig. 5.2 se măsoară frecvența f a tensiunii alternative u de formă dreptunghiulară avînd amplitudinea U. Diodele D au caracteristica ideală, rezistența lor directă fiind neglijabilă, iar rezistența inversă foarte mare. Curentul i_a prin miliampermetrul magnetoelectric depinde de frecvența f. Să se precizeze condițiile în care valoarea medie I_{amed} a curentului i_{ap} în regimul permanent este proporțională cu frecvența f.

Fig. 5.2.

Soluție. Puntea formată din diodele D și miliampermetru are rezistența echivalentă R_a indiferent de sensul curentului i_c care trece prin condensatorul C. Sub acțiunea tensiunii alternative u de formă dreptunghiulară, prin circuitul alcătuit din rezistența R_a și condensatorul C trece în regimul permanent curentul alternativ i_{cp} care satisface condiția

$$i_{cp}\left(t+\frac{T}{2}\right) = -i_{cp}(t)$$

pentru orice valoare a timpului t, $T=1/f$ fiind perioada tensiunii alternative u (fig. 5.3). La bornele condensatorului C se stabilește în regimul permanent tensiunea:

$$u_{cp} = \frac{1}{C}\int i_{cp}\, dt,$$

avînd amplitudinea U_c. Pe baza celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff

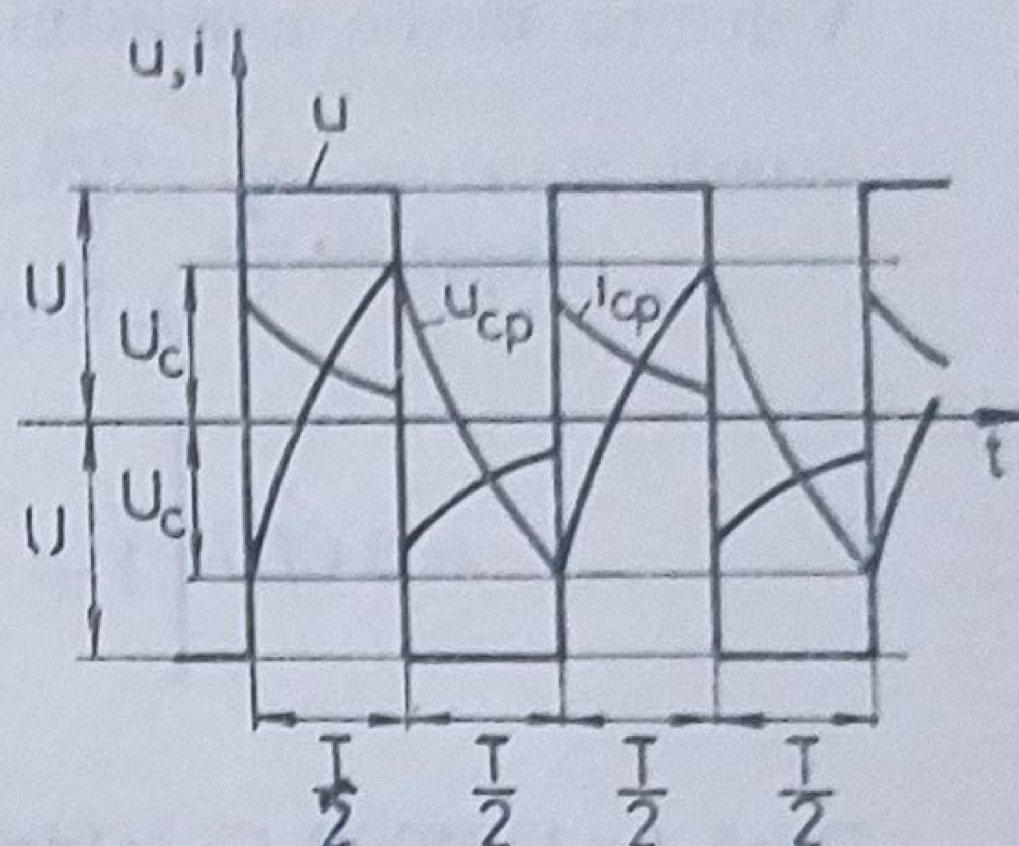


Fig. 5.3.

$$i_{cp} R_a = u - u_{cp}$$

sau

$$i_{cp} R_a + \frac{1}{C} \int i_{cp} \mathrm{d}t = u.$$

Pentru semiperioadele în care tensiunea u este pozitivă condiția inițială a acestei ecuații este

$$i_{cp} = \frac{U + U_c}{R_a}, \quad (t = (k-1)\,T, \quad k = 1, 2, 3, \ldots),$$

iar soluția ei

$$i_{cp} = \frac{U + U_c}{R_a} \exp\left[-\frac{t-(k-1)\,T}{R_a C} \right].$$

În semiperioadele în care tensiunea u este negativă condiția inițială a ecuației este :

$$i_{cp} = -\frac{U + U_c}{R_a}, \quad \left(t = \frac{(2k-1)\,T}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \right),$$

iar soluția ei

$$i_{cp} = -\frac{U + U_c}{R_a} \exp\left[\frac{t - \frac{(2k-1)\,T}{2}}{R_a C} \right].$$

Într-o semiperioadă în care tensiunea u este pozitivă :

$$u_{cp} = u - i_{cp} R_a,$$

$$u_{cp} = U \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{t-(k-1)\,T}{R_a C} \right] \right\} - U_c \exp\left[-\frac{t-(k-1)\,T}{R_a C} \right].$$

La sfîrșitul acestei semiperioade

$$u_{cp} = U_c$$

și rezultă

$$U_c = U \frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{2 R_a C} \right)}{1 + \exp\left(-\frac{T}{2 R_a C} \right)}.$$

Curentul i_{ap}, care trece în regimul permanent prin miliampermetru, se obține prin redresarea curentului i_{cp}, care trece în regimul permanent prin condensatorul C. Deci :

$$i_{ap} = |i_{cp}| = \frac{U + U_c}{R_a} \exp\left[-\frac{\frac{t-(l-1)\,T}{2}}{R_a C} \right], \quad (l = 1, 2, 3, \ldots).$$

Valoarea medie a acestui curent este :

$$I_{a\,med}=\frac{2}{T}\int_{(l-1)T/2}^{lT/2} i_{ap}\,\mathrm{d}t=\frac{2C\,(U+U_c)}{T}\left[1-\exp\left(-\frac{T}{2\,R_aC}\right)\right]=$$

$$=2\,CfU\left[1+\frac{1-\exp\left(-\frac{1}{2\,fR_aC}\right)}{1+\exp\left(-\frac{1}{2\,fR_aC}\right)}\right]\left[1-\exp\left(-\frac{1}{2\,fR_aC}\right)\right].$$

Dacă $f\leqslant 1/(10\,R_aC)$, atunci $\exp\left[-1/(2fR_aC)\right]\leqslant 0{,}01$, și $I_{a\,med}\approx 4CfU$.

Înseamnă că valoarea medie a curentului prin miliampermetru este proporțională cu frecvența ; miliampermetrul fiind magnetoelectric deviația sa este de asemenea proporțională cu frecvența.

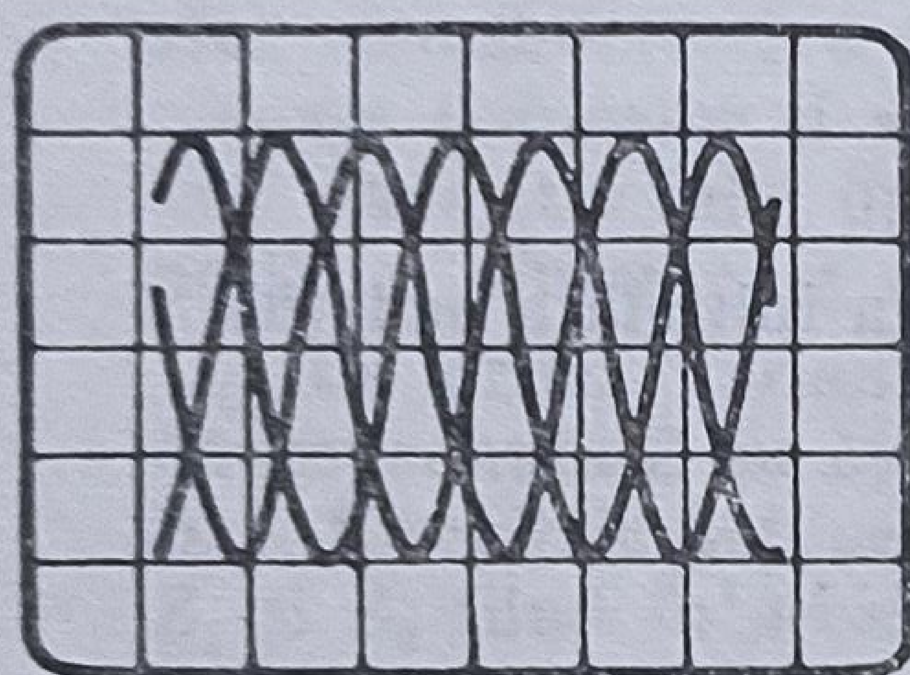


Fig. 5.4.

Problema. 5.4. Frecvența bazei de timp a unui osciloscop catodic este 50 kHz. Se aplică acestui osciloscop o tensiune alternativă, obținîndu-se pe ecran imaginea stabilă din fig. 5.4. Să se determine frecvența f a tensiunii aplicate osciloscopului.

Soluție. Studiind imaginea din fig. 5.4, se constată că spotul descrie 7 perioade complete ale tensiunii alternative în 3 perioade complete ale bazei de timp. Prin urmare :

$$\frac{7}{f}=\frac{3}{50}$$

sau

$$f=\frac{50.7}{3}=116{,}67\text{ kHz}.$$

Problema 5.5. Un osciloscop catodic are constanta corespunzătoare deviației verticale a spotului $C_Y=1$ V/cm și constanta corespunzătoare deviației pe orizontală a spotului $C_X=2$ V/cm. Să se traseze imaginea stabilă, care apare pe ecranul osciloscopului sub acțiunea tensiunilor alternative

$$u_y=2{,}15\sin 314\,t,\ [\text{V}\ ;\ \text{s}]\ \text{și}\ u_x=4{,}5\sin(3\cdot 314t-1{,}046),\ [\text{V}\ ;\ \text{s}]$$

aplicate plăcilor de deviație verticală și orizontală.

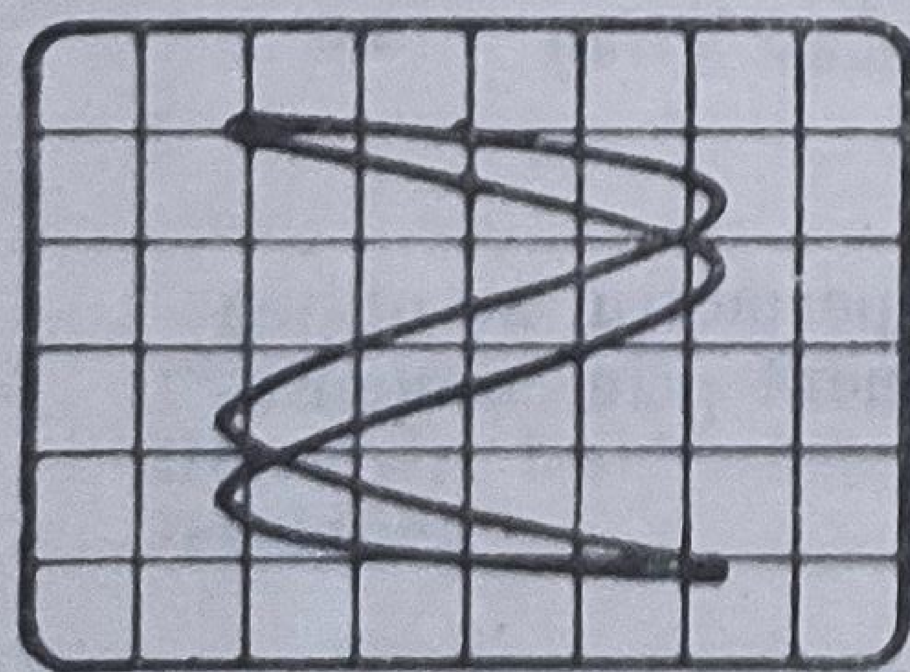


Fig. 5.5.

Soluție. Presupunînd că osciloscopul catodic nu prezintă distorsiuni de fază, pe ecranul său apare imaginea stabilă din fig. 5.5.

Problema 5.6. Un frecvențmetru numeric conține un generator de frecvență etalon de 1 MHz cu stabilitatea de $5\cdot 10^{-4}$ %. La măsurarea frecvenței f_x a unei tensiuni alternative rezoluția este 0,1 Hz, iar la măsurarea perioadei T_x a aceleiași tensiuni rezoluția este 1 µs. Știind că eroarea absolută de cuantizare corespunde

rezoluţiei, să se afle în ce condiţii frecvenţa f_x şi perioada T_x se măsoară cu aceeaşi eroare relativă procentuală limită.

Soluţie. La măsurarea frecvenţei f_x eroarea relativă procentuală limită este :

$$(\pm 5 \cdot 10^{-4}) + \frac{100 \cdot (\pm 0{,}1)}{f_x},$$

iar la măsurarea perioadei T_x ea este

$$(\pm 5 \cdot 10^{-4}) + \frac{100 \cdot (\pm 1 \cdot 10^{-6})}{T_x} = (\pm 5 \cdot 10^{-6}) + 100 \cdot (\pm 1 \cdot 10^{-6}) f_x .$$

Cele două erori sînt egale cînd f_x=316,2 Hz sau T_x=3,162 ms. Dacă frecvenţa f_x este mai mare decît 316,2 Hz, atunci este mai avantajoasă măsurarea frecvenţei, iar dacă frecvenţa f_x este mai mică decît 316,2 Hz, atunci este mai avantajoasă măsurarea perioadei.

Timpul de măsurare minim pentru obţinerea rezultatului f_x=316,2 Hz corespunde timpului, în care la numărătorul din frecvenţmetru ajung 3 162 impulsuri de la generatorul de frecvenţă etalon. Acest timp este :

$$\frac{3\,162}{1 \cdot 10^{6}} = 3{,}162 \cdot 10^{-3}\,\text{s} = 3{,}162\ \text{ms}.$$

Dacă frecvenţa f_x este mai ridicată, atunci şi timpul de măsurare minim este mai mare.

Pentru obţinerea rezultatului T_x=3,162 ms este necesar timpul de măsurare de 3,162 ms, în care la numărătorul din frecvenţmetru ajung

$$3{,}162 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{6} = 3\,162\ \text{impulsuri}.$$

Dacă perioada T_x este mai lungă, atunci şi timpul de măsurare minim este mai mare.

Problema 5.7. Cu puntea de c. a. Wien din fig. 5.6 se măsoară frecvenţa f a tensiunii alternative U. La echilibrul sesizat de galvanometrul vibrator, $C_1 = 0{,}976\ \mu F$, $C_2 = 0{,}2\ \mu F$, $R_1 = 151\ \Omega$ şi R_2=17 230 Ω.

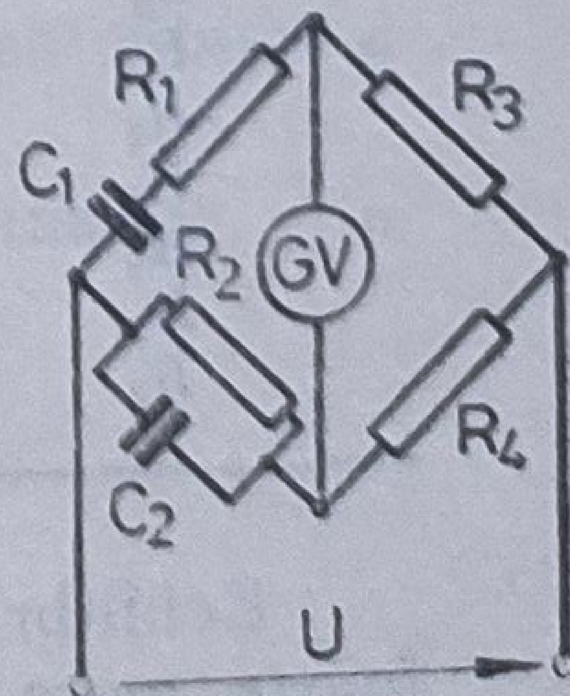


Fig. 5.6.

1. Ce relaţie trebuie să existe între frecvenţa de rezonanţă f_0 a galvanometrului vibrator şi frecvenţa f a tensiunii alternative U ?

2. Să se calculeze raportul rezistenţelor R_3 şi R_4 din punte.

3. Să se determine frecvenţa f şi eroarea relativă procentuală limită $E_{r\,lim\,f}$ de măsurare a ei, ştiind că clasa de precizie a capacităţilor C_1 şi C_2 este 1, a rezistenţelor R_1 şi R_2 este 0,1, iar pragul de sensibilitate al punţii neglijabil.

Soluție. 1. Pentru ca echilibrul să fie corect sesizat cele două frecvențe f_0 și f trebuie să fie egale.

2. $$\frac{R_3}{R_4} = \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} = \frac{151}{17\,230} + \frac{0{,}2 \cdot 10^{-6}}{0{,}976 \cdot 10^{-6}} = 0{,}2137.$$

3. $$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14 \sqrt{151 \cdot 17\,230 \cdot 0{,}976 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6}}} = 223{,}4 \text{ Hz},$$

$$E_{r\,\lim f} = -\frac{1}{2}(\pm 0{,}1) - \frac{1}{2}(\pm 0{,}1) - \frac{1}{2}(\pm 1) - \frac{1}{2}(\pm 1) = \pm 1{,}1\%.$$

Problema 5.8. La echilibrarea punții de c.a. Wien din fig. 5.6 este necesară modificarea valorii a cel puțin doi din cei șase parametri din punte. Să se analizeze posibilitățile de echilibrare, luînd în considerare toate combinațiile de doi cîte doi din parametrii C_1, C_2, R_1, R_2, R_3 și R_4 și presupunînd sensibilitatea galvanometrului vibrator foarte mare.

Soluție. Notînd cu $\underline{Z}_1 = R_1 + 1/j\, 2\pi f C_1$, $\underline{Z}_2 = R_2/(1 + j\, 2\pi f R_2 C_2)$, $\underline{Z}_3 = R_3$ și $\underline{Z}_4 = R_4$ impedanțele din punte și cu A și B cei doi parametri variabili cu care se încearcă echilibrarea punții, se obține unghiul de convergență

$$\varkappa = \arg \frac{\partial}{\partial A}(\underline{Z}_1 \underline{Z}_4 - \underline{Z}_2 \underline{Z}_3) - \arg \frac{\partial}{\partial B}(\underline{Z}_1 \underline{Z}_4 - \underline{Z}_2 \underline{Z}_3).$$

Valorile unghiului de convergență $\varkappa$ în funcție de parametrii variabili ai punții de c.a. din fig. 5.6 s-au redat în tabelul 5.1.

Tabelul 5.1

A	B	$\varkappa$ [rad]
C_1	C_2	$2\ \mathrm{arctg}\,(2\pi f R_2 C_2)$
C_1	R_1	$\pi/2$
C_1	R_2	$-\pi/2 + 2\ \mathrm{arctg}\,(2\pi f R_2 C_2)$
C_1	R_3	$-\pi/2 + \mathrm{arctg}\,(2\pi f R_2 C_2)$
C_1	R_4	$\pi/2 + \mathrm{arctg}\,(1/2\pi f R_1 C_1)$
C_2	R_1	$\pi/2 - 2\ \mathrm{arctg}\,(2\pi f R_2 C_2)$
C_2	R_2	$-\pi/2$
C_2	R_3	$-\pi/2 - \mathrm{arctg}\,(2\pi f R_2 C_2)$
C_2	R_4	$\pi/2 - 2\ \mathrm{arctg}\,(2\pi f R_2 C_2) + \mathrm{arctg}\,(1/2\pi f R_1 C_1)$
R_1	R_2	$-\pi + 2\ \mathrm{arctg}\,(2\pi f R_2 C_2)$
R_1	R_3	$-\pi + \mathrm{arctg}\,(2\pi f R_2 C_2)$
R_1	R_4	$\mathrm{arctg}\,(1/2\pi f R_1 C_1)$
R_2	R_3	$-\mathrm{arctg}\,(2\pi f R_2 C_2)$
R_2	R_4	$\pi - 2\ \mathrm{arctg}\,(2\pi f R_2 C_2) + \mathrm{arctg}\,(1/2\pi f R_1 C_1)$
R_3	R_4	$\pi - \mathrm{arctg}\,(2\pi f R_2 C_2) + \mathrm{arctg}\,(1/2\pi f R_1 C_1)$

Echilibrarea unei punți de c.a., avînd indicator de nul cu sensibilitatea foarte mare este posibilă dacă unghiul de convergență $\varkappa$ satisface condițiile $\varkappa \neq 0$ și $\varkappa \neq \pi$ rad. Ea are loc în condiții optime dacă unghiul de convergență este $\varkappa = \pm \pi/2$ rad.

Echilibrarea punţii de c.a. din fig. 5.6 are loc în condiţii optime prin intermediul parametrilor C_1 şi R_1 sau C_2 şi R_2 indiferent de ceilalţi parametri din punte. Pentru alte perechi de parametri echilibrarea este condiţionată de ceilalţi parametri din punte. De ex., echilibrarea nu are loc cu C_1 şi C_2, dacă $\mathrm{arctg}\,(2\pi f R_2 C_2) = \pi/2$ rad sau cu C_1 şi R_2 dacă $\mathrm{arctg}\,(2\pi f R_2 C_2) = \pi/4$ rad.

Tabelul 5.2

α [rad]	$\cos\varphi$	
0	0,8	capacitiv
0,148	0,9	
0,401	1	
0,659	0,9	
0,79	0,8	
0,919	0,7	
1,038	0,6	inductiv
1,162	0,5	
1,286	0,4	
1,42	0,3	
1,57	0,2	

Problema 5.9. Dependenţa deviaţiei α a echipajului mobil al unui cosfimetru faţă de factorul de putere $\cos\varphi$ s-a redat în tabelul 5.2. Cosfimetrul are clasa de precizie 1,5 definită ca eroare raportată procentuală limită faţă de lungimea scării aparatului considerată ca valoare convenţională. Să se reprezinte grafic dependenţa erorii absolute limită $E_{\lim\cos\varphi}$ şi a erorii relative procentuale limită $E_{r\lim\cos\varphi}$ faţă de factorul de putere $\cos\varphi$ indicat de aparat.

Soluţie. Eroarea absolută limită corespunzătoare deviaţiei α este :

$$E_{r\lim\alpha} = \frac{(\pm 1,5)\cdot\alpha_{max}}{100} = \frac{(\pm 1,5)\cdot 1,57}{100} = \pm 0,0235 \text{ rad},$$

iar eroarea absolută limită corespunzătoare factorului de putere $\cos\varphi$ indicat de aparat

$$E_{\lim\cos\alpha} = \frac{E_{\lim\alpha}}{\dfrac{d\alpha}{d(\cos\varphi)}} = \pm\frac{0,0235}{\dfrac{d\alpha}{d(\cos\varphi)}}.$$

Pe baza datelor din tabelul 5.2 s-a reprezentat grafic în fig. 5.7 dependenţa deviaţiei α faţă de factorul de putere $\cos\varphi$. Apoi s-a stabilit şi s-a trasat dependenţa derivatei $d\alpha/d(\cos\varphi)$ faţă de factorul de putere. În continuare s-au reprezentat grafic funcţiile $E_{\lim\cos\varphi}(\cos\varphi)$ şi

$$E_{r\lim\cos\varphi}(\cos\varphi) = \frac{100\,E_{\lim\cos\varphi}}{\cos\varphi}.$$

Se constată că eroarea relativă procentuală limită $E_{r\lim\cos\varphi}$ este mică în jurul valorii maxime a factorului de putere $\cos\varphi$ şi mare la valoarea minimă a factorului de putere $\cos\varphi$.

Problema 5.10. Cuplurile care apar în logometrul electrodinamic din fig. 5.8 au expresiile :

$$M_1 = K I_A I_{B1} \cos(\widehat{I_A, I_{B1}}) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

şi

$$M_2 = K I_A I_{B2} \cos(I_A, I_{B2}) \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right),$$

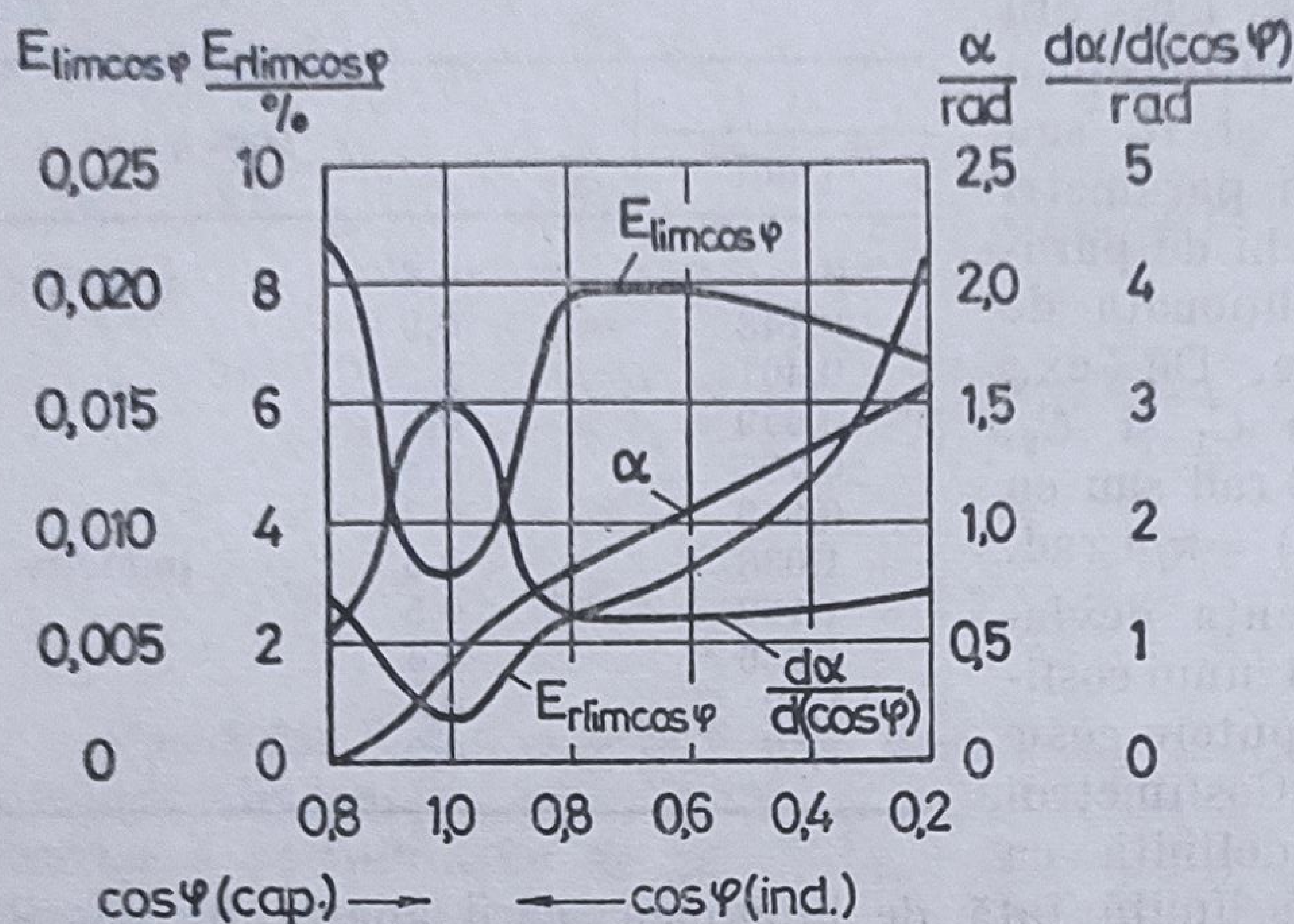


Fig. 5.7.

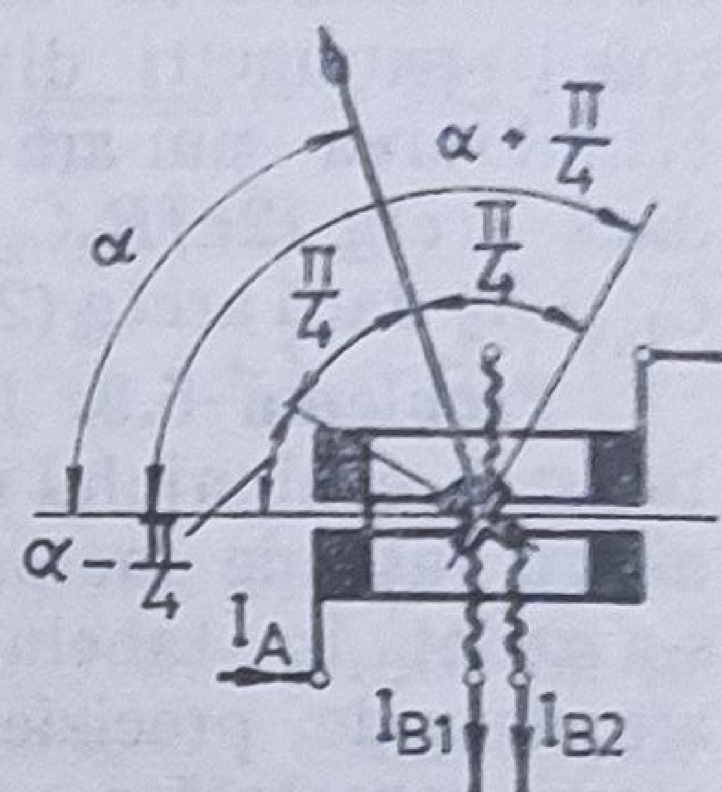


Fig. 5.8.

în care K este o constantă. În regimul permanent.

$$M_1 = M_2$$

și

$$\frac{I_{B1}\cos(\widehat{I_A, I_{B1}})}{I_{B2}\cos(\widehat{I_A, I_{B2}})} = \frac{1+\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Cu logometrul legat conform schemei din fig. 5.9 se măsoară factorul de putere cos φ într-un circuit de c.a. trifazat simetric. Știind că inductivitățile bobinelor mobile sînt neglijabile, să se determine raportul dintre rezistențele R_1 a circuitului primei bobine mobile și R_2 a circuitului celei de a doua bobine mobile astfel încît intervalului de măsurare cuprins între $\cos\varphi' = 0{,}8$ (capacitiv) și $\cos\varphi'' = 0{,}2$ (inductiv) să-i corespundă deviația maximă $\alpha'' - \alpha' = \pm\pi/2$ rad

Soluție. Pe baza diagramei valorilor efective din fig. 5.10 rezultă :

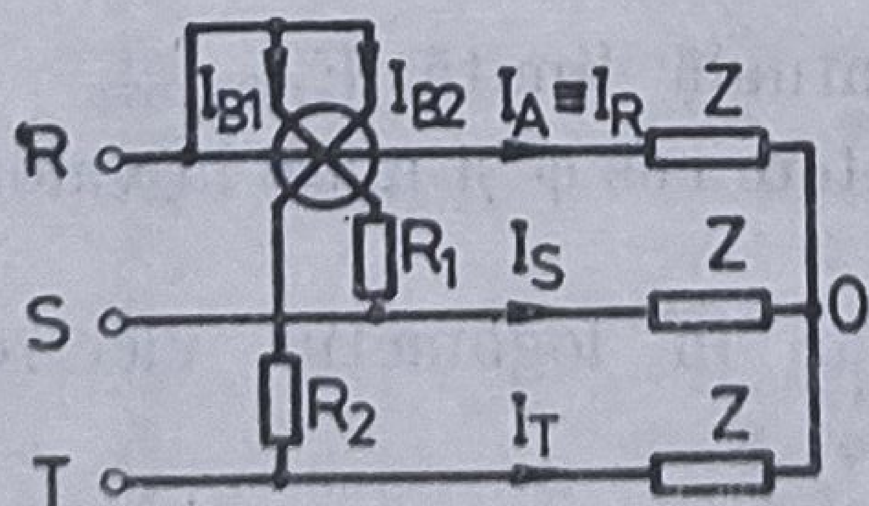


Fig. 5.9.

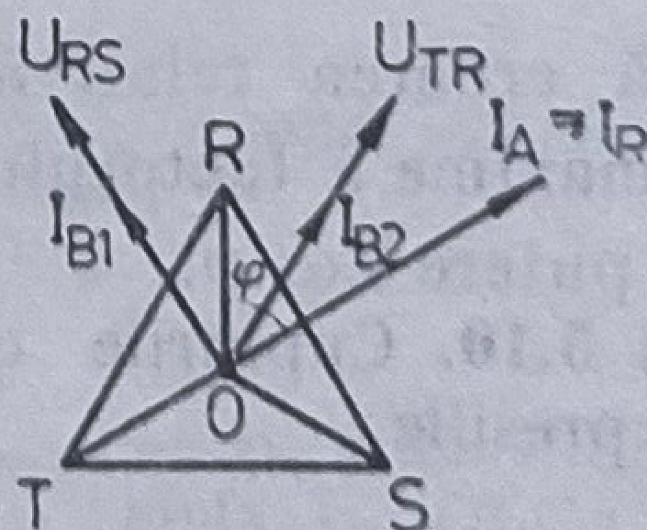


Fig. 5.10.

$$\frac{I_{B1}\cos(\widehat{I_A, I_{B1}})}{I_{B2}\cos(\widehat{I_A, I_{B2}})} = \frac{U_{RS}}{R_1}\cdot\frac{R_2}{U_{TR}}\,\frac{\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{R_2}{R_1}\,\frac{1-0{,}577\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1+0{,}577\,\mathrm{tg}\,\varphi} = \frac{1+\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

De aici :

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left[\frac{\frac{R_2}{R_1}\frac{1-0{,}577\ \mathrm{tg}\ \varphi}{1+0{,}577\ \mathrm{tg}\ \varphi}-1}{\frac{R_2}{R_1}\frac{1-0{,}577\ \mathrm{tg}\ \varphi}{1+0{,}577\ \mathrm{tg}\ \varphi+1}}\right] = \operatorname{arctg}\left[\frac{\frac{R_2}{R_1}(1-0{,}577\ \mathrm{tg}\ \varphi)-(1+0{,}577\ \mathrm{tg}\ \varphi)}{\frac{R_2}{R_1}(1-0{,}577\ \mathrm{tg}\ \varphi)+(1+0{,}577\ \mathrm{tg}\ \varphi)}\right].$$

La $\cos\varphi'=0{,}8$ (capacitiv) corespunde $\varphi'=-0{,}643$ rad, $\mathrm{tg}\ \varphi'=-0{,}75$ și

$$\alpha' = \operatorname{arctg}\left[\frac{1{,}433\frac{R_2}{R_1}-0{,}567}{1{,}433\frac{R_2}{R_1}+0{,}567}\right],$$

iar la $\cos\varphi''=0{,}2$ (inductiv) corespund $\varphi''=1{,}369$ rad, $\mathrm{tg}\ \varphi''=4{,}898$ și

$$\alpha'' = \operatorname{arctg}\left[\frac{1{,}826\frac{R_2}{R_1}-3{,}826}{-1{,}826\frac{R_2}{R_1}+3{,}826}\right].$$

Condiția

$$\alpha''-\alpha' = \pm\frac{\pi}{2}$$

este îndeplinită cînd

$$1+\frac{1{,}433\frac{R_2}{R_1}-0{,}567}{1{,}433\frac{R_2}{R_1}+0{,}567}\cdot\frac{-1{,}826\frac{R_2}{R_1}-3{,}826}{-1{,}826\frac{R_2}{R_1}+3{,}826}=0$$

sau

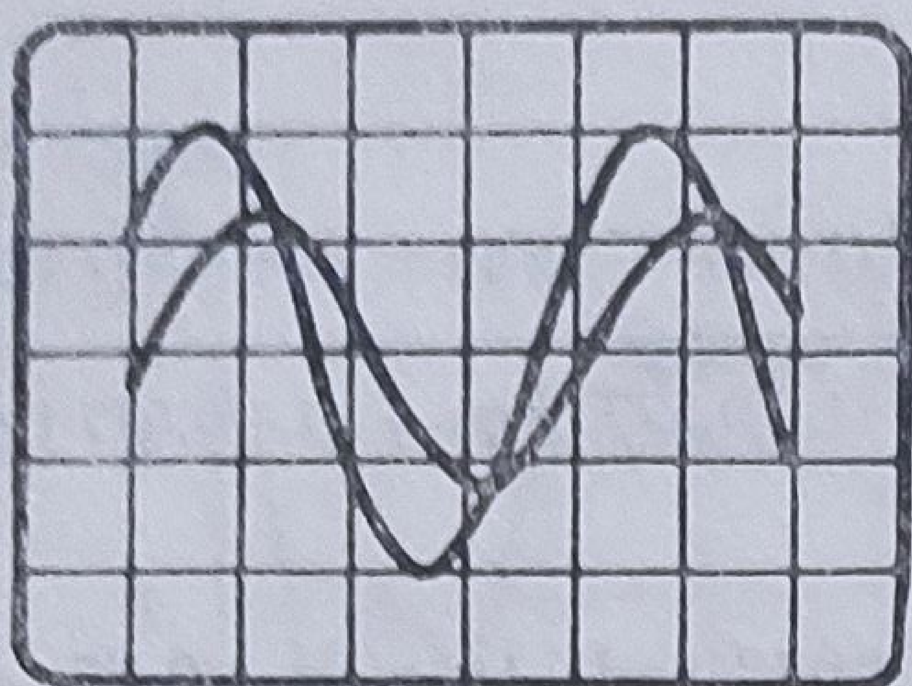
$$\frac{R_2}{R_1}=0{,}921 \quad \text{și} \quad \frac{R_1}{R_2}=1{,}086.$$

Problema 5.11. Pe ecranul unui osciloscop catodic se obține imaginea stabilă din fig. 5.11. Să se determine defazajul φ dintre cele două tensiuni alternative.

Soluție. $\varphi=\pi/4$ rad.

Problema 5.12. Plăcilor de deviație verticală și orizontală ale unui osciloscop catodic li se aplică două tensiuni alternative defazate între ele, obținîndu-se pe ecran elipsa din fig. 5.12. Să se determine defazajul φ dintre cele două tensiuni alternative.

Soluție. Presupunînd că osciloscopul catodic nu prezintă distorsiuni de fază, $\varphi = \arcsin\frac{a}{b} = \arcsin\frac{4{,}2}{4{,}6} = 1{,}15$ rad.


Fig. 5.11.

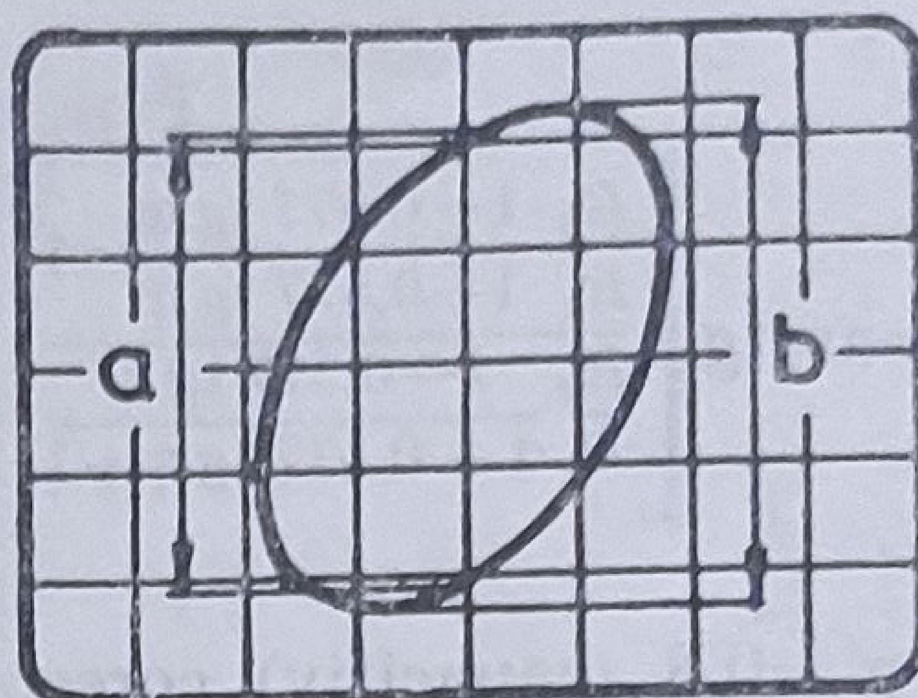


Fig. 5.12.

Problema 5.13. Cu ajutorul ampermetrului, voltmetrului și wattmetrului legate conform schemei din fig. 5.13 se măsoară factorul de putere cos φ al consumatorului, avînd impedanța Z. Caracteristicile și indicațiile aparatelor de măsură sînt redate în tabelul 5.3.

Tabelul 5.3

Aparatul de măsură	Intervalul de măsurare [A, V, W]	Scara [div]	Indicația [div]	Clasa de precizie	Consumul
Ampermetrul	5	100	92	0,5	neglijabil
Voltmetrul	250	250	221	0,5	neglijabil
Wattmetrul	1 500	150	67	0,5	neglijabil

Cît este factorul de putere cos φ și cu ce eroare relativă procentuală limită $E_{r\lim\cos\varphi}$ se determină ?

Soluție. Consumul aparatelor de măsură fiind neglijabil, rezultă :

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1\,500}{150}\cdot 67}{\frac{250}{250}\cdot 221\cdot\frac{5}{100}\cdot 92} = 0{,}66$$

$$E_{r\,\lim\cos\varphi} = (\pm 0{,}5)\cdot\frac{150}{67} + (\pm 0{,}5)\,\frac{100}{92} + (\pm 0{,}5)\cdot\frac{250}{221} = \pm 2{,}228\%.$$

Problema 5.14. Bobina de curent a unui wattmetru este parcursă de un c.a., avînd valoarea efectivă și faza constante. I se aplică bobinei de tensiune a aceluiași wattmetru tensiunea U_{RS} dintre fazele R și S ale unui circuit de c.a. trifazat simetric obținîndu-se indicația $a_1 = 38{,}2$ diviziuni. Apoi i se aplică aceleiași bobine tensiunea U_{ST} dintre fazele S și T, indicația wattmetrului fiind $a_2 = 17{,}5$ diviziuni.

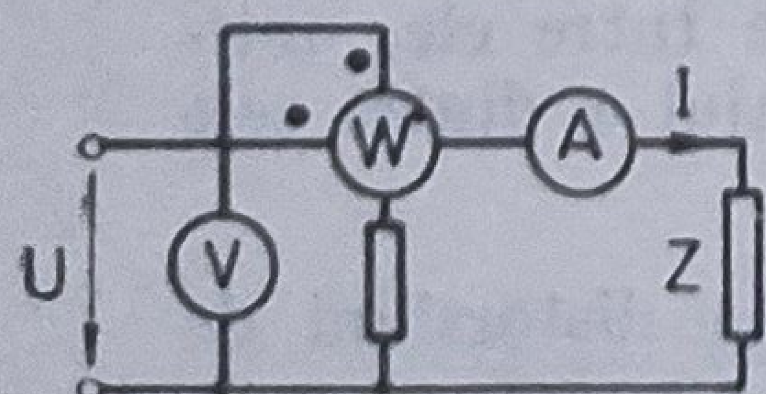


Fig. 5.13.

1. Presupunînd că măsurarea a avut loc fără erori, să se stabilească defazajele dintre curentul I și tensiunile U_{RS} și U_{ST}.

2. Care este indicația a_3 a wattmetrului dacă bobina lui de curent este parcursă de curentul I, iar bobinei sale de tensiune i se aplică tensiunea U_{TR} dintre fazele T și R ale circuitului de c.a. trifazat, erorile de măsurare fiind și de data aceasta neglijabile ?

Soluție. 1. Dacă se notează cu C constanta wattmetrului, atunci

$$a_1 = \frac{U_{RS} I \cos(\widehat{U_{RS}, I})}{C} = 38{,}2 \text{ div}$$

$$a_2 = \frac{U_{ST} I \cos(\widehat{U_{ST}, I})}{C} = \frac{U_{RS}\ I \cos\left[(\widehat{U_{RS}, I}) - \frac{2\pi}{3}\right]}{C} = 17{,}5 \text{ div},$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\cos\left[(\widehat{U_{RS}, I}) - \frac{2\pi}{3}\right]}{\cos(\widehat{U_{RS}, I})} = \frac{17{,}5}{38{,}2} = 0{,}458,$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{U_{RS}, I}) = 1{,}106, \qquad (\widehat{U_{RS}, I}) = 0{,}836 \text{ rad},$$

$$(\widehat{U_{ST}, I}) = (\widehat{U_{RS}, I}) - \frac{2\pi}{3} = 0{,}836 - 2{,}094 = -1{,}258 \text{ rad}.$$

2.

$$a_3 = \frac{U_{TR} I \cos(\widehat{U_{TR}, I})}{C} = \frac{U_{RS}\ I \cos\left[(\widehat{U_{RS}, I}) + \frac{2\pi}{3}\right]}{C} =$$

$$= \left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}(\widehat{U_{RS}, I})\right] \cdot \frac{U_{RS}\ I \cos(\widehat{U_{RS}, I})}{C} =$$

$$= (-0{,}5 - 0{,}866 \cdot 1{,}106) \cdot 38{,}2 = -55{,}7 \text{ div}.$$

Problema 5.15. Într-un circuit de c.a. trifazat simetric wattmetrele W_1 și W_2 legate conform schemei din fig. 5.14 indică $a_1 = 117$ diviziuni și $a_2 = 33{,}5$ diviziuni. Știind că wattmetrele au tensiunea nominală $U_n = 450$ V, curentul nominal $I_n = 5$ A, factorul de putere nominal $\cos\varphi_n = 1$, scara $a_{max} = 150$ diviziuni, clasa de precizie 0,5 și consumul neglijabil, să se calculeze defazajul dintre tensiunile și curenții de fază, factorul de putere al consumatorului precum și erorile relative procentuale limită cu care se determină aceste mărimi.

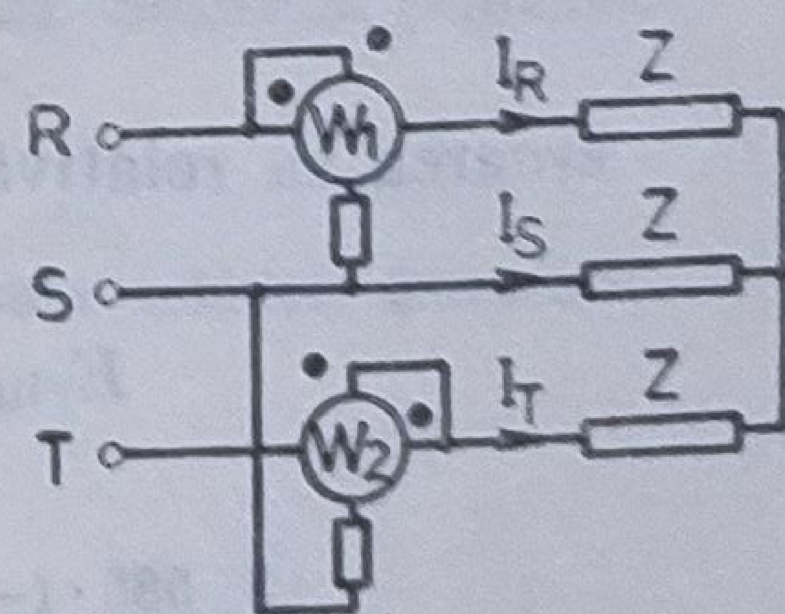


Fig. 5.14.

Soluție. Primul wattmetru indică puterea :

$$P_1 = \frac{U_n I_n \cos\varphi_n}{a_{max}} \cdot a_1 = \frac{150 \cdot 5 \cdot 1}{150} \cdot 117 = 585 \text{ W},$$

cu eroarea relativă procentuală limită

$$E_{r\,\lim 1} = (\pm 0{,}5) \cdot \frac{a_{max}}{a_1} = (\pm 0{,}5) \cdot \frac{150}{117} = \pm 0{,}64\,\%.$$

Indicaţia celui de al doilea wattmetru este negativă deoarece borna de intrare a bobinei de curent este legată invers faţă de sensul pozitiv al curentului

$$P_2 = -\frac{U_n I_n \cos \varphi_n}{a_{max}} \cdot a_2 = -\frac{150 \cdot 5 \cdot 1}{150} \cdot 33{,}5 = -167{,}5 \text{ W}.$$

Eroarea ei relativă procentuală limită este:

$$E_{r\,\lim 2} = (\pm 0{,}5) \cdot \frac{a_{max}}{a_2} = (\pm 0{,}5) \cdot \frac{150}{33{,}5} = \pm 2{,}24\,\%.$$

Defazajul dintre tensiunile şi curenţii de fază este:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\,\frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1}\right) = \operatorname{arctg}\left(1{,}73\,\frac{-167{,}5 - 585}{-167{,}5 + 585}\right) = -1{,}26 \text{ rad},$$

determinat cu eroarea relativă procentuală limită

$$E_{r\,\lim \varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{E_{r\,\lim 1} + E_{r\,\lim 2}}{\varphi\left(\frac{P_1}{P_2} + \frac{P_2}{P_1} - 1\right)} = \frac{1{,}73}{2} \cdot \frac{(\pm 0{,}64) + (\pm 2{,}24)}{(-1{,}26)\left(-\frac{585}{167{,}5} - \frac{167{,}5}{585} - 1\right)} = \pm 0{,}413\,\%$$

Factorul de putere este:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 3\left(\frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 3\left(\frac{-167{,}5 - 585}{-167{,}5 + 585}\right)^2}} = 0{,}305,$$

eroarea sa relativă procentuală limită de determinare fiind

$$E_{r\,\lim \cos\varphi} = \frac{3}{2}\,\frac{P_1 P_2 (P_2 - P_1)}{P_1^3 + P_2^3}\,(E_{r\,\lim 1} + E_{r\,\lim 2}) =$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{585 \cdot (-167{,}5)\,(-167{,}5 - 585)}{585^3 + (-167{,}5)^3}\,[(\pm 0{,}64) + (\pm 2{,}24)] = \pm 1{,}63\,\%.$$

Problema 5.16. O întreprindere industrială consumă într-un interval de timp $t = 1$ an energia activă $W = 23\,751$ MWh şi energia reactivă $W_r = 12\,914$ MVArh. Energiile consumate se măsoară cu erorile relative procentuale limită $E_{r\,\lim W_r} = \pm 2\%$ şi $E_{r\,\lim W_r} = \pm 2{,}5\%$ cu contoare de energie electrică.

1. Să se determine factorul de putere mediu $\cos \varphi_{med}$ al consumatorului pentru intervalul de timp considerat.

2. Să se calculeze eroarea relativă procentuală limită $E_{r\lim\cos\varphi med}$ de determinare a factorului de putere mediu $\cos\varphi_{med}$.

Soluție. 1. Valorile medii ale puterii aparente și puterii active absorbite de întreprinderea industrială în intervalul de timp considerat sînt:

$$S_{med} = \frac{\sqrt{W^2 + W_r^2}}{t}$$

și

$$P_{med} = \frac{W}{t} = S_{med} \cos\varphi_{med}.$$

Rezultă:

$$\cos\varphi_{med} = \frac{W}{\sqrt{W^2 + W_r^2}} = \frac{23\,751}{\sqrt{23\,751^2 + 12\,914^2}} = 0{,}879.$$

2. Ținînd seama de relațiile (1.6 și 1.7) se obține:

$$E_{r\lim\cos\varphi med} = \frac{W_r^2}{W^2 + W_r^2}(E_{r\lim W} + E_{r\lim Wr}) =$$

$$= (1 - \cos^2\varphi_{med})(E_{r\lim W} + E_{r\lim Wr}) =$$

$$= (1 - 0{,}879^2)[(\pm 2) + (\pm 2{,}5)] = \pm 1{,}023\%.$$

BIBLIOGRAFIE PENTRU CAPITOLUL 5

– Pentru întregul capitol

Manolescu, P. *Măsurări electrice industriale*, vol. I, cap. 8. Editura tehnică, București, 1966.
Pop, E., Chivu, M. *Măsurări electrice și magnetice*, vol. II, cap. 21 și 22. Institutul politehnic Timișoara, 1969.

– Pentru anumite probleme.

5.1. Manolescu, P. *Măsurări electrice industriale*, vol. I, cap. 2. Editura tehnică, București, 1966.

CAPITOLUL 6

MĂSURAREA MĂRIMILOR DE STARE ALE CÎMPULUI MAGNETIC

Cîmpul magnetic se caracterizează prin mărimi de stare, dintre care cele mai importante din punct de vedere practic sînt intensitatea cîmpului magnetic H, inducția magnetică B, tensiunea magnetică U_m, fluxul magnetic Φ și înlănțuirea magnetică Ψ.

Măsurarea acestor mărimi ale cîmpului magnetic are loc de obicei prin metode indirecte, pe baza anumitor legi (de ex. legea circuitului magnetic, legea inducției electromagnetice), folosindu-se în mod adecvat traductoare (de ex., traductoare Hall, bobine de măsurare) și aparate de măsură cu citire directă (de ex., ampermetre, voltmetre, galvanometre balistice, fluxmetre).

Calculul erorilor aferente măsurării mărimilor de stare ale cîmpului magnetic se efectuează – ținînd seama de particularitățile expresiilor, traductoarelor și aparatelor de măsură folosite – cu ajutorul relațiilor (1.1 – 1.7).

Problema 6.1. Să se determine intensitatea cîmpului magnetic H în centrul unei bobine cilindrice parcurse de curentul continuu $I=1{,}5$ A, știind că bobina are un număr de $N=180$ spire, raza $R=5$ cm și lungimea $l=1$ m.

Soluție. $H=\dfrac{IN}{\sqrt{4\,R^2+l^2}}=\dfrac{1{,}5\cdot 180}{\sqrt{4\cdot(0{,}05)^2+1^2}}=268{,}7$ A/m.

Problema 6.2. Un sistem de bobine inelare coaxiale B_1 și B_2 (fig. 6.1) are raza medie $R=0{,}16$ m, distanța $d=R$, lățimea înfășurărilor $a=0{,}008$ m, înălțimea înfășurărilor $b=0{,}01$ m și cîte un număr de $N=80$ spire parcurse de curentul continuu $I=1$ A. Să se calculeze intensitatea cîmpului magnetic H în centrul O al sistemului de bobine.

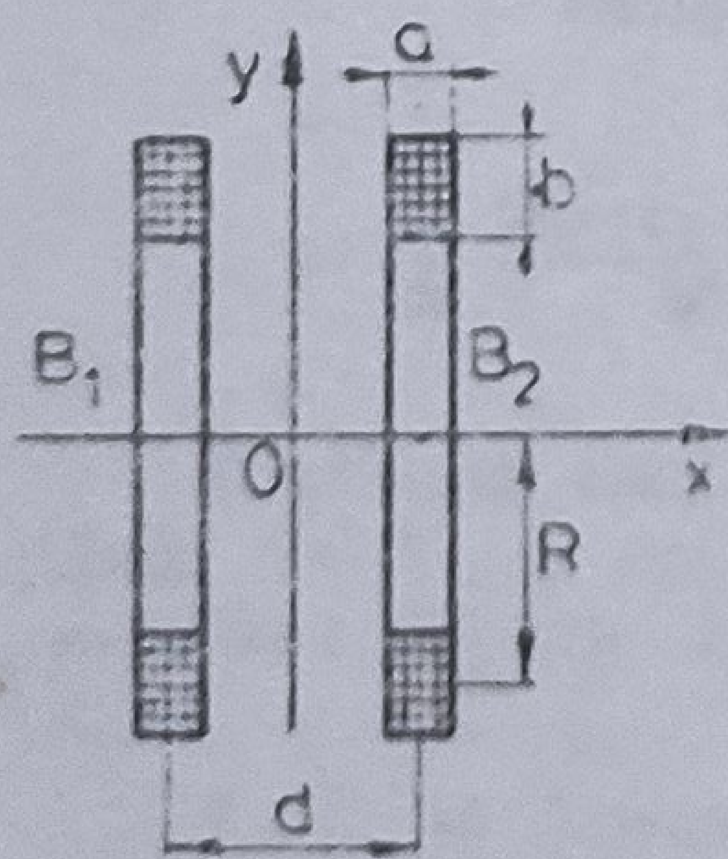


Fig. 6.1.

Soluție. În centrul O al sistemului de bobine componenta transversală H_y a intensității cîmpului magnetic este nulă, iar componenta axială se calculează cu relația:

$$H_x=\frac{0{,}71553\,IN}{R}\left(1-\frac{b^2}{60R^2}\right)=$$

$$=\frac{0{,}71553\cdot 1\cdot 80}{0{,}16}\left(1-\frac{0{,}01^2}{60\cdot 0{,}16^2}\right)=357{,}742\ \text{A/m}.$$

Problema 6.3. Un eşantion de formă inelară (toroidală) cu secţiunea dreptunghiulară (fig. 6.2), confecţionat din material feromagnetic, are diametrul exterior $D_{ext} = 12$ cm şi diametrul interior $D_{int} = 10$ cm, determinate cu eroarea absolută limită $E_{\lim D} = \pm 0,1$ mm. Uniform de-a lungul eşantionului s-au înfăşurat $N = 290$ spire parcurse de curentul continuu I, ce s-a măsurat cu un ampermetru, avînd intervalul de măsurare $I_n = 1,5$ A, scara $a_{max} = 60$ diviziuni, indicaţia $a = 45.6$ diviziuni şi clasa de precizie 1.

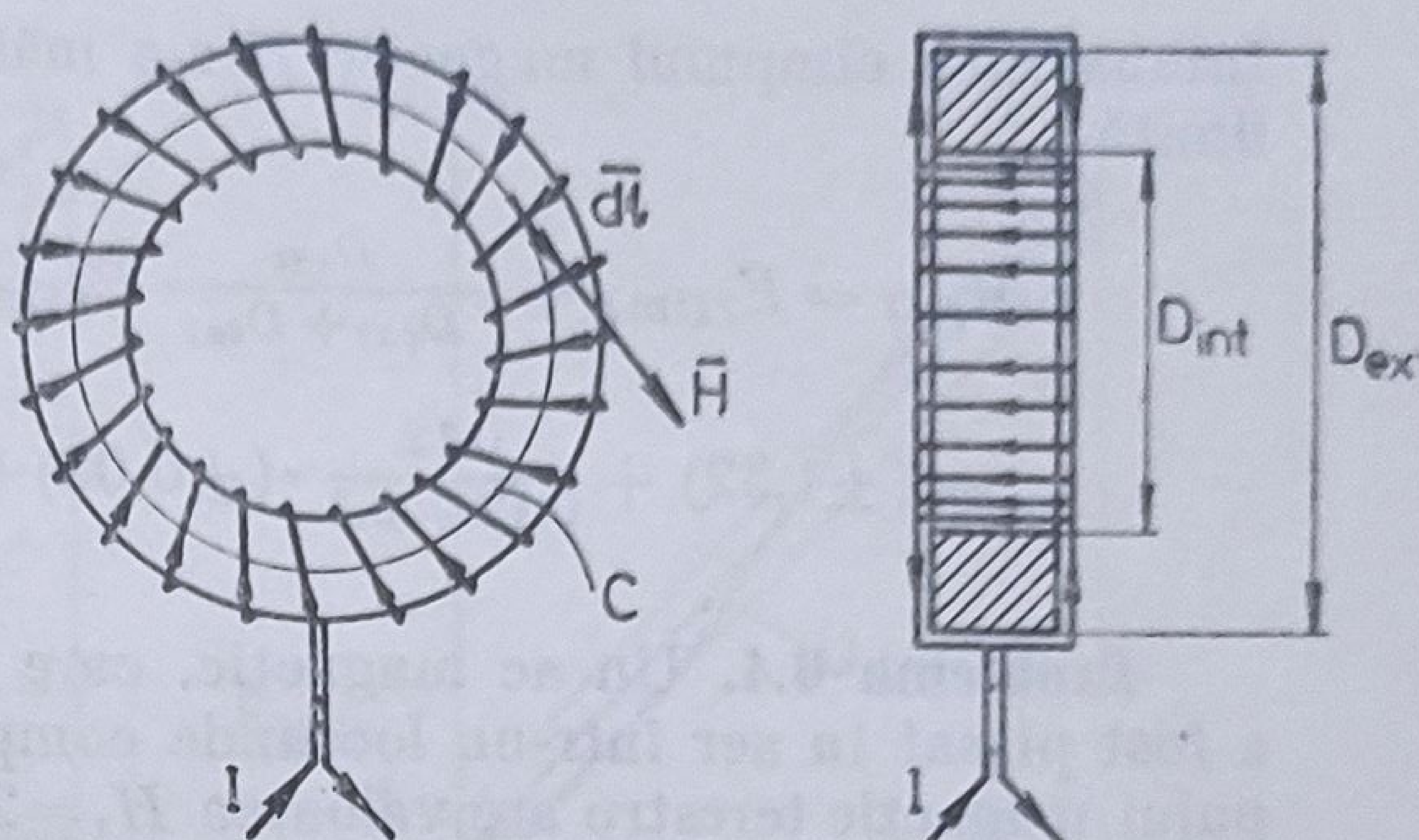


Fig. 6.2.

1. Să se afle intensitatea cîmpului magnetic H în dreptul circumferinţei medii C a eşantionului.

2. Să se calculeze eroarea relativă procentuală limită $E_{r\lim H}$ de determinare a intensităţii cîmpului magnetic H.

Soluţie. 1. Înfăşurarea dispusă de-a lungul eşantionului a fost parcursă de curentul :

$$I = \frac{I_r}{a_{max}} \cdot a = \frac{1,5}{60} \cdot 45,6 = 1,14 \text{ A}.$$

Pe baza legii circuitului magnetic rezultă din motive de simetrie

$$IN = \oint_C (\bar{H}\ \overline{dl}) = \oint_C H\, dl = H \oint_C dl = H \cdot \pi \frac{D_{ext} + D_{int}}{2}$$

sau

$$H = \frac{2\, IN}{(D_{ext} + D_{int})} = \frac{2 \cdot 1,14 \cdot 290}{3,14 \cdot (0,12 + 0,1)} = 957 \text{ A/m}.$$

2. Eroarea relativă procentuală limită de măsurare a curentului a fost :

$$E_{r\lim I} = (\pm 1) \cdot \frac{a_{max}}{a} = (\pm 1) \cdot \frac{60}{45,6} = \pm 1,32\%.$$

Diametrele eşantionului s-au determinat cu erorile relative procentuale limită

$$E_{r\lim D ext} = \frac{100\, E_{\lim D}}{D_{ext}} = \frac{100 \cdot (\pm 10^{-4})}{0,12} = \pm 0,08\%$$

şi

$$E_{r \lim D int} = \frac{100\, E_{\lim D}}{D_{int}} = \frac{100 \cdot (\pm 10^{-4})}{0,1} = \pm 0,1\%.$$

Intensitatea cîmpului magnetic H s-a măsurat cu eroarea relativă procentuală limită :

$$E_{r\lim H} = E_{r\lim I} + \frac{D_{ext}}{D_{ext}+D_{int}} E_{r\lim D ext} + \frac{D_{int}}{D_{ext}+D_{int}} E_{r\lim D int} =$$

$$= (\pm 1{,}32) + \frac{0{,}12}{0{,}12+0{,}1} \cdot (\pm 0{,}08) + \frac{0{,}1}{0{,}12+0{,}1} (\pm 0{,}1) = \pm 1{,}4\% \,.$$

Problema 6.4. Un ac magnetic, care se poate roti într-un plan orizontal, a fost plasat în aer într-un loc unde componenta orizontală a intensității cîmpului magnetic terestru are valoarea $H_1 = 29{,}3$ A/m. Suprapunînd perpendicular pe această componentă a cîmpului magnetic terestru un cîmp magnetic omogen și orizontal avînd intensitatea H_2, acul magnetic s-a rotit cu unghiul $\alpha = 1{,}41$ rad față de poziția inițială (fig. 6.3). Să se afle valoarea intensității cîmpului magnetic H_2.

Soluție. În poziția de echilibru asupra acului magnetic au acționat cuplurile

$$\overline{\mathbf{M}}_1 = [\overline{\mathbf{m}} \times \mu_0 \overline{\mathbf{H}}_1]$$

și

$$\overline{\mathbf{M}}_2 = [\overline{\mathbf{m}} \times \mu_0 \overline{\mathbf{H}}_2],$$

în care $\overline{\mathbf{m}}$ reprezintă momentul magnetic al acului magnetic. Deoarece acul magnetic a fost în echilibru, rezultă

$$\overline{\mathbf{M}}_1 + \overline{\mathbf{M}}_2 = 0$$

sau

$$m\mu_0 H_1 \sin\alpha - m\mu_0 H_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0$$

și apoi

$$H_2 = H_1 \operatorname{tg}\alpha = 29{,}3 \cdot \operatorname{tg} 1{,}41 = 180{,}59 \text{ A/m}.$$

Problema 6.5. Un traductor Hall se utilizează la măsurarea inducției magnetice între limitele $B_{min} = 0$ și $B_{max} = 1$ T. Curentul de comandă al acestui traductor are valoarea constantă $I_c = 0{,}4$ A, iar sensibilitatea la mersul în gol

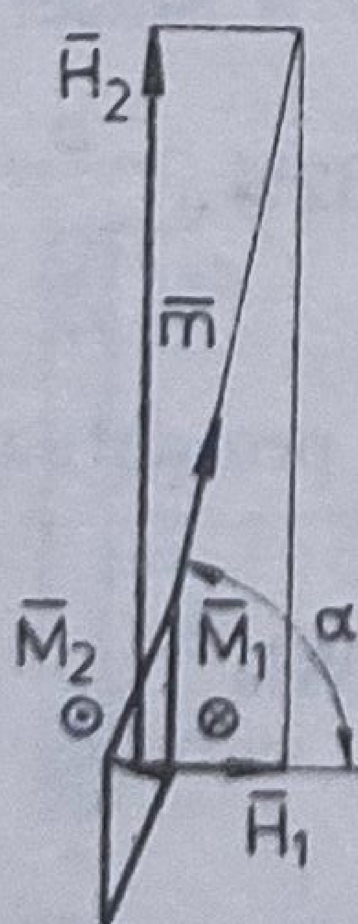


Fig. 6.3.

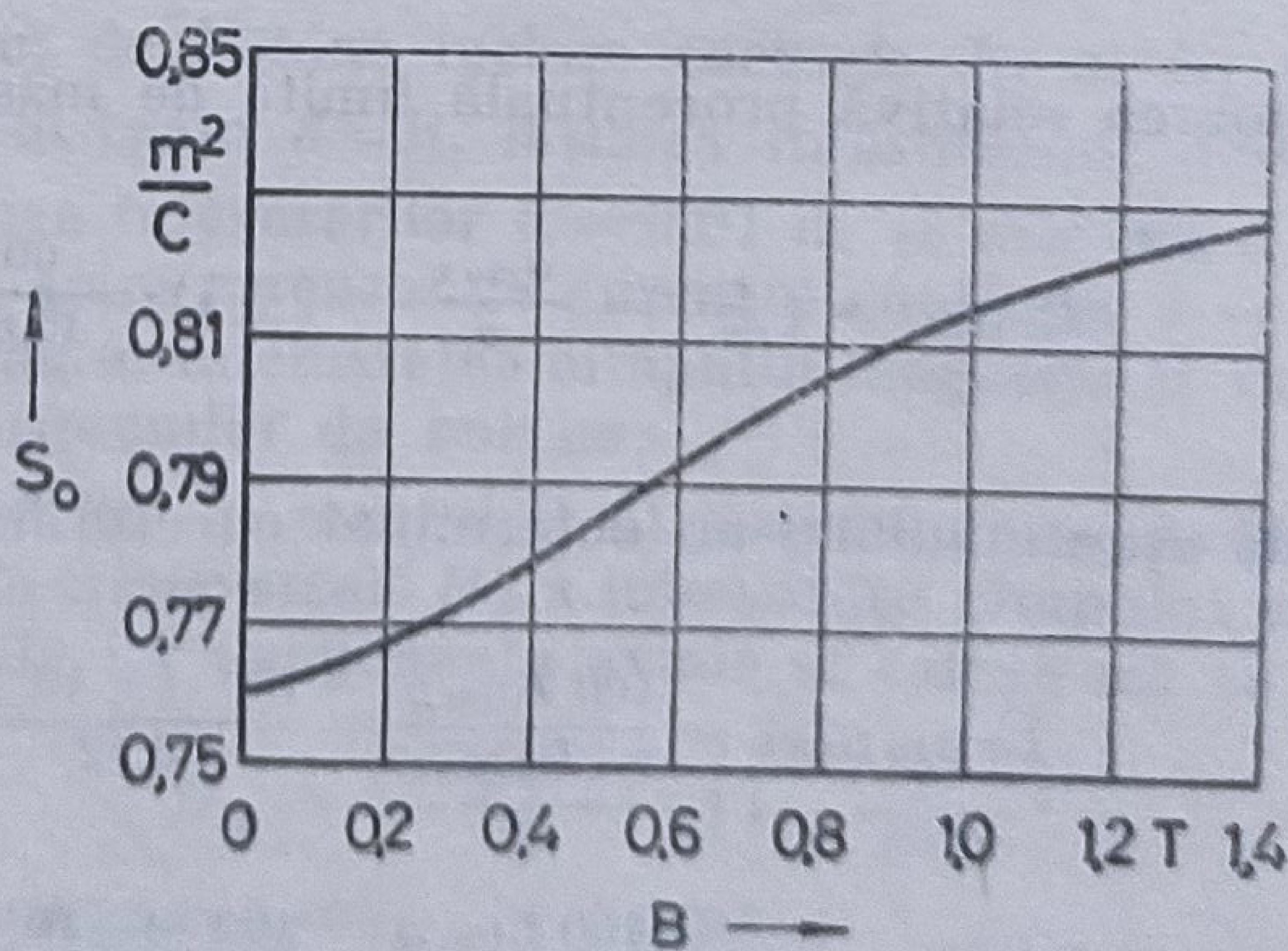


Fig. 6.4.

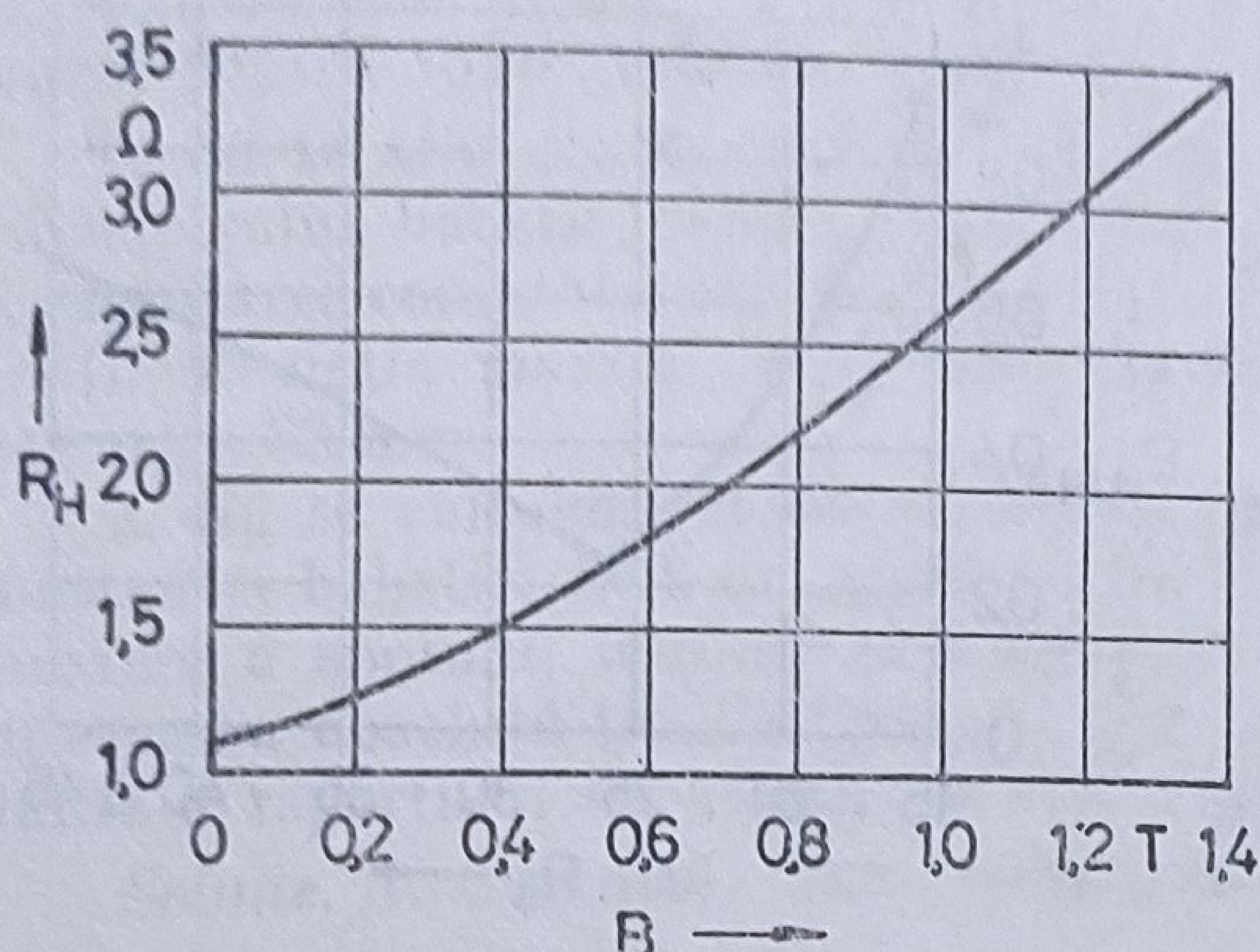


Fig. 6.5.

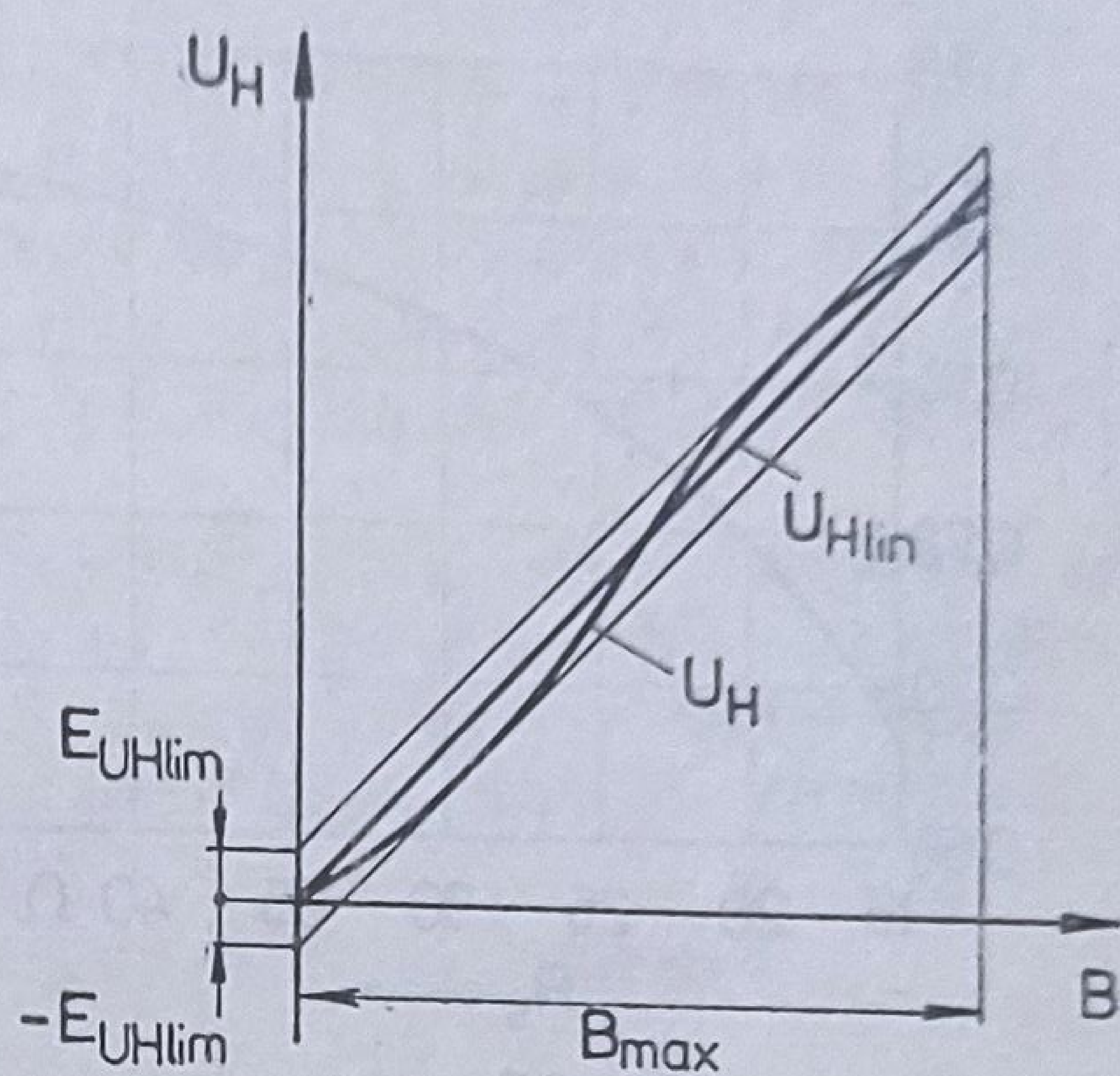


Fig. 6.6.

S_0 şi rezistenţa transversală R_H depind de inducţia magnetică B conform diagramelor din fig. 6.4 şi fig. 6.5.

1. La ce valoare a rezistenţei de sarcină R_s se obţine cea mai mică eroare relativă procentuală de neliniaritate E_{rUH} a tensiunii la bornele traductorului Hall ?

2. Să se determine puterea debitată de traductorul Hall la limita superioară B_{max} a intervalului de măsurare, în funcţie de rezistenţa de sarcină R_s.

Soluţie. 1. Tensiunea la bornele traductorului Hall se determină din expresia

$$U_H = \frac{S_0(B)\,B\,I_c}{1 + \dfrac{R_H(B)}{R_s}} = S(B)\,BI_c.$$

Menţinînd constant curentul de comandă I_c şi asigurînd sensibilitatea la mersul în sarcină S independentă de inducţia magnetică B, la bornele traductorului Hall se obţine tensiunea U_{Hlin} proporţională cu inducţia magnetică B.

Întrucît sensibilitatea la mersul în sarcină S depinde totuşi de inducţia magnetică B, tensiunea U_H nu este proporţională cu inducţia magnetică B. Alegînd în mod corespunzător o valoare S_{lin} constantă pentru sensibilitatea la mersul în sarcină al traductorului Hall, se defineşte eroarea absolută de neliniaritate

$$E_{UH} = S(B)BI_c - S_{lin}BI_c = [S(B) - S_{lin}]\,BI_c,$$

a cărei dependenţă faţă de inducţia magnetică B s-a redat în diagrama din fig. 6.6. Se observă că în intervalul de măsurare al inducţiei magnetice B este satisfăcută condiţia

$$-E_{UH\,lim} \leq E_{UA} \leq E_{UH\,lim}.$$

Eroarea relativă procentuală de neliniaritate se determină din :

$$E_{rUH} = \frac{100 \cdot E_{UH\,lim}}{U_{Hmax}} = \frac{100\,[S(B) - S_{lin}]\,BI_c}{S_{lin}\,B_{max}I_c} = 100\,\frac{S(B) - S_{lin}}{S_{lin}} \cdot \frac{B}{B_{max}}$$

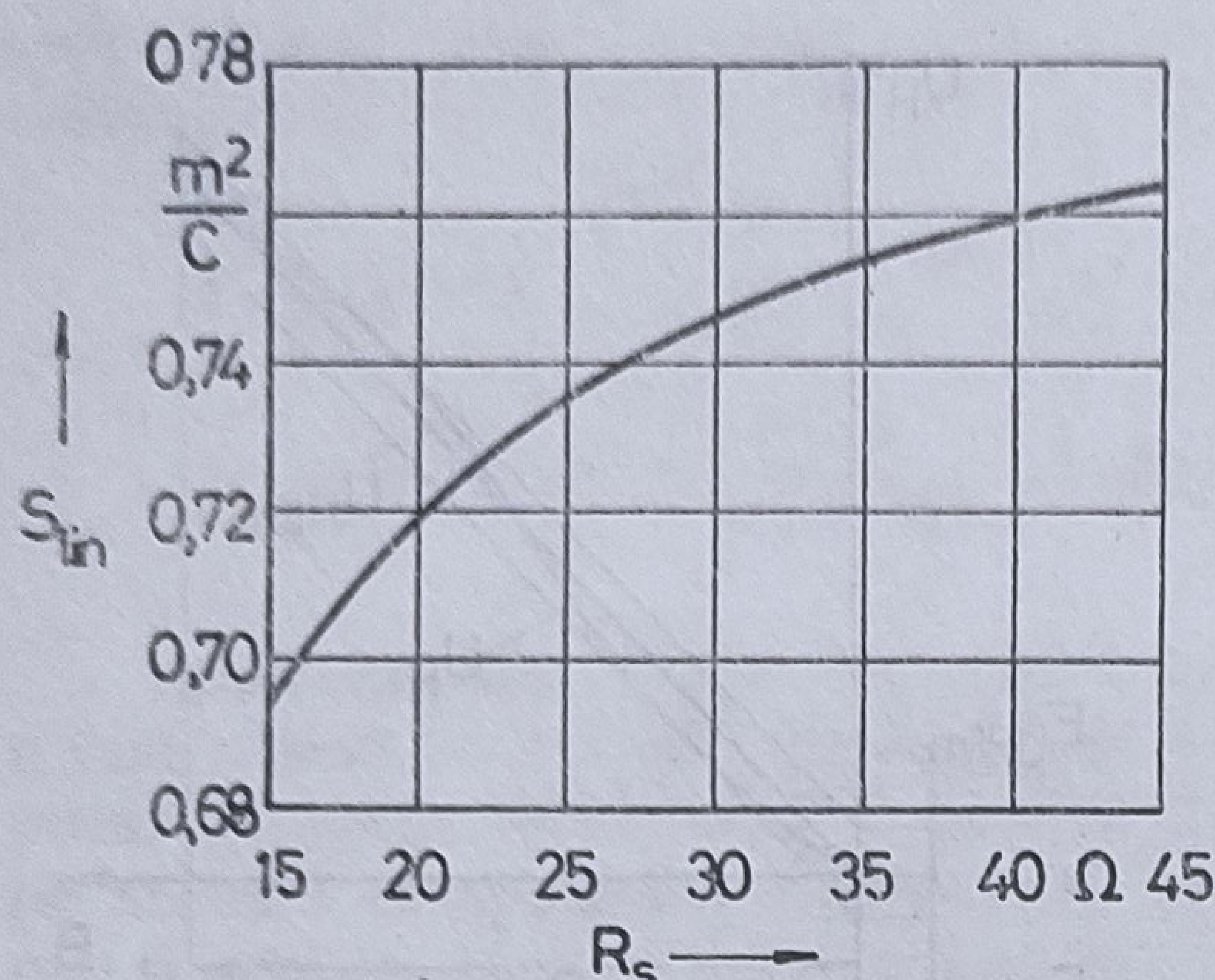


Fig. 6.7.

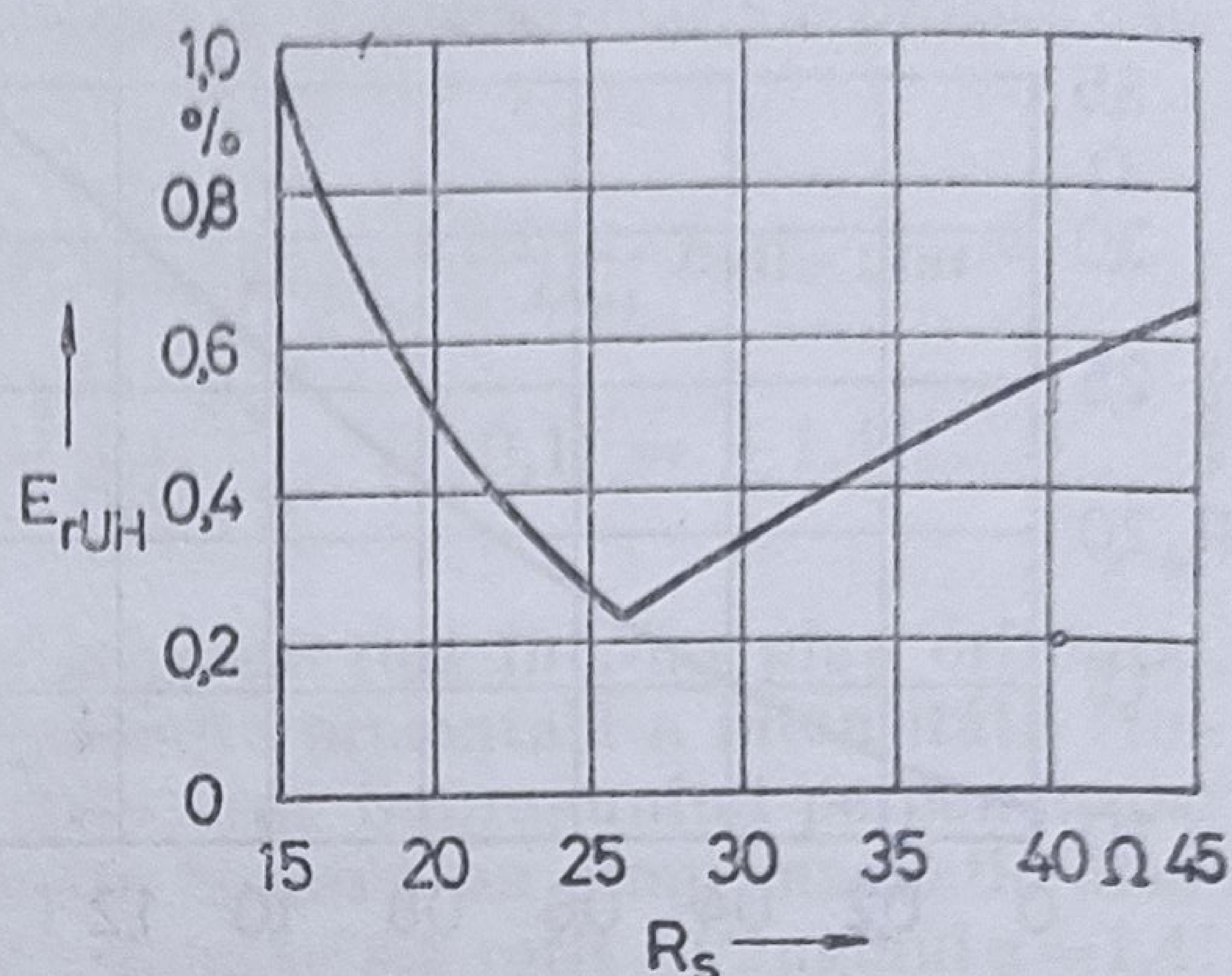


Fig. 6.8.

Efectuînd calculele, se constată că atît sensibilitatea S_{lin} cît și eroarea relativă procentuală de neliniaritate E_{rUH} depind de rezistența de sarcină R_s în modul indicat în diagramele din fig. 6.7 și fig. 6.8. Eroarea relativă procentuală de neliniaritate E_{rUH} prezintă valoarea minimă $E_{rUHmin}=0{,}23\%$ pentru rezistența de sarcină $R_s=25{,}9\ \Omega$.

2. Puterea debitată de generatorul Hall la limita superioară B_{max} a intervalului de măsurare este:

$$P_H=\frac{U^2_{Hmax}}{R_s}=\left[\frac{S_0\,(B_{max})\cdot B_{max}\cdot I_c}{R_H\,(B_{max})+R_s}\right]^2 R_s=\left(\frac{0{,}815\cdot 1\cdot 0{,}4}{2{,}61+R_s}\right)^2 R_s=\frac{0{,}1063 R_s}{(2{,}61+R_s)^2}.$$

Dacă:

$$R_s=R_H\,(B_{max})=2{,}61\ \Omega,$$

atunci generatorul Hall debitează puterea maximă

$$P_{Hmax}=\frac{S_0\,(B_{max})\cdot B_{max}\cdot I_c^2}{4R_H\,(B_{max})}=\frac{(0{,}815\cdot 1\cdot 0{,}4)^2}{4\cdot 2{,}61}=0{,}01018\ \mathrm{W}.$$

Cînd rezistența de sarcină are valoarea $R_s=25{,}9\ \Omega$, care asigură eroarea relativă procentuală de neliniaritate minimă, puterea debitată de generatorul Hall este:

$$P_H=\frac{0{,}1063\cdot 25{,}9}{(2{,}61+25{,}9)^2}=0{,}00339\ \mathrm{W}.$$

Problema 6.6. Constanta balistică față de impulsul de tensiune a unui galvanometru balistic se determină cu schema din fig. 6.9, în care inductivitatea mutuală etalon are valoarea $M=0{,}1$ H și clasa de precizie 0,5, iar ampermetrul are intervalul de măsurare $I_n=300$ mA, scara $\alpha_{max}=150$ diviziuni, indicația $\alpha=124$ diviziuni și clasa de precizie 0,5. Șuntul S

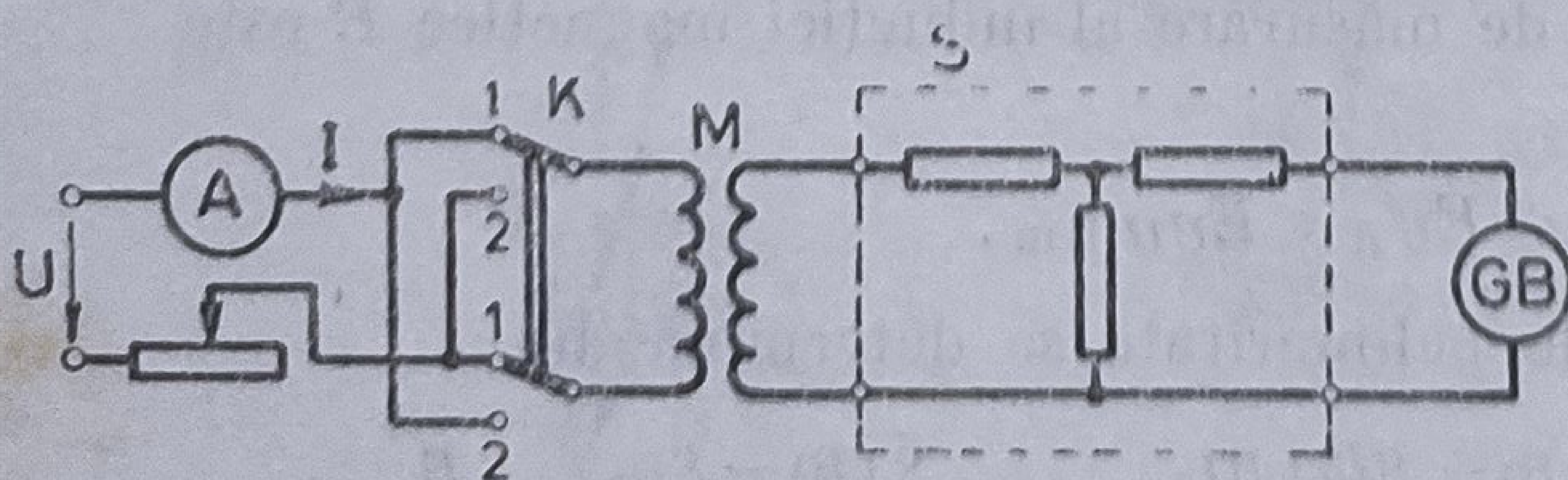


Fig. 6.9.

este astfel realizat încît asigură aceleași condiții de amortizare galvanometrului balistic și aceeași rezistență echivalentă a galvanometrului balistic șuntat pentru toate valorile raportului de șuntare n (vezi problema 2.7.7).

1. Să se afle constanta balistică față de impulsul de tensiune $C_{\Psi 1}$ a galvanometrului balistic pentru poziția 1/1 a comutatorului șuntului, știind că la comutarea comutatorului K din poziția 1 în poziția 2 și la raportul de șuntare $n=10$, deviația maximă a spotului luminos pe scara galvanometrului balistic este $a_m=83$ mm.

2. Să se calculeze eroarea relativă procentuală limită de determinare a constantei balistice față de impulsul de tensiune $C_{\Psi 1}$, presupunînd că deviația maximă a spotului luminos pe scara galvanometrului balistic se poate aprecia cu eroarea absolută limită $E_{lim am}=\pm0,5$ mm, iar eroarea relativă procentuală limită a raportului de șuntare n este neglijabilă.

Soluție. 1. Curentul, care trece prin ampermetru, are valoarea

$$I=\frac{I_n}{a_{max}}\cdot a=\frac{0,3}{150}\cdot 124=0,248\ \text{A}.$$

Constanta balistică față de impulsul de tensiune a galvanometrului balistic pe poziția 1/1 a șuntului este :

$$C_{\Psi 1}=\frac{2IM}{na_m}=\frac{2\cdot 0,248\cdot 0.1}{10\cdot 83}=5,98\cdot 10^{-5}\ \text{Wb/mm}.$$

2. Eroarea relativă procentuală limită de determinare constantei balistice față de impulsul de tensiune $C_{\Psi 1}$ are expresia :

$$E_{r\lim\Psi 1}=E_{r\lim I}+E_{r\lim M}+E_{r\lim n}+E_{r\lim am},$$

în care eroarea relativă procentuală limită de măsurare a curentului este

$$E_{r\lim I}=(\pm0,5)\cdot\frac{I_n}{I}=\pm(\pm0,5)\cdot\frac{0,3}{0,248}=\pm0,605\ \%,$$

iar eroarea relativă procentuală limită a inductivității mutuale etalon M are valoarea $E_{r\lim}=\pm0,5\%$. Eroarea relativă procentuală limită $E_{r\lim n}$ a raportului de șuntare n se neglijează, iar eroarea relativă procentuală limită de apreciere a valorii deviației maxime a spotului luminos pe scara galvanometrului balistic este :

$$E_{r\lim am}=\frac{100\ E_{\lim am}}{a_m}=\frac{100\cdot(\pm0,5)}{83}=\pm0,602\%.$$

Prin urmare

$$E_{r\lim C\Psi 1}=(\pm0,605)+(\pm0,5)+(\pm0,602)=\pm1,707\%.$$

Problema 6.7. Un potențialmetru magnetic are N_e spire cu rezistența $R_c=52,4\ \Omega$ înfășurate pe o bandă flexibilă din material plastic de lungime l și secțiune transversală S. Acest potențialmetru a fost dispus după o curbă închisă C care intersectează planul unei bobine cu $N_e=400$ spire parcurse de curentul continuu $I_e=1,17$ A (fig. 6.10). La înfășurarea potențialmetrului s-a legat un galvanometru balistic avînd constanta balistică față de impulsul de curent

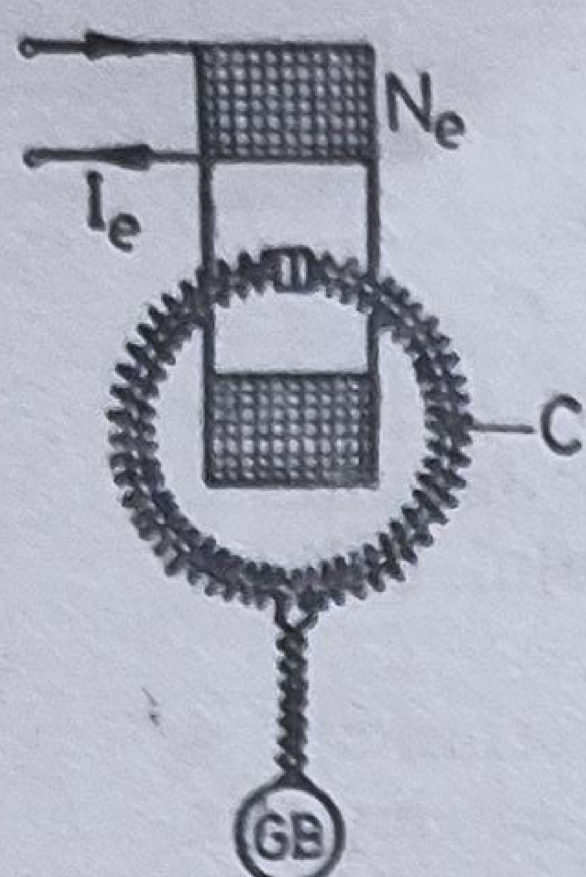


Fig. 6.10.

$C_{Q\,(\beta=0)} = 2{,}7 \cdot 10^{-9}$ Cm/mm, rezistența interioară $R_g = 500\ \Omega$, rezistența exterioară critică $R_{ek} = 860\ \Omega$ și distanța dintre scară și oglindă $d = 1{,}5$ m. Prin inversarea sensului curentului I_e spotul luminos a deviat pe scara galvanometrului balistic cu amplitudinea $a_{m_1} = 71$ mm.

Capetele potențialmetrului magnetic au fost plasate apoi în punctele a și b aflate într-un cîmp magnetic. La anularea acestui cîmp amplitudinea deviației spotului luminos pe scara galvanometrului balistic a fost $a_{m_2} = 18{,}5$ mm.

1. Să se determine constanta magnetică C_m a potențialmetrului și constanta pentru măsurarea tensiunii magnetice C_{Um} a ansamblului format din potențialmetru și galvanometru balistic.

2. Să se calculeze tensiunea magnetică U_{mab} între punctele a și b.

Soluție. 1. La inversarea sensului curentului I_e, galvanometrul balistic a măsurat variația de înlănțuire magnetică

$$\Delta\Psi = \frac{2N_c S\mu_0}{1} \oint_C (\overline{\mathbf{H}}\,\overline{\mathbf{dl}}).$$

Avînd în vedere că

$$\oint_C (\overline{\mathbf{H}}\,\overline{\mathbf{dl}}) = I_e N_e,$$

rezultă

$$C_m = \frac{\Delta\Psi}{2I_eN_e} = \frac{(R_c + R_g)\, C_{Q\,(\beta=0)} \exp\,[F\,(\beta)]\; a_{m_1}}{2I_eN_ed},$$

în care β este gradul de amortizare al galvanometrului balistic, iar

$$F\,(\beta) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \arccos \beta, & (0 \leqslant \beta < 1), \\ 1, & (\beta = 1), \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \operatorname{arcch} \beta, & (1 < \beta < \infty). \end{cases}$$

Dar

$$\beta = \frac{R_g + R_{ek}}{R_g + R_c} = \frac{500 + 860}{500 + 52{,}4} = 2{,}462.$$

Prin urmare

$$F\,(\beta) = \frac{2{,}462}{\sqrt{2{,}462^2 - 1}} \operatorname{argch} 2{,}462 = 1{,}698$$

și

$$C_m = \frac{(500 + 52{,}4) \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-9} \cdot \exp\,(1{,}698) \cdot 71}{2 \cdot 1{,}17 \cdot 400 \cdot 1} = 4{,}12 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H}.$$

Constanta pentru măsurarea tensiunii magnetice a ansamblului format din potențialmetru și galvanometru balistic este :

$$C_{Um}=\frac{2I_eN_ed}{a_{m1}}=\frac{2\cdot 1{,}17\cdot 400\cdot 1{,}5}{71}=19{,}77\ \text{Am/mm}.$$

2.

$$U_{mab}=\frac{C_{Um}\cdot a_{m2}}{d}=\frac{19{,}77\cdot 18{,}5}{1{,}5}=243{,}83\ \text{A}.$$

Problema 6.8. Pentru măsurarea variației înlănțuirii magnetice se folosește un fluxmetru cu intervalul de măsurare $\Phi_n=10$ mWb, scara $a_{max}=10$ diviziuni și rezistența exterioară maximă admisă $R_{emax}=8\ \Omega$. Fluxmetrul se leagă la o bobină de măsurare realizată din conductor de cupru, care are rezistența $R_b=35\ \Omega$ la temperatura de referință $\tau=20$ °C.

1. Să se determine constanta C_Φ a fluxmetrului.

2. Să se dimensioneze șuntul, care se leagă în paralel cu fluxmetrul, alegîndu-se pentru raportul de șuntare n cea mai mică valoare întreagă posibilă.

3. Să se determine constanta $C_{\Phi n}$ a fluxmetrului șuntat.

4. Știind că șuntul este din manganină, să se calculeze eroarea relativă procentuală $E_{r\tau}$, care apare la creșterea temperaturii cu 1 °C față de temperatura de referință.

Soluție. 1. $C_\Phi=\frac{\Phi_n}{a_{max}}=\frac{10}{10}=1\ \text{mWb/div}=10^{-3}\ \text{Wb/div}.$

2. Fluxmetrul măsoară corect numai dacă rezistența R_e exterioară lui este cel mult egală cu rezistența exterioară maximă admisă $R_{emax}=8\ \Omega$. Întrucît bobina de măsurare are rezistența $R_b=35\ \Omega$, în paralel cu fluxmetrul se leagă un șunt (fig. 6.11), avînd rezistența R_s, care satisface condiția

$$\frac{R_s\cdot R_b}{R_s+R_b}\leqslant R_{emax}.$$

Rezistența R_s a șuntului intervine însă și în expresia raportului de șuntare al fluxmetrului :

$$n=\frac{R_s+R_b}{R_s}.$$

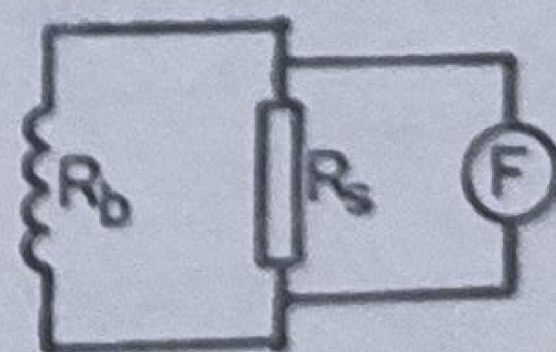


Fig. 6.11.

Din cele două relații rezultă :

$$\frac{R_b}{n}\leqslant R_{emax}$$

sau

$$n\geqslant\frac{R_b}{R_{emax}}=\frac{35}{8}=4{,}375.$$

Cea mai mică valoare întreagă posibilă a raportului de șuntare este $n=5$. Acestei valori a raportului de șuntare îi corespunde șuntul, avînd rezistența :

$$R_s=\frac{R_b}{n-1}=\frac{35}{5-1}=8{,}75\ \Omega.$$

3. $C_{\Phi n} = nC_{\Phi} = 5 \cdot 1 = 5$ mWb/div $= 5 \cdot 10^{-3}$ Wb/div.

4. Coeficientul de variație cu temperatura a rezistivității cuprului este $\beta_{Cu} = 4{,}28 \cdot 10^{-3}$ 1/°C, pe cînd cel al rezistivității manganinei este neglijabil. La creșterea temperaturii cu 1 °C față de temperatura de referință, rezistența R_b a bobinei de măsurare crește cu $\beta_{Cu} R_b$, în timp ce rezistența R_s a șuntului rămîne practic neschimbată. Datorită modificării raportului de șuntare apare eroarea relativă procentuală :

$$E_{r\tau} = \frac{100\, \beta_{Cu} R_b}{R_s + R_b + \beta_{Cu} R_b} = -\frac{100 \cdot 4{,}28 \cdot 10^{-3} \cdot 35}{8{,}75 + 35 + 4{,}28 \cdot 10^{-3} \cdot 35} = -0{,}342\,\%.$$

Problema 6.9. Pe un miez feromagnetic, în care fluxul magnetic alternativ Φ are frecvența $f = 50$ Hz, este înfășurată strîns într-un singur strat o bobină de măsurare cu $N = 100$ spire, rezistența $R_b = 2{,}4\ \Omega$ și inductivitatea de dispersie neglijabilă. La bornele bobinei de măsurare este legat un voltmetru magnetoelectric cu redresor — gradat pentru valori efective ale tensiunii alternative sinusoidale — avînd rezistența interioară $R_v = 1\,500\ \Omega$, care indică tensiunea $U = 11{,}2$ V.

1. Să se calculeze valoarea maximă Φ_m a fluxului magnetic din miez.
2. Să se determine valoarea maximă B_m a inducției magnetice, știind că suprafața secțiunii transversale a miezului este $S = 6{,}2\ \text{cm}^2$ și presupunînd că cîmpul magnetic din miez este omogen.

Soluție. 1. Indiferent de forma de variație în funcție de timp a fluxului magnetic alternativ Φ, valoarea sa maximă se calculează cu relația

$$\Phi_m = \frac{U_{med}(R_b + R_v)}{4 fNR_v},$$

în care U_{med} este valoarea medie pe o semiperioadă a tensiunii de la bornele bobinei de măsurare. Voltmetrul magnetoelectric cu redresor sesizează tocmai această valoare medie U_{med}, dar fiind gradat pentru valori efective ale tensiunii alternative sinusoidale indicația sa U este de 1,11 (factorul de formă al mărimilor sinusoidale) ori mai mare decît valoarea medie U_{med}. Prin urmare :

$$\Phi_m = \frac{U(R_b + R_v)}{1{,}11 \cdot 4fNR_v} = \frac{11{,}2\ (2{,}4 + 1\,500)}{1{,}11 \cdot 4 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 1\,500} = 5{,}05 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}.$$

2. Valoarea maximă a inducției magnetice este :

$$B_m = \frac{\Phi_m}{S} = \frac{5{,}05 \cdot 10^{-4}}{6{,}2 \cdot 10^{-4}} = 0{,}815\ \text{T}.$$

BIBLIOGRAFIE PENTRU CAPITOLUL 6

— Pentru întregul capitol

Pop, E., Chivu, M. *Măsurări electrice și magnetice*, vol. II, cap. 23. Institutul politehnic Timișoara, 1969.
Wiener, U. *Măsurări electrice industriale*, vol. II, cap. 2. Editura tehnică, București, 1969.

— Pentru anumite probleme

6.8. Fränkel, D. *Traductoare galvanomagnetice*. Editura Facla, Timișoara, 1974.

CAPITOLUL 7

MĂSURAREA MĂRIMILOR MAGNETICE DE MATERIAL

Principalele mărimi magnetice de material sînt permeabilitatea magnetică μ și pierderile specifice de energie la remagnetizare p. Ele caracterizează în mare măsură legătura ce există între intensitatea cîmpului magnetic H și inducția magnetică B în materialele supuse magnetizării. Măsurarea mărimilor magnetice de material are loc indirect prin intermediul mărimilor ce determină starea de magnetizare. Această măsurare prezintă importanță în special în cazul materialelor feromagnetice, des utilizate în electrotehnică. Forma eșantioanelor din materiale feromagnetice supuse măsurării precum și caracterul magnetizării din timpul măsurării se realizează astfel încît rezultatele măsurării să fie cît mai corecte și să se obțină cu cheltuieli minime. Din acest punct de vedere eșantioanele cel mai des folosite la măsurarea mărimilor magnetice ale materialelor feromagnetice — cele inelare (toroidale) și cele sub formă de bară — prezintă însușiri contradictorii : primele conduc la rezultate mai corecte, în schimb ultimele permit obținerea cu cheltuieli mai mici a rezultatelor.

Problema 7.1. Pentru determinarea unor caracteristici magnetice ale unui material feromagnetic s-a realizat din acest material un eșantion inelar (toroidal) *EIF* cu diametrul exterior $D_{ext}=25$ cm, diametrul interior $D_{int}=20$ cm și suprafața secțiunii transversale $S_{Fe}=6{,}25$ cm². Pe eșantion s-au plasat apoi uniform înfășurarea de măsurare, avînd $N_2=100$ spire și rezistența $R_2=3{,}6\ \Omega$ și înfășurarea de magnetizare cu $N_1=372$ spire.

Schema folosită s-a redat în fig. 7.1. Bobina etalon utilizată la determinarea constantei balistice față de impulsul de tensiune a galvanometrului balistic a avut inductivitatea mutuală $M_e=0{,}01$ H, același număr de spire în cele două înfășurări și rezistența unei înfășurări $R_e=15\ \Omega$. Cu ajutorul rezistorului R_s s-a realizat o rezistență a circuitului exterior șuntului multiplu special S egală cu rezistența exterioară critică $R_{ek}=500\ \Omega$ a galvanometrului balistic. În această situație, indiferent de valoarea raportului de șuntare al șuntului multiplu special, circuitul exterior galvanometrului balistic a avut rezistența egală cu rezistența exterioară critică R_{ek} a galvanometrului balistic, iar galvanometrul balistic împreună cu șuntul multiplu special au avut rezistența echivalentă egală cu rezistența interioară R_g a galvanometrului balistic.

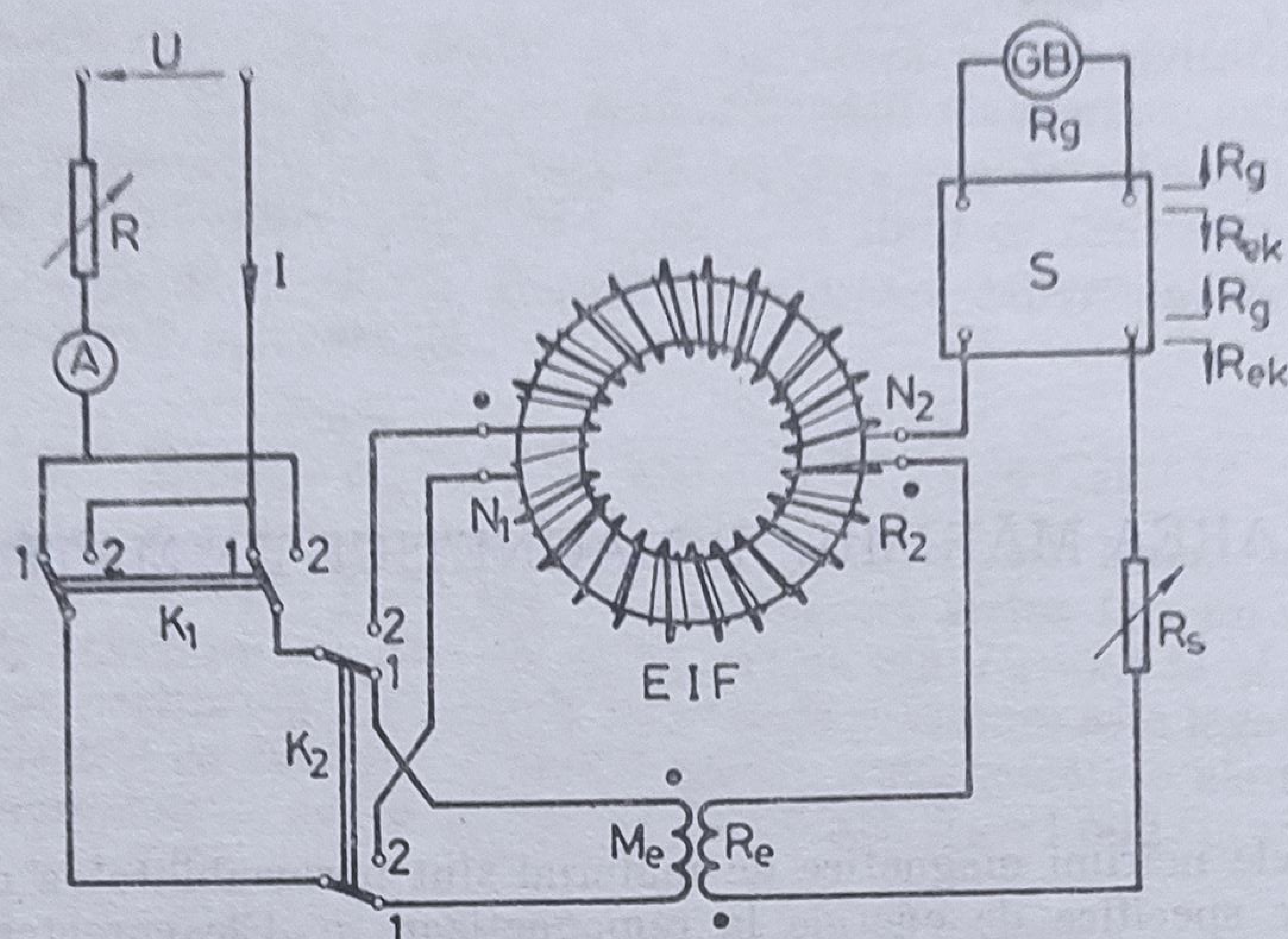


Fig. 7.1.

La determinarea constantei balistice față de impulsul de tensiune a galvanometrului balistic (comutatorul K_2 în poziția 1) curentul măsurat de ampermetru a avut valoarea I_e=0,45 A. Inversînd cu ajutorul comutatorului K_1 sensul curentului prin inductivitatea mutuală etalon, spotul luminos al galvanometrului balistic a deviat pe scară cu amplitudinea a_{me}=30 mm, raportul de șuntare fiind n_e=1.

La determinarea curbei fundamentale de magnetizare (comutatorul K_2 în poziția 2) a materialului feromagnetic al eșantionului inelar demagnetizat în prealabil, curentul din înfășurarea de magnetizare a fost stabilit – pe rînd – la valorile I_{mgi} (i=1, 2, ..., 12) din tabelul 7.1, prin conectarea succesivă în circuit a rezistențelor R_i (i = 1, 2, ..., 12), care au compus rezistența R (fig. 7.2). Pentru fiecare valoare a rezistenței R sensul curentului din înfășurarea de magnetizare a fost inversat de mai multe ori cu ajutorul comutatorului K_1, realizîndu-se astfel prepararea magnetică a materialului feromagnetic.

Tabelul 7.1

i	I_{mgi} [A]	a_{mmi} [mm]	n_{mi}	H_i [A/m]	B_i [T]	μ_{ri}
1	0,17	16,6	1	89,5	0,04	355,8
2	0,37	46,0	1	194,8	0,11	449,6
3	0,57	62,1	2	300,1	0,30	795,9
4	0,68	45,0	5	410,7	0,54	1046,8
5	1,07	62,5	5	503,4	0,75	1059,9
6	1,38	74,2	5	726,6	0,89	975,2
7	1,72	81,1	5	905,6	0,97	852,8
8	2,13	88,5	5	1121,5	1,06	752,5
9	2,78	94,2	5	1463,8	1,13	614,6
10	3,44	96,8	5	1811,3	1,16	509,9
11	4,15	98,0	5	2185,1	1,17	426,3
12	4,91	99,0	5	2585,3	1,18	363,4

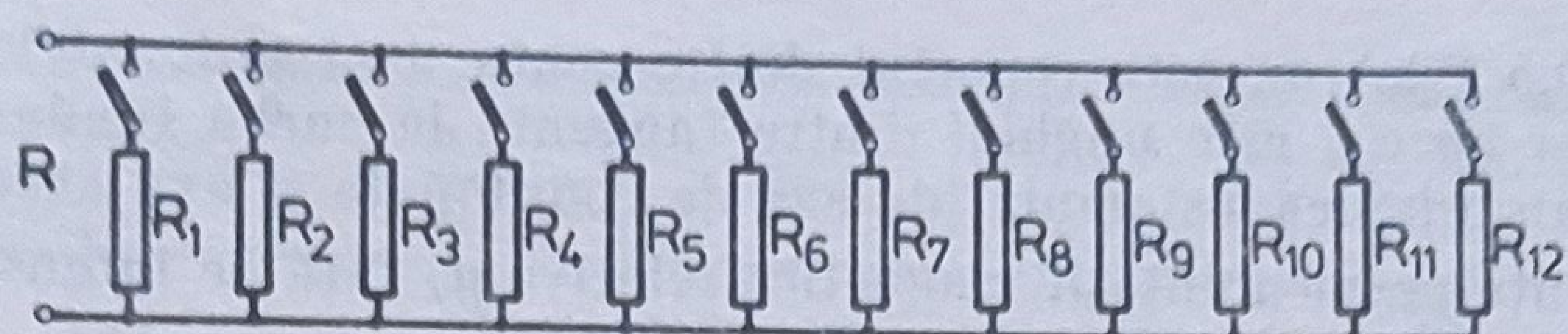


Fig. 7.2.

Galvanometrul balistic a fost introdus de fiecare dată în circuit înainte de ultima inversare a sensului curentului. Amplitudinile a_{mmi} ($i=1, 2, \ldots, 12$) ale deviaţiilor spotului luminos pe scara galvanometrului balistic la ultimele inversări ale sensului curentului şi rapoartele de şuntare n_{mi} corespunzătoare s-au indicat de asemenea în tabelul 7.1.

1. Să se stabilească valoarea rezistenţei R_s.

2. Să se calculeze constanta balistică faţă de impulsul de tensiune $C_{\Psi 1(\beta-1)}$ la amortizarea critică a galvanometrului balistic şuntat cu şuntul multiplu special corespunzător raportului de şuntare $n=1$.

3. Să se reprezinte grafic curba fundamentală de magnetizare $B(H)$ şi dependenţa permeabilităţii magnetice relative μ_r faţă de intensitatea H a cîmpului magnetic pentru materialul feromagnetic cercetat.

Soluţie. 1. $R_s = R_{ek} - R_2 - R_e = 500 - 3,6 - 15 = 481,4\ \Omega$.

2. $C_{\Psi 1(\beta-1)} = \dfrac{2 I_e M_e}{n_e a_{me}} = \dfrac{2 \cdot 0,45 \cdot 0,01}{1 \cdot 30,1} = 2,99 \cdot 10^{-4}$ Wb/mm.

3. Coordonatele unui punct oarecare al curbei fundamentale de magnetizare sînt intensitatea H_i a cîmpului magnetic de-a lungul circumferinţei medii a eşantionului inelar şi inducţia magnetică medie B_i pe suprafaţa transversală a eşantionului inelar; acestea se determină cu relaţiile:

$$H_i = \frac{2\, I_{mgi} N_1}{\pi\,(D_{ext} + D_{int})}, \quad (i=1, 2, \ldots, 12),$$

$$B_i = \frac{n_{mi} C_{\Psi 1(\beta=1)}\, a_{mmi}}{2\, N_2 S_{Fe}}, \quad (i=1, 2, \ldots, 12),$$

valorile lor fiind trecute în tabelul 7.1. Curba fundamentală de magnetizare $B(H)$ a materialului feromagnetic a fost reprezentată grafic în fig. 7.3.

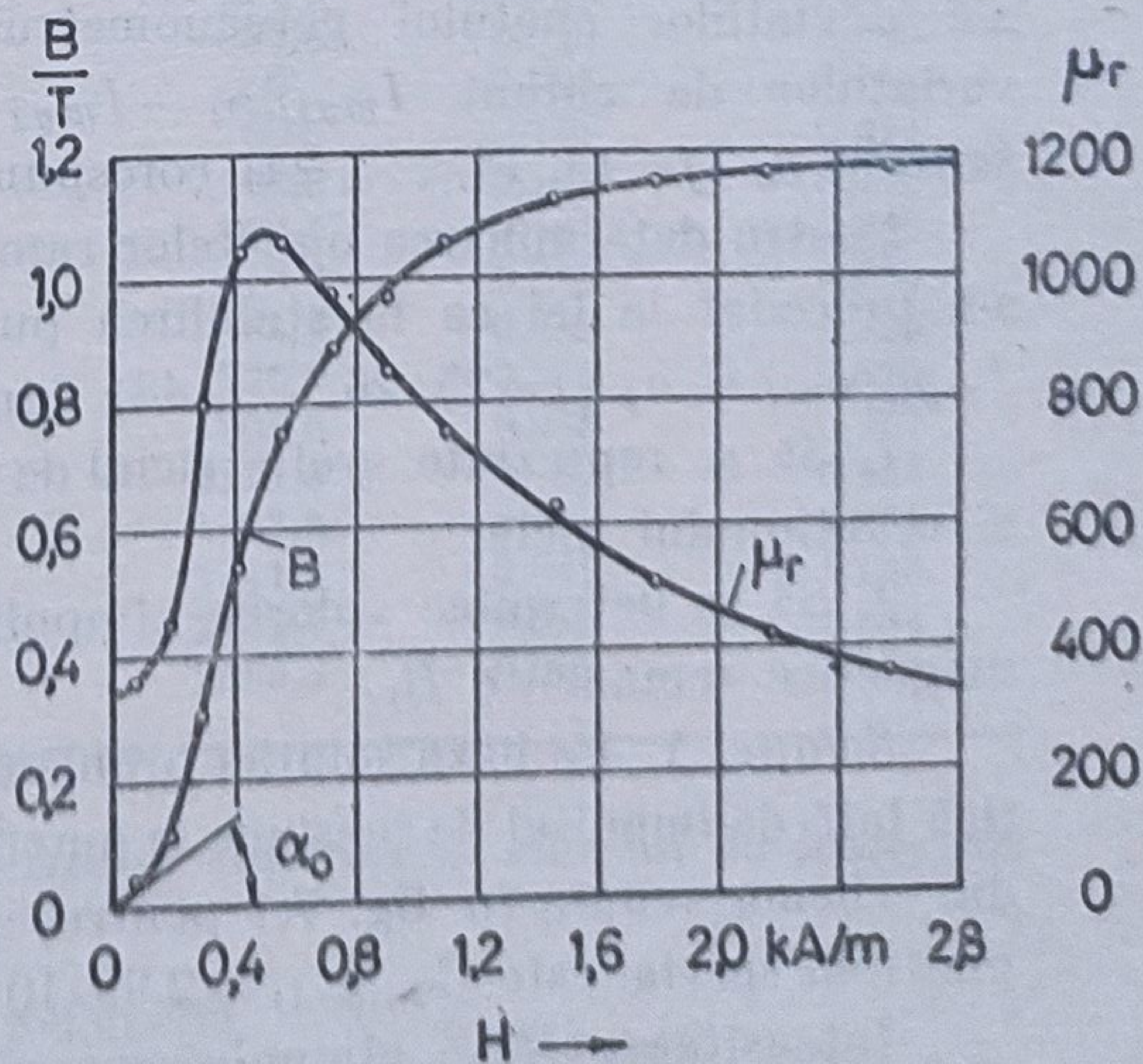


Fig. 7.3.

Permeabilitatea magnetică relativă rezultă din relaţia:

$$\mu_{ri} = \frac{B_i}{\mu_0 H_i}, \quad (i=1, 2, \ldots, 12),$$

unde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. Valorile permeabilităţii magnetice relative s-au trecut de asemenea în tabelul 7.1.

Permeabilitatea magnetică relativă iniţială este:

$$\mu_{rin} = \frac{m\, \mathrm{tg}\, \alpha_{in}}{\mu_0} = 342,7,$$

în care m=0,5 T/kA/m, este raportul dintre scara axei ordonatelor și cea a axei absciselor iar α_{in} este unghiul dintre tangenta la curba fundamentală de magnetizare în originea sistemului de axe de coordonate și axa absciselor.

Dependența permeabilității magnetice relative μ_r față de intensitatea cîmpului magnetic H s-a reprezentat grafic în fig. 7.3.

Problema 7.2. Schema din fig. 7.1. (vezi problema 7.1) s-a folosit și pentru determinarea ciclului de histerezis al materialului feromagnetic din care este realizat eșantionul inelar (toroidal) EIF.

Pentru determinarea vîrfului superior al ciclului de histerezis s-a stabilit în înfășurarea de magnetizare curentul I_{mgo}=4,91 A, prin închiderea întrerupătoarelor rezistențelor R_i (i=1, 2, ..., 12), care formează rezistența R (fig. 7.2). Acest curent a fost inversat de mai multe ori cu comutatorul K_1, apoi, înainte de ultima inversare, s-a întrodus în circuit galvanometrul balistic șuntat cu șuntul multiplu special. Amplitudinea deviației spotului luminos pe scara galvanometrului balistic, corespunzătoare ultimei inversări a curentului I_{mgo}, a fost a_{m0}=99 mm la un raport de șuntare n_0=5.

Pentru determinarea punctelor ramurii descendente a ciclului de histerezis s-au deschis unul cîte unul întrerupătoarele rezistențelor R_i (i=1, 2, ..., 12) în ordinea R_{12}, R_{11}, ..., R_1, stabilind prin înfășurarea de magnetizare curenții I_{mgj} (j=1, 2, ..., 12) din tabelul 7.2. Pe scara galvanometrului balistic s-au citit amplitudinile a_{mj} (j=1, 2, ..., 12) ale deviațiilor sportului luminos corespunzătoare variațiilor de curent $I_{mg(j-1)}-I_{mgj}$ (j=1, 2, ..., 12); amplitudinile a_{mj} (j=1, 2, ..., 12) și rapoartele de șuntare n_j (j=1, 2, ..., 12) corespunzătoare s-au indicat în tabelul 7.2. Cînd curentul prin înfășurarea de magnetizare a obținut valoarea I_{mg12}=0, s-a inversat poziția comutatorului K_1, apoi s-au închis, pe rînd, întrerupătoarele rezistențelor R_i (i=1, 2, ..., 12) în ordinea R_1, R_2, ..., R_{12}, stabilind prin înfășurarea de magnetizare curenții I_{mgj} (j=13, 14, ..., 24) din tabelul 7.2. Amplitudinile a_{mj} (j=13, 14, ..., 24) ale deviațiilor spotului galvanometrului balistic pe scară, corespunzătoare variațiilor de curent $I_{mg(j-1)}-I_{mgj}$ (j=13, 14, ..., 24) și rapoartele de șuntare n_j (j=13, 14, ..., 24) corespunzătoare s-au redat tot în tabelul 7.2.

Pentru determinarea punctelor ramurii asecendente a ciclului de histerezis s-a procedat la fel ca la stabilirea punctelor ramurii descendente, mărimile I_{mgj}, a_{mj} și n_j (j=25, 26, ..., 48), fiind indicate de asemenea în tabelul 7.2.

1. Să se reprezinte grafic ciclul de histerezis al materialului feromagnetic al eșantionului inelar.

2. Să se determine valorile cîmpului magnetic coercitiv H_c și a inducției magnetice remanente B_r.

Soluție. 1. Pe baza soluției problemei 7.1 se precizează că constanta balistică față de impulsul de tensiune la amortizare critică a galvanometrului balistic din schema redată în fig. 7.1 pentru un raport de șuntare n=1 al șuntului multiplu special este $C_{\Psi 1(\beta-1)}=2,99\cdot 10^{-4}$ Wb/mm.

Intensitatea H_0 a cîmpului magnetic de-a lungul circumferinței medii a eșantionului inelar și inducția magnetică medie B_0 pe suprafața transversală

Tabelul 7.2

j	I_{mgj} [A]	a_{mj}]mm]	n_j	H_j [A/m]	ΔB_j [T]	B_j [T]
1	4,15	0,8	1	2185,1	0,004	1,180
2	3,44	1,7	1	1811,3	0,008	1,172
3	2,78	3,3	1	1463,8	0,016	1,156
4	2,13	5,0	1	1121,5	0,024	1,132
5	1,72	5,2	1	905,6	0,025	1,107
6	1,38	5,0	1	726,6	0,024	1,083
7	1,07	6,3	1	563,4	0,030	1,053
8	0,78	5,9	1	410,7	0,028	1,025
9	0,57	10,0	1	300,1	0,048	0,977
10	0,37	9,4	1	194,8	0,045	0,932
11	0,17	14,8	1	89,5	0,071	0,861
12	0	19,9	1	0	0,095	0,766
13	−0,17	29,7	1	−89,5	0,142	0,624
14	−0,37	36,2	1	−194,8	0,173	0,451
15	−0,57	41,6	1	−300,1	0,199	0,252
16	−0,78	45,6	1	−410,7	0,218	0,034
17	−1,07	52,9	1	−563,4	0,253	−0,221
18	−1,38	64,8	1	−726,6	0,310	−0,531
19	−1,72	50,8	1	−905,6	0,239	−0,770
20	−2,13	39,6	1	−1121,5	0,189	−0,959
21	−2,78	29,1	1	−1463,8	0,139	−1,098
22	−3,44	10,0	1	−1811,3	0,048	−1,146
23	−4,15	3,8	1	−2185,1	0,018	−1,164
24	−4,91	2,3	1	−2585,3	0,011	−1,175
25	−4,15	−0,8	1	−2185,1	−0,004	−1,171
26	−3,44	−1,5	1	−1811,3	−0,007	−1,164
27	−2,78	−3,1	1	−1463,8	−0,015	−1,149
28	−2,13	−4,8	1	−1121,5	−0,023	−1,126
29	−1,72	−5,2	1	−905,6	−0,025	−1,101
30	−1,38	−4,8	1	−726,6	−0,023	−1,078
31	−1,07	−6,1	1	−563,4	−0,029	−1,049
32	−0,78	−5,7	1	−410,7	−0,027	−1,022
33	−0,57	−10,0	1	−300,1	−0,048	−0,974
34	−0,37	−9,2	1	−194,8	−0,044	−0,930
35	−0,17	−14,6	1	−89,5	−0,070	−0,860
36	0	−19,9	1	0	−0,095	−0,765
37	0,17	−29,5	1	89,5	−0,141	−0,624
38	0,37	−36,2	1	194,8	−0,173	−0,451
39	0,57	−41,6	1	300,1	−0,199	−0,252
40	0,78	−45,6	1	410,7	−0,218	−0,034
41	1,07	−52,7	1	563,4	−0,252	0,220
42	1,38	−64,6	1	726,6	−0,309	0,529
43	1,72	−49,7	1	905,6	−0,238	0,767
44	2,13	−39,1	1	1121,5	−0,187	0,954
45	2,78	−28,6	1	1463,8	−0,137	1,091
46	3,44	−9,4	1	1811,3	−0,045	1,136
47	4,15	−3,8	1	2185,1	−0,018	1,154
48	4,91	−1,9	1	2585,3	−0,009	1,163

a eşantionului inelar corespunzătoare vîrfului superior al ciclului de histerezis au valorile :

$$H_0 = \frac{2\,I_{mg0}N_1}{\pi\,(D_{ext} + D_{int})} = \frac{2 \cdot 4,91 \cdot 372}{3,14\,(0,25 + 0,20)} = 2585,3 \text{ A/m}$$

și

$$B_0 = \frac{n_0 C_{\Psi 1(\beta=1)} a_{m0}}{2 N_2 S_{Fe}} = \frac{5 \cdot 2{,}99 \cdot 10^{-4} \cdot 99}{2 \cdot 100 \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-4}} = 1{,}184 \text{ T}.$$

Pentru celelalte puncte ale ciclului de histerezis intensitatea cîmpului magnetic de-a lungul circumferinței medii a eșantionului inelar și inducția magnetică medie pe suprafața transversală a eșantionului inelar se calculează cu relațiile :

$$H_j = \frac{2 I_{mgj} N_1}{\pi (D_{ext} + D_{int})} \quad (j=1, 2, \ldots, 48),$$

$$B_j = B_{(j-1)} - \Delta B_j \qquad (j=1, 2, \ldots, 48),$$

unde

$$\Delta B_j = \frac{n_j C_{\Psi 1(\beta=1)} a_{mj}}{N_2 S_{Fe}} \quad (j=1, 2, \ldots, 48)$$

reprezintă variațiile inducției magnetice corespunzătoare variațiilor de curent $I_{mg(j-1)} - I_{mgj}$. Valorile calculate s-au indicat în tabelul 7.2. Ciclul de histerezis al materialului feromagnetic al eșantionului inelar s-a reprezentat grafic în fig. 7.4. Se observă că ciclul de histerezis nu este perfect simetric și că nu se închide, datorită propagării și cumulării erorilor de măsurare.

2. Din fig. 7.4 se obține valoarea cîmpului magnetic coercitiv $H_c = 44{,}2$ A/m și a inducției magnetice remanente $B_r = 0{,}765$ T.

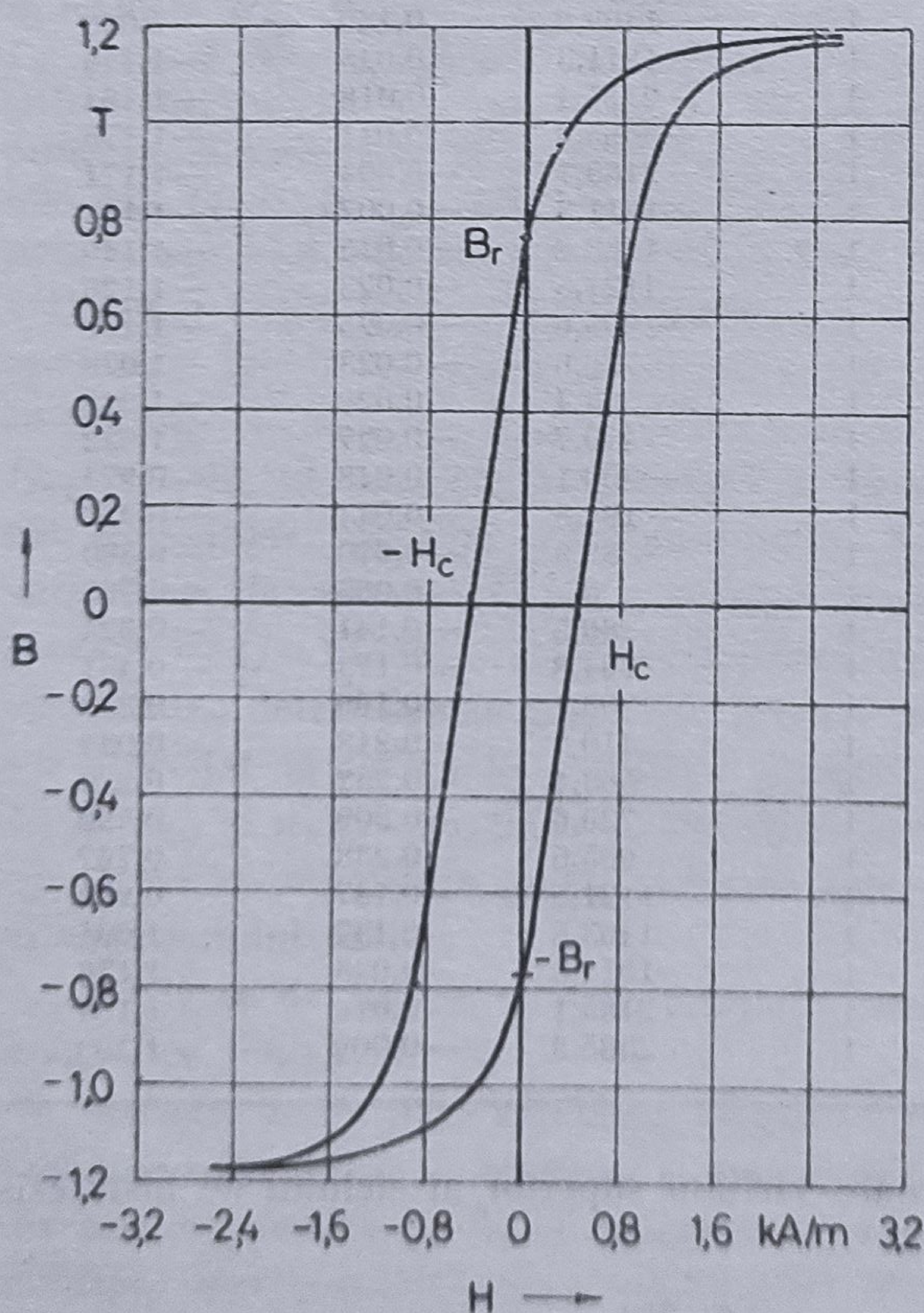


Fig. 7.4.

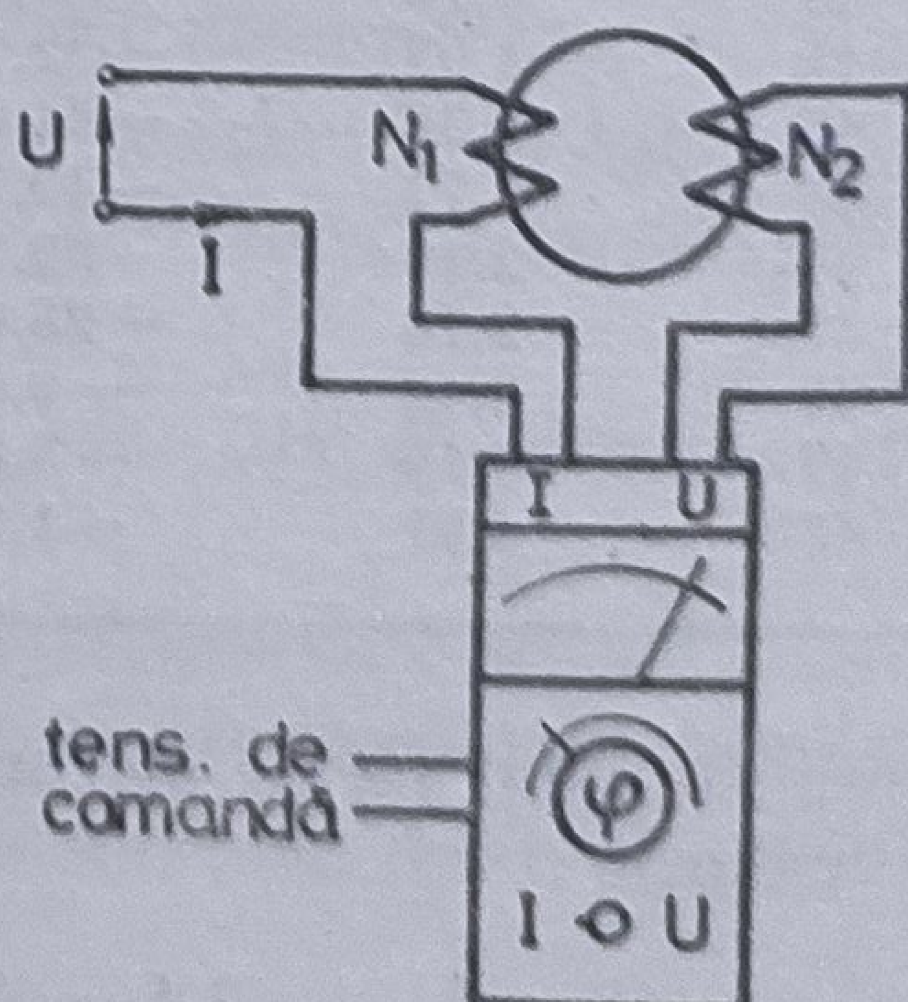


Fig. 7.5.

Problema 7.3. Prin înfășurarea de $n = 24$ ori a unei benzi din tablă feromagnetică laminată la rece cu lungimea $L=6{,}8$ m, lățimea $l = 2$ cm și grosimea $d=0{,}35$ mm, s-a obținut un eșantion inelar (toroidal), avînd diametrul exterior $D_{ext} = 10$ cm și diametrul interior $D_{int} = 8$ cm. Pe acest eșantion s-au bobinat $N_2 = 485$ spire ale înfășurării de măsurare a inducției magnetice, peste care s-au dispus apoi uniform de-a lungul circumferinței eșantionului — cele $N_1 = 240$ spire ale înfășurării de magnetizare. Cu ajutorul unui vectormetru gradat în valori efective ale tensiunii și curentului alternativ sinusoidal, s-au determinat unele caracteristici magnetice ale materialului eșantionului, la o magnetizare alternativă cu frecvența $f=50$ Hz (fig. 7.5).

1. Să se precizeze condițiile, în care inducția magnetică din eșantion are valoarea maximă $B_{max}=1$ T.

2. Știind că inducția magnetică din eșantion are forma de variație sinusoidală în funcție de timp cu valoarea maximă $B_{max}=1$ T, curentul de magnetizare măsurat de vectormetru are valoarea efectivă $I=0{,}121$ A și defazajul $\varphi=1{,}265$ rad față de tensiunea de magnetizare, iar densitatea materialului feromagnetic este $\rho_{Fe} =7{,}6\cdot 10^3$ kg/m³, să se determine pierderile specifice de energie în materialul eșantionului.

Soluție. 1. Dacă inducția magnetică din eșantion are valoarea maximă $B_{max}=1$ T, atunci valoarea medie pe o semiperioadă a t. e. m. induse în înfășurarea de măsurare are valoarea :

$$U_{med}=4fN_2ndlB_{max}=4\cdot 50\cdot 485\cdot 24\cdot 0{,}35\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 1=16{,}3 \text{ V},$$

indiferent de forma de variație în funcție de timp a inducției magnetice.

Vectormetrul sesizează de fapt valoarea medie pe o semiperioadă a tensiunii măsurate, dar scara sa este gradată pentru valori efective ale tensiunii alternative sinusoidale. Prin urmare — infiferent de forma de variație în funcție de timp a inducției magnetice, respectiv a t.e.m. induse în înfășurarea de magnetizare — indicația vectormetrului este

$$U=k_f U_{med}=1{,}11\cdot 16{,}3=18{,}1 \text{ V},$$

$k_f=1{,}11$ fiind factorul de formă al mărimilor sinusoidale.

2. Pierderile specifice de energie în materialul eșantionului au valoarea

$$p=\frac{N_1 UI\cos\varphi}{N_2\rho_{Fe}\, Lld}=\frac{240\cdot 18{,}1\cdot 0{,}121\cdot \cos 1{,}265}{485\cdot 7{,}6\cdot 10^3\cdot 6{,}8\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}35\cdot 10^{-3}}=0{,}9 \text{ W/kg}.$$

Rezultatul obținut nu este riguros corect, deoarece curentul de magnetizare este nesinusoidal. Măsurînd cu ajutorul vectormetrului valoarea efectivă I_1 și defazajul φ_1 ale armonicii fundamentale a curentului de magnetizare, se obțin rezultate mai bune.

Problema 7.4. Cu ajutorul unei punți de c.a. (fig. 7.6) alimentată la tensiunea avînd valoarea efectivă U_1 și frecvența $f=50$ Hz se determină caracteristicile magnetice ale unui material feromagnetic. Eșantionul inelar (toroidal) confecționat din acest material este alcătuit din $n=20$ tole, avînd grosimea $d=0{,}35$ mm, diametrul exterior $D_{ext}=10$ cm și diametrul interior $D_{int}=8$ cm.

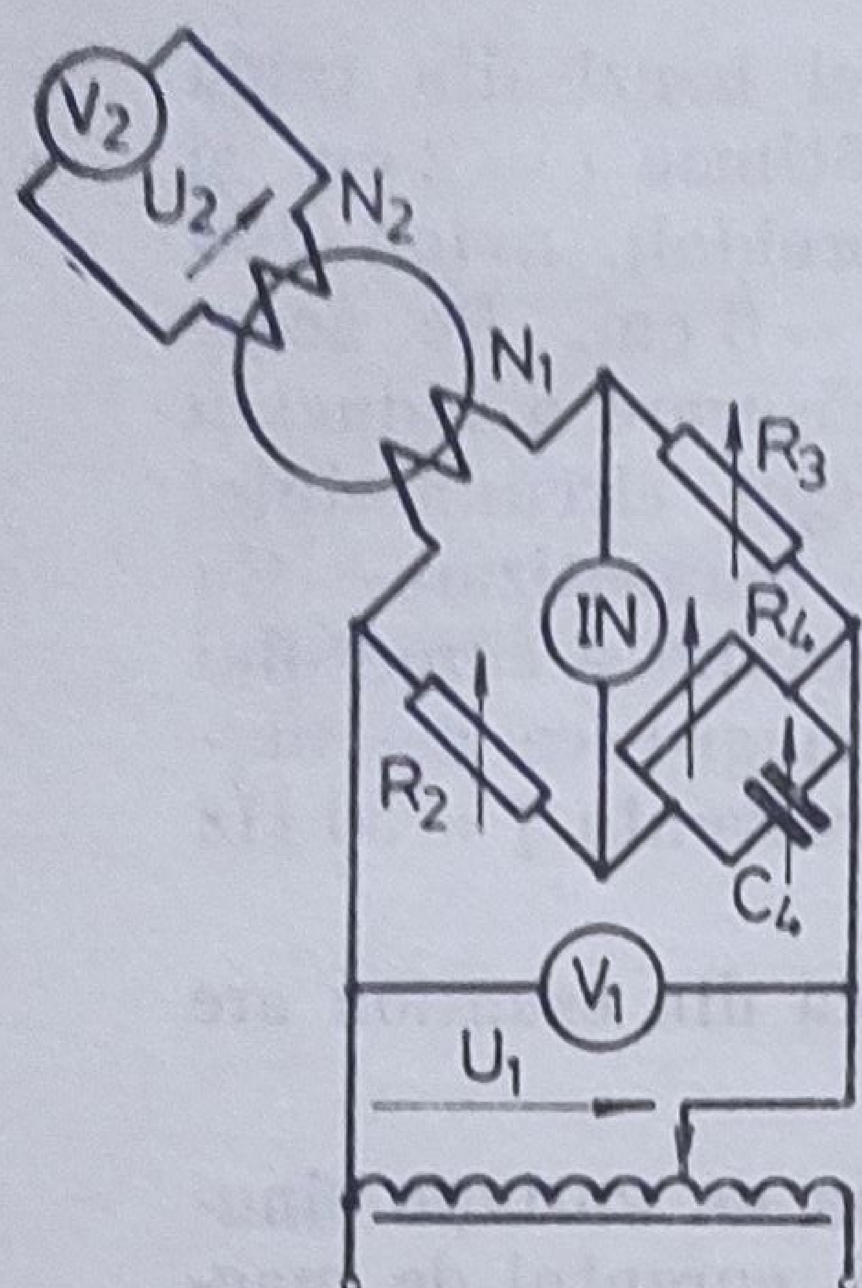


Fig. 7.6.

Pe eşantion s-au bobinat $N_2=1\,050$ spire ale înfăşurării de măsurare a inducţiei magnetice, peste care s-au dispus cele $N_1=315$ spire – uniform repartizate de-a lungul eşantionului – ale înfăşurării de magnetizare. Tensiunea U_1 de alimentare a punţii s-a măsurat cu un voltmetru feromagnetic, iar tensiunea U_2 indusă în înfăşurarea de măsurare cu un voltmetru electronic cu redresarea ambelor alternanţe, avînd scara gradată pentru valori efective ale tensiunii alternative sinusoidale. Indicatorul de nul a avut sensibilitatea foarte mare la frecvenţa tensiunii de alimentare a punţii şi sensibilitate mică la alte frecvenţe. În decursul măsurării puntea s-a aflat în echilibru pentru valorile tensiunilor U_1 şi U_2, rezistenţelor R_2, R_3 şi R_4 şi capacităţii C_4 cuprinse în tabelul 7.3.

1. Să se reprezinte grafic dependenţa dintre permeabilitatea magnetică relativă μ_r a materialului eşantionului şi valoarea maximă a inducţiei magnetice B_{max} în eşantion.

2. Să se reprezinte grafic dependenţa dintre pierderile specifice de energie p în eşantion şi valoarea maximă B_{max} a inducţiei magnetice în eşantion, ştiind că rezistenţa înfăşurării de magnetizare este $R_1=1{,}1\ \Omega$, rezistenţa de intrare a voltmetrului electronic este foarte mare, iar densitatea materialului eşantionului este $\rho_{Fe}=7{,}6$ kg/dm^3.

Tabelul 7.3

U_1 [V]	U_2 [V]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	C_4 [μF]
0,778	0,162	350	350	15 800	0,580
1,365	0,359	350	350	10 330	0,749
1,800	0,560	350	350	6 920	0,890
2,190	0,765	350	350	5 300	1,020
2,570	0,994	350	350	4 350	1,145
2,900	1,200	350	350	3 730	1,235
3,240	1,405	350	350	3 430	1,316
3,530	1,615	350	350	3 180	1,401

Soluţie. 1. Valoarea maximă a inducţiei magnetice în eşantion se determină cu relaţia:

$$B_{max}=\frac{2U_{2med}}{4\ fN_2 nd\,(D_{ext}-D_{int})},$$

în care U_{2med} este valoarea medie pe o semiperioadă a tensiunii induse în înfăşurarea de măsurare. Deviaţia voltmetrului electronic este proporţională cu această valoare medie, gradarea scării fiind însă făcută pentru valori efective ale tensiunii alternative sinusoidale. Ca urmare

$$U_{2med}=\frac{U_2}{1{,}11}$$

indiferent de forma de variație în funcție de timp a tensiunii măsurate. Prin înlocuire se obține :

$$B_{max} = \frac{2U_2}{4 \cdot 1{,}11\, fN_2 nd\,(D_{ext} - D_{int})} =$$

$$= \frac{2\,U_2}{4 \cdot 1{,}11 \cdot 50 \cdot 1\,050 \cdot 20 \cdot 0{,}35 \cdot 10^{-3} \cdot (0{,}1 - 0{,}08)} = 6{,}13 \cdot 10^{-2} U_2.$$

Cînd puntea din fig. 7.6 este în echilibru, sînt satisfăcute următoarele condiții :

$$L_x = R_2 R_3 C_4$$

și

$$R_x = \frac{R_e R_3}{R_4},$$

în care L_x și R_x reprezintă inductivitatea și rezistența echivalentă a înfășurării de magnetizare, avînd ca miez eșantionul din material feromagnetic.

Permeabilitatea magnetică relativă se determină cu relația :

$$\mu_r = \frac{\pi\,(D_{ext} + D_{int})\,L_x}{\mu_0 N_1^2 nd\,(D_{ext} - D_{int}) \cos \delta_x},$$

unde δ_x este unghiul de pierderi

$$\delta_x = \operatorname{arctg}\left(\frac{R_x}{2\,\pi f L_x}\right).$$

Prin urmare :

$$\mu_r = \frac{\pi\,(D_{ext} + D_{int})\,L_x}{\mu_0 N_1^2 nd\,(D_{ext} - D_{int})} \sqrt{1 + \left(\frac{R_x}{2\,\pi f L_x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\pi\,(D_{ext} + D_{int})\,R_2 R_3 \sqrt{1 + (2\pi f R_4 C_4)^2}}{2\,\pi f \mu_0 N_1^2 nd\,(D_{ext} - D_{int})\,R_4} =$$

$$= \frac{(0{,}1 + 0{,}08) \cdot 350 \cdot 350 \sqrt{1 + (2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot R_4 C_4)^2}}{2 \cdot 50 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 315^2 \cdot 20 \cdot 0{,}35 \cdot 10^{-3} \cdot (0{,}1 - 0{,}08) \cdot R_4} =$$

$$= \frac{1{,}264 \cdot 10^7 \sqrt{1 + 98\,596\; C_4^2 R_4^2}}{R_4}.$$

Înlocuind datele din tabelul 2.6 în relațiile de mai sus, s-a obținut dependența dintre permeabilitatea magnetică relativă μ_r și valoarea maximă a inducției magnetice B_{max} redată grafic în fig. 7.7.

Datorită sensibilității ridicate a indicatorului de nul la frecvența $f = 50$ Hz, echilibrul punții din fig. 7.6 s-a obținut pentru armonica fundamentală a curen-

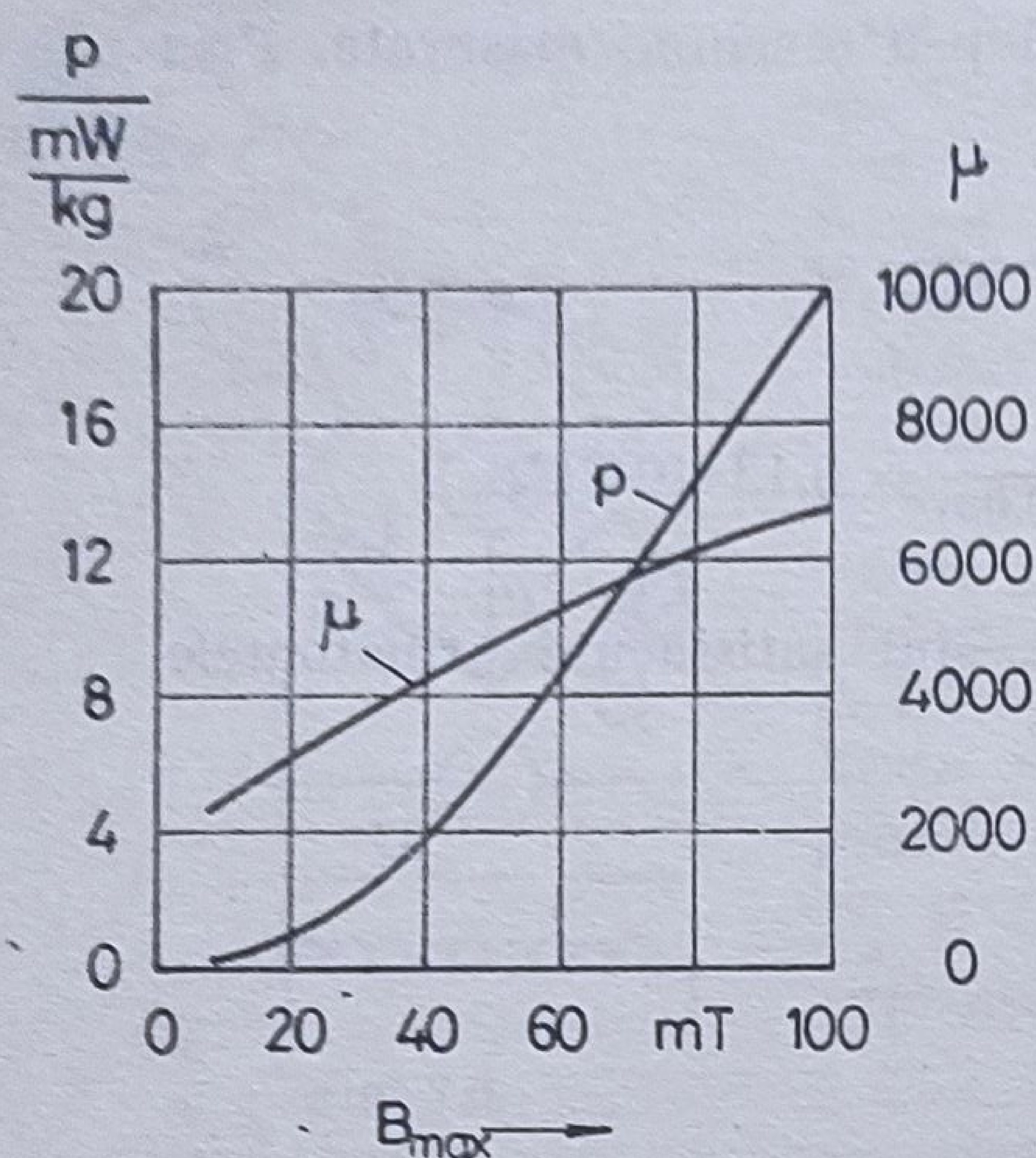


Fig. 7.7.

tului de magnetizare. Se precizează că permeabilitatea magnetică relativă determinată în aceste condiţii este definită prin relaţia :

$$\mu_r = \frac{B_{max}}{\mu_0 H_{1\,max}},$$

în care H_{1max} este amplitudinea armonicii fundamentale a intensităţii cîmpului magnetic.

2. Pierderile specifice de energie în eşantion se determină cu relaţia :

$$p = \frac{4U_1^2(R_x - R_1)}{\rho_{Fe}\pi(D_{ext}^2 - D_{int}^2)\, nd[(R_x+R_3)^2 + (2\pi f L_x)^2]} =$$

$$= \frac{4U_1^2\left(\frac{R_2R_3}{R_4} - R_1\right)}{\rho_{Fe}\pi(D_{ext}^2 - D_{int}^2)\, nd\left[\left(\frac{R_2R_3}{R_4} + R_3\right)^2 + (2\pi f R_2R_3C_4)^2\right]} =$$

$$= \frac{4U_1^2 R_4(R_2R_3 - R_1R_4)}{\rho_{Fe}\pi\,(D_{ext}^2 - D_{int})^2\, nd\,[(R_2+R_4)^2R_3^2 + (2\pi f R_2R_3R_4C_4)^2} =$$

$$= \frac{4U_1^2 R_4(350\cdot350 - 1{,}1\,R_4)}{7{,}6\cdot10^3\cdot3{,}14\,(0{,}1^2 - 0{,}08)^2\cdot20\cdot0{,}35\cdot10^{-3}}\cdot\frac{1}{(350+R_4)^2\cdot350^2 + (2\cdot3{,}14\cdot50\cdot350\cdot R_4C_4)^2} =$$

$$= \frac{5{,}43\cdot10^{-5}U_1^2R_4(122500 - 1{,}1\,R_4)}{(350+R_4)^2 + 98\,596\,R_4^2C_4^2}.$$

La stabilirea acestei relaţii s-au neglijat armonicile superioare ale curentului de magnetizare al eşantionului.

Înlocuind datele din tabelul 7.3 s-a obţinut dependenţa dintre pierderile specifice de energie p şi valoarea maximă B_{max} a inducţiei magnetice redată grafic în fig. 7.7.

Problema 7.5. Un eşantion inelar (toroidal) feromagnetic este alcătuit din $n=20$ tole, avînd grosimea $d=0{,}35$ mm, diametrul exterior $D_{ext}=6$ cm şi diametrul interior $D_{int}=5$ cm. Pe acest eşantion au fost bobinate nemijlocit $N_2=231$ spire ale înfăşurării de măsurare a inducţiei magnetice, peste care s-au dispus apoi — uniform de-a lungul circumferinţei eşantionului — cele $N_1=95$ spire ale înfăşurării de magnetizare. Eşantionul a fost supus unei mag-

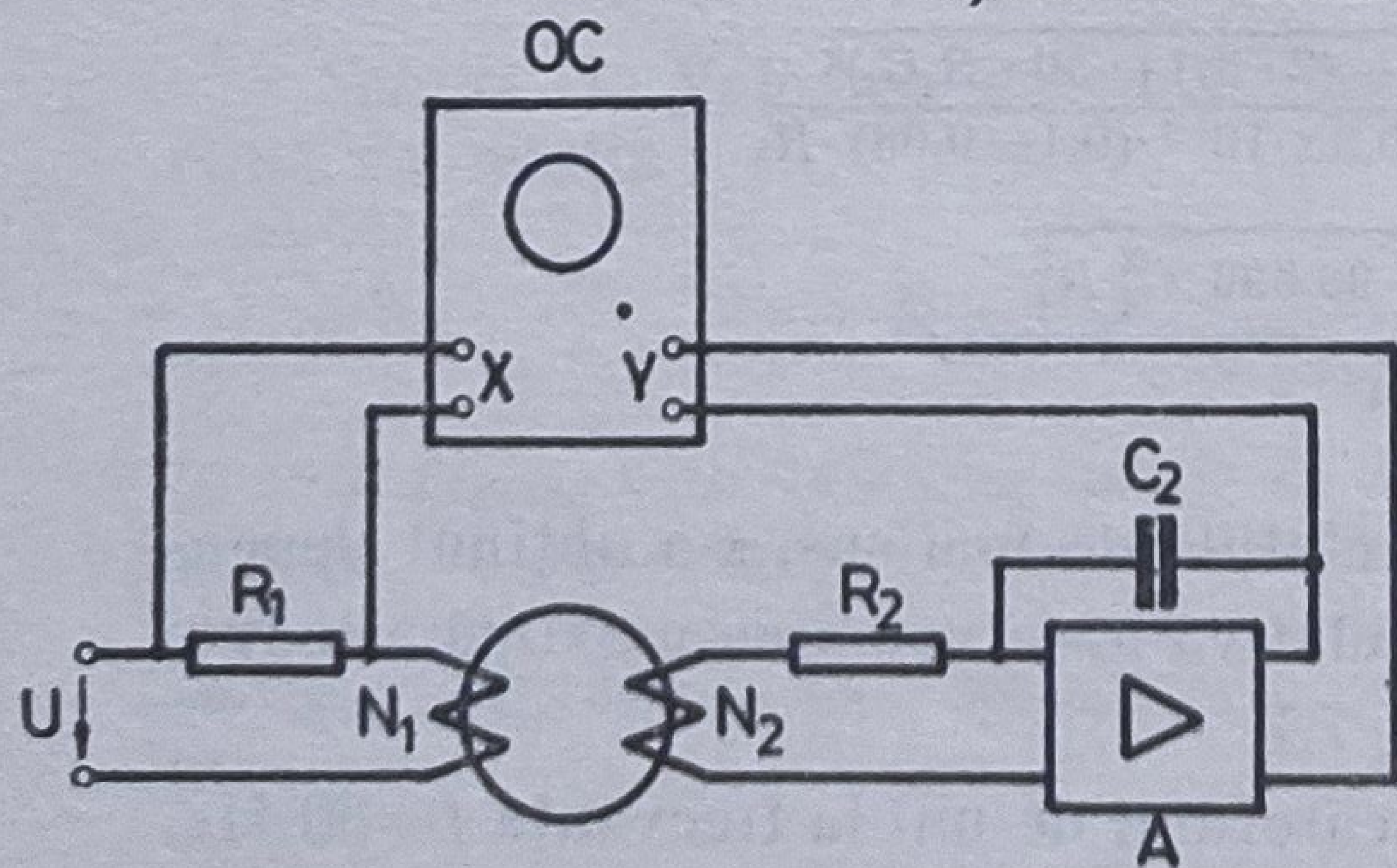


Fig. 7.8.

netizări alternative cu frecvența $f=1\,000$ Hz, proprietățile sale magnetice determinîndu-se cu ajutorul schemei din fig. 7.8 în care s-au folosit rezistoare cu rezistențele $R_1=0{,}1\ \Omega$ și $R_2=40\ \mathrm{k\Omega}$, condensatorul cu capacitatea $C_2=1\ \mu\mathrm{F}$, amplificatorul A cu factor de amplificare foarte mare, precum și osciloscopul catodic OC, avînd constanta corespunzătoare deviației pe orizontală a spotului $C_x=50$ mV/cm și constanta corespunzătoare deviației pe verticală a spotului $C_y=100$ mV/cm. Pe ecranul osciloscopului catodic OC au apărut ciclurile de histerezis redate la o scară mai mare în fig. 7.9.

1. Să se reprezinte grafic dependența dintre valoarea maximă B_{max} a inducției magnetice și valoarea maximă H_{max} a intensității cîmpului magnetic în eșantion.

2. Să se reprezinte grafic dependența dintre permeabilitatea magnetică relativă $\mu_r=B_{max}/\mu_0 H_{max}$ și valoarea maximă H_{max} a intensității cîmpului magnetic.

3. Să se reprezinte grafic dependența dintre pierderile specifice de energie p în eșantion și valoarea maximă B_{max} a inducției magnetice în eșantion, știind că densitatea materialului eșantionului este $\rho_{Fe}=7{,}6$ kg/dm³.

Soluție. 1. Valoarea maximă a intensității cîmpului magnetic în eșantion se determină cu relația:

$$H_{max}=C_H a_X,$$

în care a_X este deviația maximă pe orizontală a spotului osciloscopului catodic, corespunzătoare unui ciclu de histerezis din fig. 7.9, iar

$$C_H=\frac{2C_X N_1}{\pi\,(D_{ext}+D_{int})\,R_1}=\frac{2\cdot 0{,}05\cdot 95}{3{,}14\cdot(0{,}06+0{,}05)\cdot 1}=275\,\frac{\mathrm{A/m}}{\mathrm{cm}}.$$

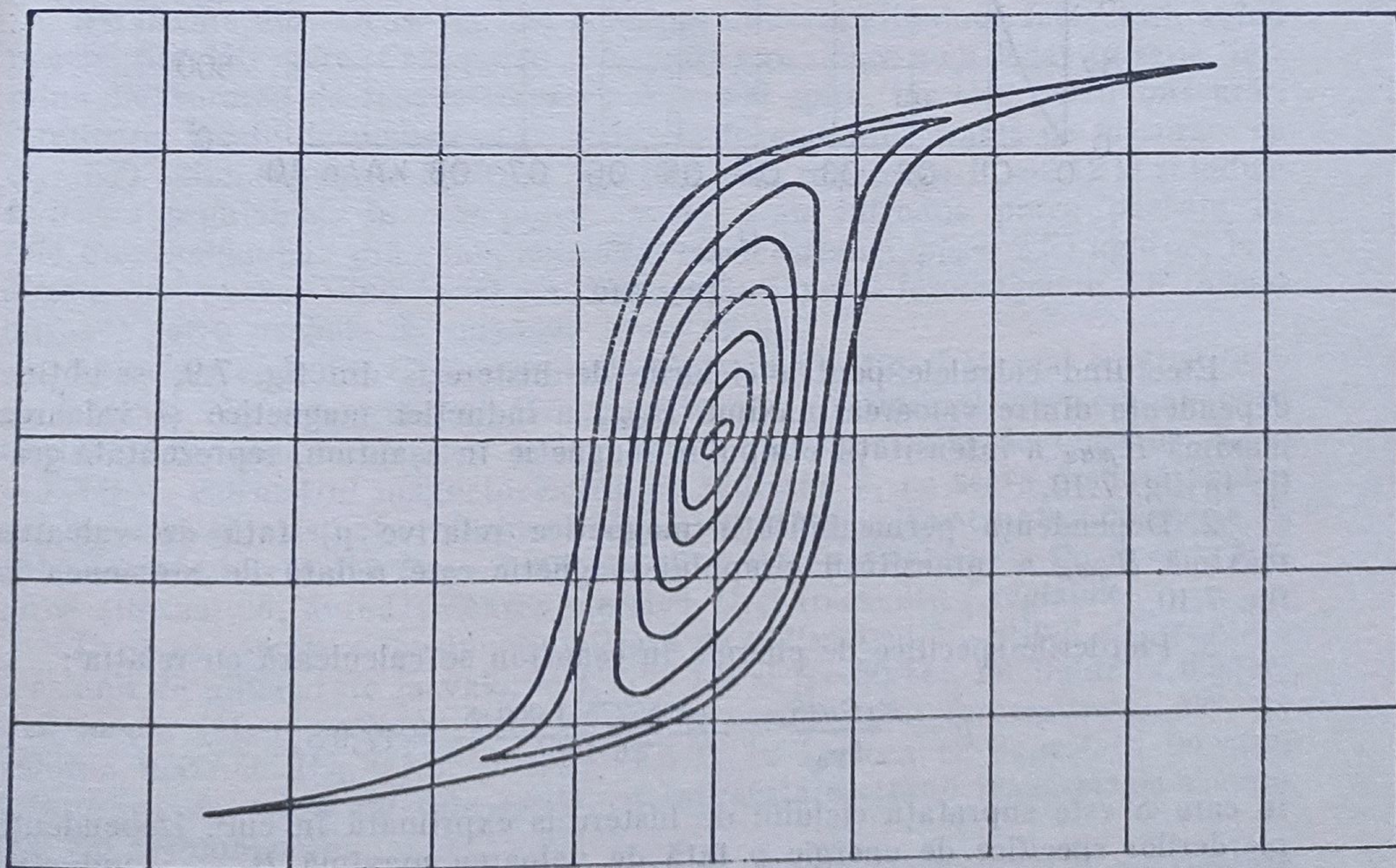


Fig. 7.9.

Valoarea maximă a inducţiei magnetice în eşantion se determină cu relaţia :

$$B_{max} = C_B a_Y,$$

în care a_Y este deviaţia maximă pe verticală a spotului osciloscopului catodic, corespunzătoare unui ciclu de histerezis din fig. 7.9, iar

$$C_B = \frac{2\,C_Y C_2 R_2}{N_2 n d\,(D_{ext} - D_{int})} = \frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^4}{231 \cdot 20 \cdot 0{,}35 \cdot 10^{-3} \cdot (0{,}06 - 0{,}05)} = 0{,}495\ \frac{\text{T}}{\text{cm}}$$

se obţine ţinînd seama de soluţia problemei 2.6.5.

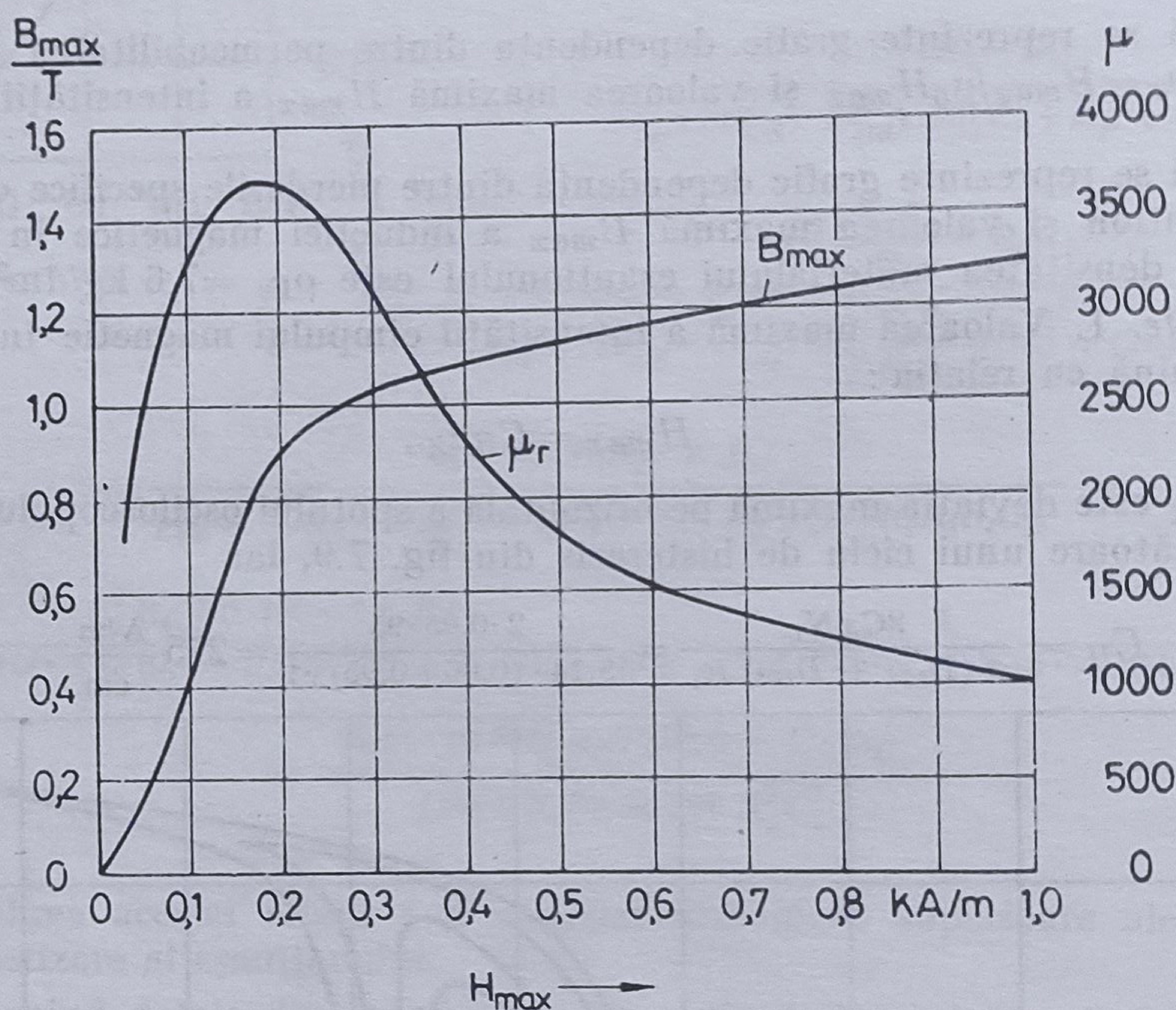


Fig. 7.10.

Efectuînd calculele pentru ciclurile de histerezis din fig. 7.9, se obţine dependenţa dintre valoarea maximă B_{max} a inducţiei magnetice şi valoarea maximă H_{max} a intensităţii cîmpului magnetic în eşantion, reprezentată grafic în fig. 7.10.

2. Dependenţa permeabilităţii magnetice relative μ_r faţă de valoarea maximă H_{max} a intensităţii cîmpului magnetic este redată de asemenea în fig. 7.10.

3. Pierderile specifice de energie în eşantion se calculează cu relaţia :

$$p = \frac{C_B C_H f S}{\rho_{Fe}} = \frac{0{,}495 \cdot 275 \cdot 1\,000 \cdot S}{7{,}6 \cdot 10^3} = 17{,}9\,S,$$

în care S este suprafaţa ciclului de histerezis exprimată în cm². Dependenţa pierderilor specifice de energie p faţă de valoarea maximă B_{max} a inducţiei magnetice în eşantion s-a reprezentat grafic la scară semilogaritmică fig. 7.11.

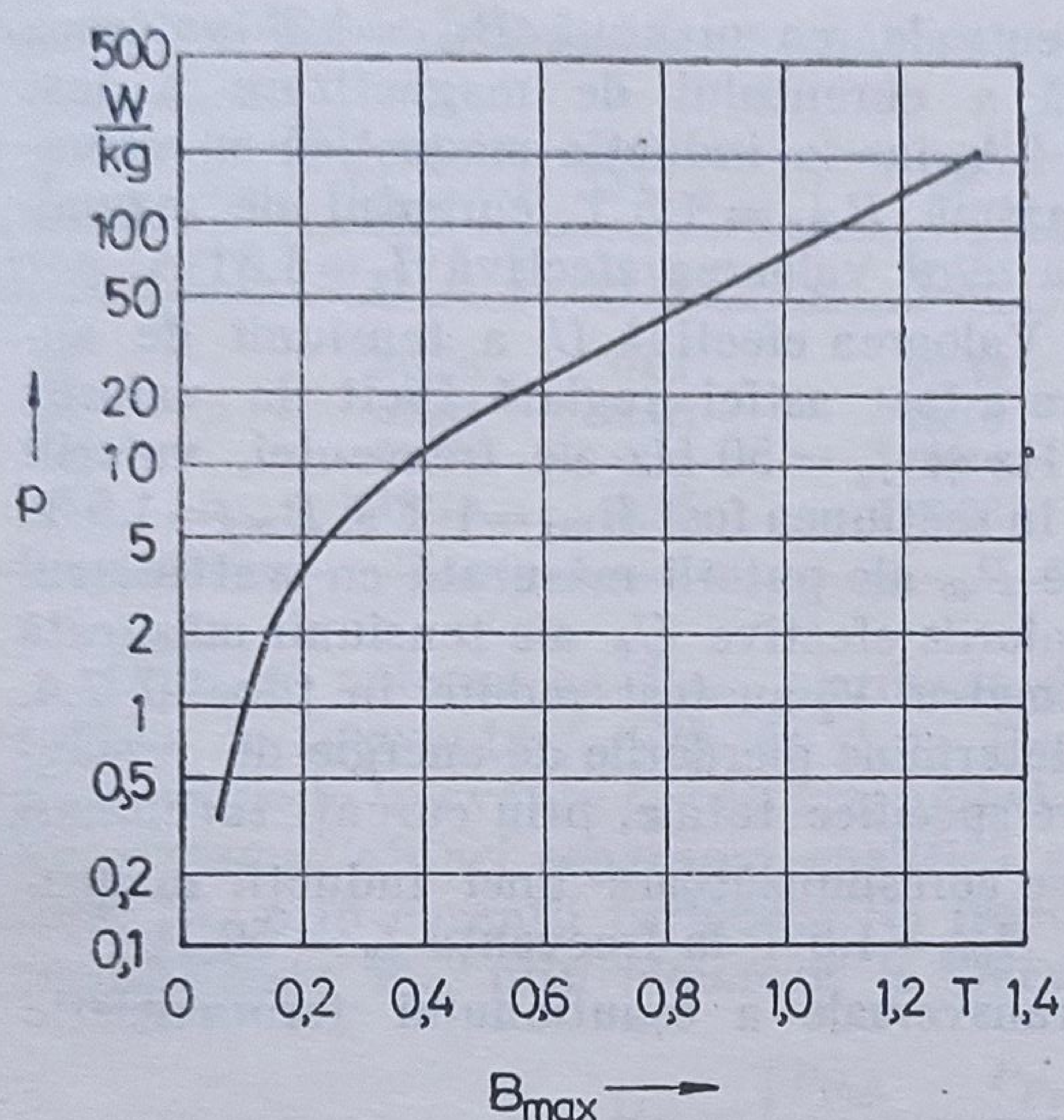


Fig. 7.11.

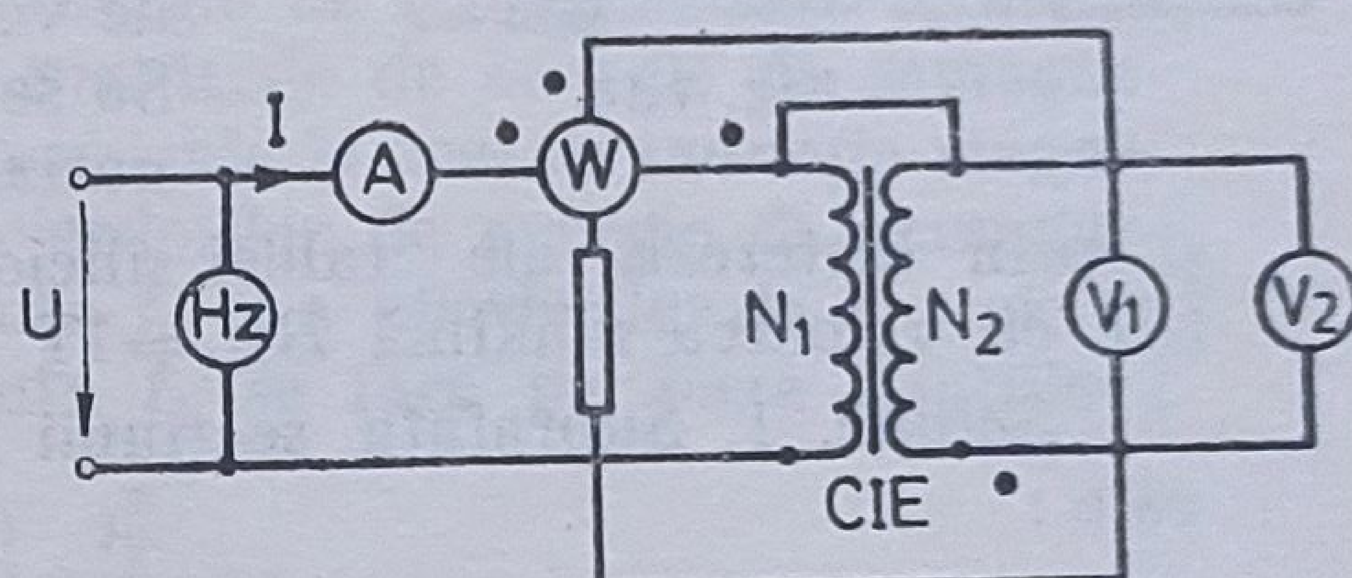


Fig. 7.12.

Problema 7.6. Pierderile de energie de remagnetizare ale unei table silicioase s-au determinat cu ajutorul instalației Epstein de 10 kg din fig. 7.12.

Cadrul *CIE* al acestei instalații este format din patru carcase identice așezate pe laturile unui patrat (fig. 7.13).

Pe fiecare din carcase au fost bobinate uniform cîte două înfășurări, avînd fiecare cîte 150 spire. Cele patru înfășurări exterioare s-au legat în serie, formînd înfășurarea de magnetizare cu $N_1=600$ spire, iar cele patru înfășurări interioare, legate de asemenea în serie, au format înfășurarea de măsurare cu $N_2=600$ spire, suprafața ferestrei $S_2=10{,}4$ cm², rezistența $R_2=2{,}12\ \Omega$ și inductivitatea neglijabilă. În cele patru carcase s-au introdus patru pachete de tole dreptunghiulare din tabla silicioasă cu densitatea $\rho_{Fe}=7{,}55$ kg/dm³, lungimea unui pachet fiind $l=50$ cm. Masa eșantionului feromagnetic *EF* format din cele patru pachete de tole este $M=9{,}92$ kg.

In afara cadrului *CIE*, instalația Epstein din fig. 7.12 mai conține frecvențmetrul *Hz*, ampermetrul feromagnetic *A*, wattmetrul electrodinamic *W* cu factor de putere nominal mic și rezistența circuitului de tensiune $R_w=5\,000\ \Omega$, voltmetrul magnetoelectric cu redresor V_1 cu scara gradată pentru valori medii și rezistența interioară $R_{v1}=150$ kΩ și voltmetrul feromagnetic V_2 cu rezistența interioară $R_{v2}=5\,000\ \Omega$. Alimentarea schemei s-a făcut cu o tensiune alternativă, avînd valoarea efectivă U și frecvența f reglabile.

1. Să se calculeze tensiunea indicată de voltmetrul V_1, știind că frecvența tensiunii de alimentare ia valorile $f_1=25$ Hz și $f_2=50$ Hz, iar inducția magnetică medie într-o secțiune transversală a eșantionului feromagnetic *EF* are valorile maxime $B_{m1}=1$ T și $B_{m2}=1{,}5$ T, în ipoteza că suprafața ferestrei înfășurării de măsurare este egală cu suprafața secțiunii transversale a eșantionului feromagnetic.

2. Să se recalculeze valorile determinate la punctul 1, luînd în considerare suprafața reală a ferestrei înfășurării de măsurare și știind că la inducția mag-

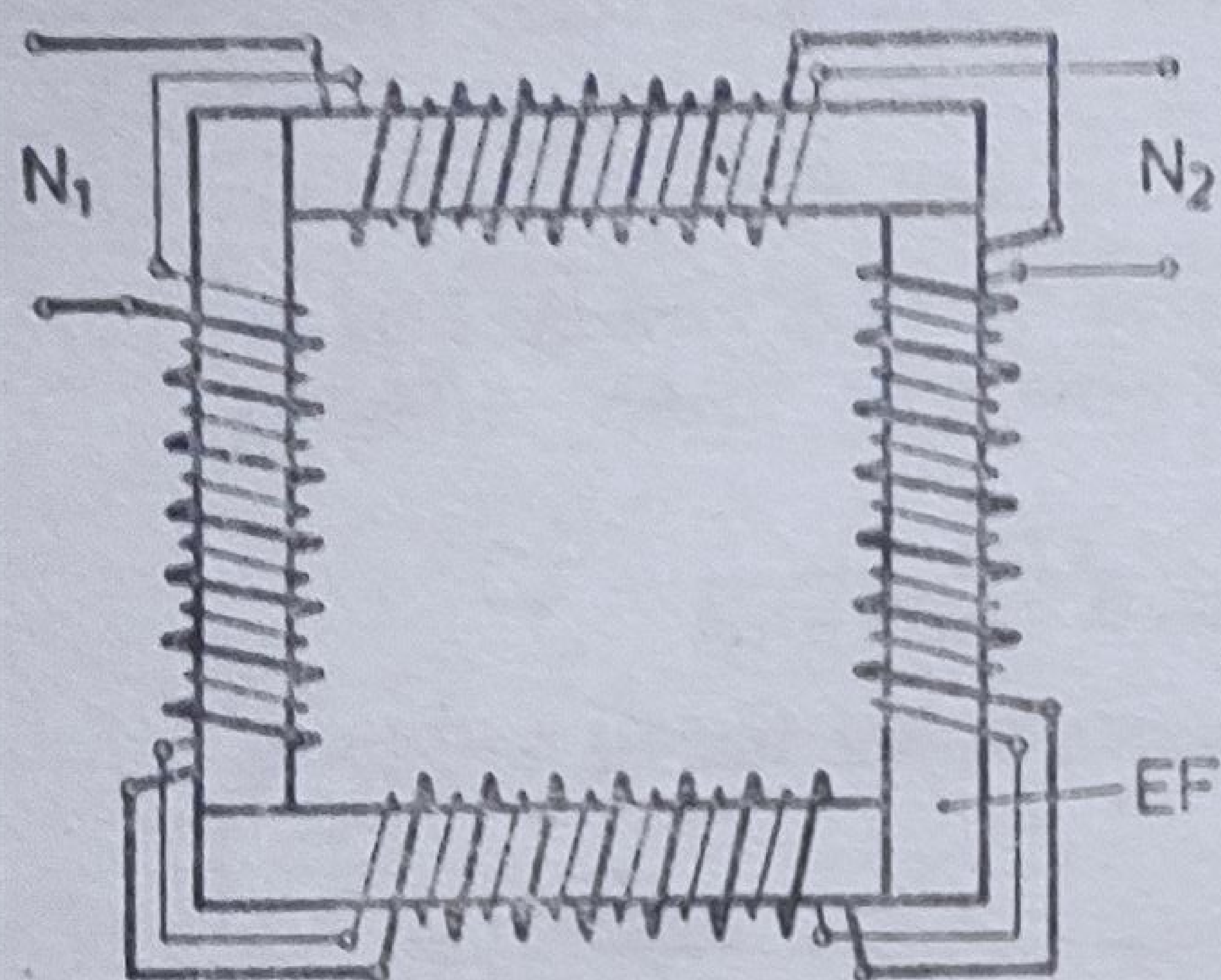


Fig. 7.13.

netică cu valoarea maximă $B_{m1}=1$ T valoarea efectivă a curentului de magnetizare a fost $I_1=2,14$ A, iar la inducţia magnetică cu valoarea maximă $B_{m2}=1,5$ T curentul de magnetizare a avut valoarea efectivă $I_2=4,81$ A.

3. Valoarea efectivă U a tensiunii de alimentare a fost astfel reglată încît la valorile $f_1=25$ Hz şi $f_2=50$ Hz ale frecvenţei, valorile medii în secţiunea fost $B_{m1}=1$ T şi $B_{m2}=1,5$ T. Valorile P_w ale puterii măsurată cu wattmetrul W şi valorile efective U_e ale tensiunii măsurată de voltmetrul V_2 au fost redate în tabelul 7.4. Să se determine pierderile de energie de remagnetizare specifice totale, prin curenţi turbionari şi prin histerezis ale tablei silicioase corespunzătoare unei inducţii magnetice cu valoarea maximă $B_{m1}=1$T şi $B_{m2}=1,5$ T la frecvenţa $f_2=50$ Hz.

Soluţie. 1. Suprafaţa secţiunii transversale a eşantionului feromagnetic este :

$$S_{Fe}=\frac{M}{4\rho_{Fe}\, l}=\frac{9,92}{4\cdot 7,55\cdot 10^3\cdot 0,5}=6,57\cdot 10^{-4}\ \text{m}^2.$$

La valoarea maximă B_m şi frecvenţa f a inducţiei magnetice alternative în eşantion, primul voltmetru indică tensiunea medie :

$$U'_{med}=4fS_{Fe}N_2B_m\frac{R_i}{R_2+R_i},$$

unde

$$\frac{1}{R_i}=\frac{1}{R_w}+\frac{1}{R_{v1}}+\frac{1}{R_{v2}}.$$

În tabelul 7.4 s-au redat tensiunile U'_{med} măsurate de voltmetrul V_1 în cele patru situaţii specificate.

2. Suprafaţa ferestrei înfăşurării de măsurare fiind mai mare decît suprafaţa secţiunii transversale a eşantionului feromagnetic, valorii U'_{med} a tensiunii calculată la punctul 1 i se adaugă corecţia



$$\Delta U_{med}=\frac{f(S_2-S_{Fe})N_1N_2\mu_0k_vIR_i}{l\,(R_2+R_i)},$$

unde I este valoarea efectivă a curentului de magnetizare, iar $k_v=2$ reprezintă factorul de vîrf al curentului de magnetizare. Corecţiile ΔU_{med} şi valorile U''_{med} corectate ale tensiunii măsurată de voltmetrul V_1 au fost prezentate în tabelul 7.4.

3. Pierderile de energie de remagnetizare totale în eşantionul feromagnetic s-au determinat cu ajutorul relaţiei :

$$P_{Fe}=\left(P_w\frac{N_1}{N_2}-\frac{U_e^2}{R_i}\right)\left(1+\frac{R_2}{R_i}\right).$$

Valorile obţinute în acest fel s-au trecut în tabelul 7.4.

Tabelul 7.4

f	B_m	U'_{med}	ΔU_{med}	U''_{med}	P_w	U_e	P_{Fe}
[Hz]	[T]	[V]	[V]	[V]	[W]	[V]	[W]
25	1	39,39	0,04	39,43	10,1	44,1	9,32
25	1,5	59,08	0,08	59,16	20,2	67,1	18,38
50	1	78,77	0,07	78,84	24,2	88,2	21,05
5C	1,5	118,16	0,17	118,33	49,6	134,2	42,31

Dacă se notează cu P_{Fe1} pierderile de energie de remagnetizare totale în eşantion la frecvenţa $f_1=25$ Hz şi cu P_{Fe2} pierderile de energie de remagnetizare totale la frecvenţa $f_2=50$ Hz, ambele măsurate la aceeaşi inducţie magnetică maximă, atunci separarea analitică a pierderilor de energie de remagnetizare P_{t2} prin curenţii turbionari la frecvenţa f_2 şi a pierderilor de energie de remagnetizare P_{h2} prin histerezis la frecvenţa f_2 se face pe baza relaţiilor:

$$P_{t2}=\left(\frac{P_{Fe2}}{f_2}-\frac{P_{Fe1}}{f_1}\right)\frac{f_2^2}{f_2-f_1},$$

$$P_{h2}=P_{Fe2}-P_{t2}.$$

După efectuarea calculelor s-au obţinut valorile $P_{t2}=4{,}82$ W şi $P_{h2}=16{,}23$ W la inducţia magnetică maximă $B_{m1}=1$ T şi $P_{t2}=11{,}10$ W şi $P_{h2}=31{,}21$ W la inducţia magnetică maximă $B_{m2}=1{,}5$ T.

Factorul de formă al tensiunii induse în înfăşurarea de măsurare se determină din:

$$k_f=\frac{U_e}{U''_{med}},$$

rezultînd $k_{f1}=1{,}118$ pentru inducţia magnetică maximă $B_{m1}=1$ T şi $k_{f2}=1{,}134$ pentru inducţia magnetică maximă $B_{m2}=1{,}5$ T. Se observă că la valoarea maximă $B_{m1}=1$ T inducţia magnetică este practic sinusoidală. Pentru valoarea maximă $B_{m2}=1{,}5$ T a inducţiei magnetice pierderile de energie de remagnetizare totale se recalculează pentru un regim sinusoidal

$$P_{Fe2sin}=P_{Fe2}-P_{t2}\left(1-\frac{k_{f\,sin}^2}{k_{f2}^2}\right)=42{,}31-11{,}10\left(1-\frac{1{,}11^2}{1{,}134^2}\right)=41{,}71\ \text{W}.$$

O nouă separare a pierderilor de energie de remagnetizare conduce la valorile $P_{t2sin}=9{,}90$ W şi $P_{h2sin}=31{,}81$ W.

Tabelul 7.5

B_m	p_{Fe}	p_{t2}	p_{h2}
[T]	[W/kg]	[W/kg]	[W/kg]
1	2,12	0,49	1,63
1,5	4,20	1,00	3,20

Pierderile de energie de remagnetizare specifice se obţin prin împărţirea pierderilor de energie de remagnetizare la masa eşantionului feromagnetic. Tabelul 7.5 conţine valorile pierderilor de energie de remagnetizare specifice totale p_{Fe2}, prin curenţi turbionari p_{t2} şi prin histerezis p_{h2} în regimul sinusoidal al inducţiei magnetice, avînd valorile maxime $B_{m1}=1$ T şi $B_{m2}=1,5$ T şi frecvenţa $f_2=50$ Hz.

BIBLIOGRAFIE PENTRU CAPITOLUL 7

Pop, E., Chivu, M. *Măsurări electrice şi magnetice*, vol. II, cap. 23. Institutul politehnic Timişoara, 1969.

Wiener, U., *Măsurări electrice industriale*, vol. II, cap. 3. Editura tehnică, Bucureşti, 1969.

CUPRINSUL

Prefață ... 5

Capitolul 1. CALCULUL ERORILOR DE MĂSURARE .. 7

1.1. Calculul erorilor rezultatelor măsurărilor efectuate cu aparate de măsură cu citire directă 8

1.2. Calculul erorilor rezultatelor măsurărilor bazate pe rezultatele altor măsurări 13

1.3. Calculul erorilor șirurilor de rezultate ale măsurărilor repetate 19

1.4. Bibliografie pentru capitolul 1 21

Capitolul 2. MĂSURAREA CURENTULUI, TENSIUNII ȘI SARCINII ELECTRICE 22

2.1. Ampermetre și voltmetre 22

2.2. Galvanometre obișnuite și galvanometre vibratoare 57

2.3. Oscilografe electromecanice și osciloscoape catodice 67

2.4. Compensatoare 71

2.5. Transformatoare de măsură 82

2.6. Amplificatoare de măsură 90

2.7. Galvanometre balistice și contoare de sarcină electrică 97

2.8. Bibliografie pentru capitolul 2 109

Capitolul 3. MĂSURAREA PUTERII ȘI ENERGIEI ELECTRICE 111

3.1. Wattmetre 111

3.2. Contoare de energie electrică 117

3.3. Măsurarea puterii și energiei în circuite de c. c. 123

3.4. Măsurarea puterii și energiei în circuite de c. a. monofazat 129
3.5. Măsurarea puterii și energiei, în circuite de c. a. trifazat 137
3.6. Bibliografie pentru capitolul 3 146

Capitolul 4. MĂSURAREA REZISTENȚEI, INDUCTIVITĂȚII, CAPACITĂȚII ȘI IMPEDANȚEI 147

4.1. Ohmmetre, henrymetre și faradmetre 147
4.2. Punți 152
4.3. Măsurarea rezistenței, inductivității, capacității și impedanței prin metode indirecte 176
4.4. Măsurarea rezistenței prizelor de pămînt 185
4.5. Bibliografie pentru capitolul 4 190

Capitolul 5. MĂSURAREA FRECVENȚEI, FAZEI ȘI FACTORULUI DE PUTERE 191

Capitolul 6. MĂSURAREA MĂRIMILOR DE STARE ALE CÎMPULUI MAGNETIC 204

Capitolul 7. MĂSURAREA MĂRIMILOR MAGNETICE DE MATERIAL 213